

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ КОММУТИРУЮЩИМИ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

С.К. Куижева

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

Рассматриваются дифференциальные уравнения, порожденные линейными дифференциальными операторами первого и второго порядков.

В этой статье рассматриваются дифференциальные уравнения, порожденные коммутирующими линейными дифференциальными операторами первого и второго порядка.

Рассмотрим гладкие функции $P(t, s)$ и $L(t, s)$ со значениями в кольце дифференциальных операторов. Введем некоторые определения.

Определение 1: Уравнение $L_t - P_s = [P, L]$ называется уравнением нулевой кривизны.

Определение 2: Уравнение вида $[P, L] = 0$ называют стационарным уравнением нулевой кривизны.

Определение 3.: Уравнения вида

$$f(P, L, P_s, L_t) = 0,$$

где f некоторая функция от своих аргументов, будем называть дифференциальными уравнениями, порожденными линейными операторами P и L .

При этом, определенные выше уравнения нулевой кривизны являются частными случаями уравнений, порожденных линейными операторами.

Известно [1], что удачно подобранные линейные дифференциальные операторы первого порядка позволяют классифицировать дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. При этом гиперболический, параболический и эллиптический случаи регулируются знаком неизвестной функции и ее принадлежностью \mathbb{R} или \mathbb{C} .

1. Рассмотрим дифференциальные операторы второго порядка.

$$P = a_2 \partial_x^2 + b_2 \partial_y^2 + a_1 \partial_x + b_1 \partial_y + a_0,$$

$$L = c_2 \partial_x^2 + m_2 \partial_y^2 + m_1 \partial_x + c_1 \partial_y + b_0,$$

где $a_2, b_2, a_1, b_1, a_0, c_2, m_2, m_1, c_1, b_0$ – некоторые гладкие функции.

Условие $[P, L] = 0$ равносильно системе уравнений:

$$a_2 c_{2x} - c_2 a_{2x} = 0, \quad b_2 m_{2y} - m_2 b_{2y} = 0, \quad b_2 c_{2y} - m_2 a_{2y} = 0, \quad a_2 m_{2x} - c_2 b_{2x} = 0, \quad b_2 m_{1y} - m_2 a_{1y} = c_2 b_{1x} - a_2 c_{1x} \quad (1)$$

$$a_2 c_{2xx} + b_2 c_{2yy} + a_1 c_{2x} + b_1 c_{2y} + 2a_2 m_{1x} = c_2 a_{2xx} + 2c_2 a_{1x} + m_2 a_{2yy} + m_1 a_{2x} + c_1 a_{2y}, \quad (2)$$

$$a_2 m_{2xx} + b_2 m_{2yy} + a_1 m_{2x} + b_1 m_{2y} + 2b_2 c_{1y} = c_2 b_{2xx} + 2m_2 b_{1y} + m_2 b_{2yy} + m_1 b_{2x} + c_1 b_{2y} \quad (3)$$

$$a_2 m_{1xx} + b_2 m_{1yy} + a_1 m_{1x} + b_1 m_{1y} + 2a_2 b_{0x} = c_2 a_{1xx} + 2c_2 a_{0x} + m_2 a_{1yy} + m_1 a_{1x} + c_1 a_{1y} \quad (4)$$

$$a_2 c_{1xx} + b_2 c_{1yy} + a_1 c_{1x} + b_1 c_{1y} + 2b_2 b_{0y} = c_2 b_{1xx} + 2m_2 a_{0y} + m_2 b_{1yy} + m_1 b_{1x} + c_1 b_{1y}. \quad (5)$$

После преобразования системы находим:

$$c_2 = a_2 k_1(y), \quad m_2 = b_2 k_2(x), \quad \text{или} \quad a_2 = \frac{k_3}{k_1 - k_2}, \quad c_2 = \frac{k_1 k_3}{k_1 - k_2}, \quad b_2 = \frac{k_4}{k_2 - k_1}, \quad m_2 = \frac{k_2 k_4}{k_2 - k_1},$$

где $k_1 = k_1(y)$, $k_2 = k_2(x)$, $k_3 = k_3(x)$, $k_4 = k_4(y)$ – произвольные гладкие функции.

Из условия (1) получаем:

$$m_1 = k_2 a_1 + k_3 \varphi_x, \quad c_1 = k_1 b_1 + k_4 \varphi_y, \tag{6}$$

где $\varphi = \varphi(x, y)$ – некоторая гладкая функция.

Подставляя равенства (6) в равенства (2) – (5), получаем:

$$b_2(c_2 - k_2 a_2)_{yy} + \mathbf{a}_1(c_{2x} - k_2 a_{2x}) - k_3 \varphi_x a_{2x} + \mathbf{b}_1(c_{2y} - k_1 a_{2y}) - k_4 \varphi_y a_{2y} + 2b_2((k_1 - k_2)\mathbf{b}_1 + k_4 \varphi_y)_y = 0 \tag{7}$$

$$a_2(m_2 - k_2 b_2)_{xx} + \mathbf{a}_1(m_{2x} - k_2 b_{2x}) - k_3 \varphi_x b_{2x} + \mathbf{b}_1(m_{2y} - k_1 b_{2y}) - k_4 \varphi_y b_{2y} + 2b_2((k_1 - k_2)\mathbf{b}_1 + k_4 \varphi_y)_y = 0 \tag{8}$$

$$a_2((k_2 - k_1)\mathbf{a}_1 + k_3 \varphi_x)_{xx} + 2a_2(b_0 - k_1 a_0)_x + b_2(k_3 \varphi_x)_{yy} + k_{2x} \mathbf{a}_1^2 + (k_{3x} \varphi_x + k_3 \varphi_{xx})\mathbf{a}_1 - k_3 \varphi_x a_{1y} - k_4 \varphi_y \mathbf{a}_{1y} + ((k_2 - k_1)\mathbf{a}_{1y} - k_3 \varphi_{xx})\mathbf{b}_1 = 0, \tag{9}$$

$$b_2((k_1 - k_2)\mathbf{b}_1 + k_4 \varphi_y)_{yy} + 2b_2(b_0 - k_2 a_0)_y + a_2(k_4 \varphi_y)_{xx} + k_{1y} \mathbf{b}_1^2 + (k_{4y} \varphi_y + k_4 \varphi_{yy})\mathbf{b}_1 - k_3 \varphi_x \mathbf{b}_{1x} - k_4 \varphi_y \mathbf{b}_{1y} + ((k_1 - k_2)\mathbf{b}_{1y} + k_4 \varphi_{xy})\mathbf{a}_1 = 0. \tag{10}$$

Из равенств (7) и (8) найдем a_1 и b_1 :

$$a_1 = \frac{f_1 - q_1 b_1}{p_1}, \quad b_1 = \frac{f_1 - p_1 a_1}{q_1},$$

где $p_1 = a_2 k_{1x} + (k_1 - k_2) b_{2y}$, $q_1 = (a_2 b_{1y} + (k_1 - k_2) b_{2y})$; $f_1 = (a_2 - b_2)_x + (a_2 - b_2)_y + (k_2 - k_1)(a_2 - b_2)$.

В предположении, что $p_1 \neq 0$, $q_1 \neq 0$, из равенств (9) и (10) получаем условия в виде дифференциальных уравнений в частных производных на неизвестные функции \mathbf{a}_1 и \mathbf{b}_1 :

$$a_2((k_2 - k_1)\mathbf{a}_1 + k_3 \varphi_x)_{xx} + 2a_2(b_0 - k_1 a_0)_x + b_2(k_3 \varphi_x)_{yy} + k_{2x} \mathbf{a}_1^2 + (k_{3x} \varphi_x + k_3 \varphi_{xx})\mathbf{a}_1 - k_3 \varphi_x a_{1y} - k_4 \varphi_y \mathbf{a}_{1y} + ((k_2 - k_1)\mathbf{a}_{1y} - k_3 \varphi_{xx}) \frac{f_1 - p_1 a_1}{q_1} = 0,$$

$$b_2((k_1 - k_2)\mathbf{b}_1 + k_4 \varphi_y)_{yy} + 2b_2(b_0 - k_2 a_0)_y + a_2(k_4 \varphi_y)_{xx} + k_{1y} \mathbf{b}_1^2 + (k_{4y} \varphi_y + k_4 \varphi_{yy})\mathbf{b}_1 - k_3 \varphi_x \mathbf{b}_{1x} - k_4 \varphi_y \mathbf{b}_{1y} + ((k_1 - k_2)\mathbf{b}_{1y} + k_4 \varphi_{xy}) \frac{f_1 - q_1 b_1}{p_1} = 0.$$

Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальные операторы $P = \partial_x^2 + 2u_x \partial_x + u$, $L = \partial_y + v$,

где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — некоторые гладкие функции.

Вычислим коммутатор $[P, L] = P \circ L - L \circ P$.

$$P \circ L = \partial_x^2 \partial_y + v_{xx} + 2v_x \partial_x + v \partial_x^2 + 2u_x \partial_x \partial_y + 2u_x v_x + 2u_x v \partial_x + u \partial_y + uv,$$

$$L \circ P = \partial_y \partial_x^2 + 2u_{xy} \partial_y + 2u_x \partial_x \partial_y + u_y + u \partial_y + v \partial_x^2 + 2u_x v \partial_x + vu.$$

Следовательно, $[P, L] = v_{xx} + 2u_x v_x - u_y + 2(v_x - u_{xy}) \partial_x$

Условие $[P, L] = 0$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} v_x = u_{xy} \\ v_{xx} + 2u_x v_x - u_y = 0, \end{cases}$$

Откуда следует, что $u_{xy} + (u_x^2)_y - u_y = 0$ или

$$u_{xx} + u_x^2 - u = f(x), \tag{11}$$

где $f(x)$ – некоторая гладкая функция от x .

Уравнение (11) в обыкновенном случае встречается при исследовании вынужденных затухающих малых колебаний, если затухание пропорционально квадрату скорости [2. с. 491].

В частности, при $f(x) \equiv 0$, полагая $w(u) = u_x^2$, получаем линейное уравнение

$w' + 2w - 2u = 0$, откуда следует

$$u^2 = ce^{-2y} - 1/2(1-y), \tag{12}$$

$x = c_1 + \int \frac{dy}{\sqrt{Y}}$, где Y – правая часть равенства (12).

Пример 2. Рассмотрим дифференциальные операторы

$$P = \partial_x^2 + 2u_x \partial_x + u, \quad L = \partial_x + \partial_y + v,$$

где $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ – некоторые гладкие функции

Вычислим коммутатор $[P,L]=P \circ L - L \circ P$.

$$P \circ L = \partial_x^3 + \partial_x^2 + \partial_y + v_{xx} + 2v_x \partial_x + v \partial_x^2 + 2u_x \partial_x^2 + 2u_x \partial_x \partial_y + 2u_x v_x + 2v u_x \partial_x + u \partial_x + u \partial_y + uv,$$

$$L \circ P = \partial_x^3 + 2u_{xx} \partial_x + 2u_x \partial_x^2 + u_x + u \partial_x + \partial_y \partial_x^2 - 2u_{xy} \partial_x + 2u_x \partial_x \partial_y + u_y + u \partial_y + v \partial_x^2 u_x \partial_x + uv.$$

Следовательно, $[P,L]=v_{xx} + 2u_x v_x - u_x - u_y + 2(v_x - u_{xx} - u_{xy}) \partial_x$

Условие $[P,L]=0$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} v_x = u_{xx} + u_{xy} \\ v_{xx} + 2u_x v_x - u_x - u_y = 0, \end{cases}$$

отсюда следует, что

$$(u_{xx} + u_x^2 - u)_x + (u_{xx} + u_y^2 - u)_y = 0 \tag{13}$$

Интегрируя уравнение (13), получаем $u_{xx} + u_x^2 - u = f(y-x)$, где $f(y-x)$ – произвольная функция.

Таким образом, добавление оператора ∂_y в оператор L приводит к изменению вынужденной силы: $f(x) \rightarrow f(y-x)$.

Пример 3. Рассмотрим дифференциальные операторы

$$L = u \partial + u^2 + a(x), \quad P = u^2 \partial^2 - u u' \partial - u u'' + u'^2,$$

где $a=a(t)$ – некоторая гладкая функция, $u=u(t)$ – неизвестная функция

Тогда условие $[L,P]=0$ равносильно уравнению Риккати:

$$u' + u^2 + a(t) = 0 \tag{14}$$

Доказательство: Вычислим:

$$\begin{aligned} L \circ P &= 2u^2 u' \partial^2 + u^3 \partial^3 - u(u u') \partial - u^2 u' \partial^2 - u(-u u'' + u'^2) + u(-u u'' + u'^2) \partial + (u^2 + a) u^2 \partial^2 - \\ &\quad - (u^2 + a) u u' \partial + (u^2 + a)(-u u'' + u'^2) \\ P \circ L &= u^2 u'' \partial + 2u^2 u' \partial^2 + u^3 \partial^3 + u^2 (u^2 + a)' \partial + 2u^2 (u^2 + a)' \partial + u^2 (u^2 + a) \partial^2 - u u'^2 \partial - u^2 u' \partial^2 - \\ &\quad - u u' (u^2 + a)' - u u' (u^2 + a) \partial + (-u u'' + u'^2) u \partial + (-u u'' + u'^2) (u^2 + a) \end{aligned}$$

Вычислим коммутатор:

$$[L,P] = -2u^2 (u' + u^2 + a) \partial,$$

откуда следует уравнение Риккати (14)

Теорема 1. Пусть $u(x)$ – решение уравнения Риккати

$$u' + u^2 + a(t) = 0$$

Тогда линейное уравнение

$$u^2 y'' - u u' y' + (-u u'' + u'^2) y = 0 \tag{15}$$

Интегрируется в конечном виде:

$$y = c_1 u + c_2 u \int \frac{dt}{u^2} \tag{16}$$

Доказательство:

Из уравнения (15) следует, что $y'' - \frac{u'}{u} y' - \left(\frac{u''}{u}\right) y = 0$ или $y' - \left(\frac{u'}{u}\right) y = 0$, $y' - \frac{u'}{u} y = c_2$

откуда следует равенство (16).

Пример 4. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L = u^{1-n} \partial_x^2 + a(x)$$

где $a(x)$ – некоторая гладкая функция.

Найдём корень квадратный из оператора L .

Пусть $\lambda = u^{\frac{1-n}{2}} \xi + a_0 + a_{-1} \xi^{-1} + a_{-2} \xi^{-2} + \dots$ – ряд Лорана от свободной переменной ξ [3].

Определим умножение рядов по правилу:

$$\lambda \circ \lambda = \lambda \cdot \lambda + \lambda'_x \lambda'_\xi + \frac{1}{2} \lambda''_{xx} \lambda''_{\xi\xi} + \dots + \frac{1}{n!} \lambda_{x\dots x}^{(n)} \lambda_{\xi\dots\xi}^{(n)} + \dots$$

Из условия $\lambda \cdot \lambda = u^{1-n} \xi^2 + a(x)$, находим коэффициенты a_0, a_{-1}, \dots

$$2u^{\frac{1-n}{2}} a_0 + u^{\frac{1-n}{2}} (u^{\frac{1-n}{2}})' = 0,$$

$$a_0^2 + 2u^{\frac{1-n}{2}} a_{-1} + u^{\frac{1-n}{2}} a_0 = a(x),$$

$$2a_0 a_{-2} + 2u^{\frac{1-n}{2}} a_{-2} + u^{\frac{1-n}{2}} a'_{-1} - a_{-1} (u^{\frac{1-n}{2}})' = 0,$$

откуда следует, что

$$a_0 = -\frac{1}{2} (u^{\frac{1-n}{2}})', \quad 2a_{-1} = a(x) - \frac{1}{4} (u^{\frac{1-n}{2}})'^2 + \frac{1}{4} (u^{\frac{1-n}{2}})', \quad 2a_{-2} = 2(u^{\frac{1-n}{2}})' u^{\frac{1-n}{2}} a_{-1} - a'_{-1}, \dots$$

Аналогично можно найти остальные коэффициенты a_i .

Вычислим дробные степени оператора L .

$$\begin{aligned} L^{\circ 3/2} &= \lambda \circ L = (u^{\frac{1-n}{2}} \xi + a_0 + a_{-1} \xi^{-1} + a_{-2} \xi^{-2} + \dots) (u^{\frac{1-n}{2}} \xi^2 + a) + \\ &+ ((u^{\frac{1-n}{2}})' \xi + a'_0 + a'_{-1} \xi^{-1} + a'_{-2} \xi^{-2} + \dots) \cdot 2u^{\frac{1-n}{2}} \xi + \\ &+ \frac{1}{2} ((u^{\frac{1-n}{2}})'' \xi + a''_0 + a''_{-1} \xi^{-1} + a''_{-2} \xi^{-2} + \dots) \cdot 2u^{\frac{1-n}{2}} = \\ &= u^{\frac{3(1-n)}{2}} \xi^3 + a_0 u^{\frac{1-n}{2}} \xi^2 + a_{-1} u^{\frac{1-n}{2}} \xi + a_{-2} u^{\frac{1-n}{2}} + a_{-3} u^{\frac{1-n}{2}} \xi^{-1} + \dots + \\ &+ a u^{\frac{1-n}{2}} \xi - a a_0 + a a_{-1} \xi^{-1} + a a_{-2} \xi^{-2} + \dots + \\ &+ 2u^{\frac{1-n}{2}} (u^{\frac{1-n}{2}})' \xi^2 + 2u^{\frac{1-n}{2}} a'_0 \xi + 2u^{\frac{1-n}{2}} a'_{-1} + 2u^{\frac{1-n}{2}} a'_{-2} \xi^{-1} + \dots + \\ &= u^{\frac{3(1-n)}{2}} \xi^3 + (a_0 u^{\frac{1-n}{2}} + 2u^{\frac{1-n}{2}} (u^{\frac{1-n}{2}})') \xi^2 + \\ &+ (a_{-1} u^{\frac{1-n}{2}} + a u^{\frac{1-n}{2}} + 2u^{\frac{1-n}{2}} a'_0 + u^{\frac{1-n}{2}} (u^{\frac{1-n}{2}})'') \xi + \\ &+ a_{-2} u^{\frac{1-n}{2}} + a a_0 + 2u^{\frac{1-n}{2}} a'_{-1} + u^{\frac{1-n}{2}} a''_0 + (a_{-3} u^{\frac{1-n}{2}} + a a_{-1} + 2u^{\frac{1-n}{2}} a'_{-2} + u^{\frac{1-n}{2}} a''_{-1}) \xi^{-1} + \dots \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} L_+^{\circ 3/2} &= u^{\frac{3(1-n)}{2}} \partial^3 + (a_0 u^{\frac{1-n}{2}} + 2u^{\frac{1-n}{2}} (u^{\frac{1-n}{2}})') \partial^2 + \\ &+ (a_{-1} u^{\frac{1-n}{2}} + a u^{\frac{1-n}{2}} + 2u^{\frac{1-n}{2}} a'_0 + u^{\frac{1-n}{2}} (u^{\frac{1-n}{2}})'') \partial + \\ &+ a_{-2} u^{\frac{1-n}{2}} + a a_0 + 2u^{\frac{1-n}{2}} a'_{-1} + u^{\frac{1-n}{2}} a''_0. \end{aligned}$$

Аналогично можно найти остальные дробные степени.

Теорема 3. Пусть $u(x)$ – уравнения Эмдена-Фаулера

$$u'' + a(x)u^n = 0, \tag{17}$$

где $a(x)$ – некоторая гладкая функция, $n \in \mathbf{R}$.

Тогда линейное уравнение

$$u^{1-n} y'' + a(x)y = 0, \tag{18}$$

интегрируется в конечном виде:

$$y = C_1 u + C_2 u \int \frac{dx}{u^2}. \quad (19)$$

Доказательство. В самом деле, из уравнения (17) имеем: $a(x) = \frac{u''}{u^n}$

Подставляя $a(x)$ в уравнение (18), получаем: $y'' - \frac{u''}{u} y = 0$, откуда следует равенство (19).

Л и т е р а т у р а

1. Паланджянц Л.Ж. Мультипликативный интеграл и некоторые его приложения. //Пространства над алгебрами и некоторые вопросы теории сетей. – Уфа, 1985. – С.160-163.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971.
3. Паланджянц Л.Ж., Куигева С.К., Шевякова О.П. О дробных степенях дифференциальных операторов //Труды ФОРА. –1997.– № 3. – С. 35-40.

On differential equations with commutative line differential operators

S.K. Kuigeva

The differential equations with commutative line differential operators first and second order are considered.