О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ КОММУТИРУЮЩИМИ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

С.К. Куижева

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

Рассматриваются дифференциальные уравнения, порожденные линейными дифференциальными операторами первого и второго порядков.

В этой статье рассматриваются дифференциальные уравнения, порожденные коммутирующими линейными дифференциальными операторами первого и второго порядка.

Рассмотрим гладкие функции $P(t,s)$ и $L(t,s)$ со значениями в кольце дифференциальных операторов. Введем некоторые определения.

Определение 1:Уравнение $L_t - P_s = [P, L]$ называется уравнением нулевой кривизны.

Определение 2:Уравнение вида $[P,L]=0$ называют стационарным уравнением нулевой кривизны.

Определение 3.: Уравнения вида

$$f(P,L,P_s,L_t)=0,$$

где f некоторая функция от своих аргументов, будем называть дифференциальными уравнениями, порожденными линейными операторами P и L.

При этом, определенные выше уравнения нулевой кривизны являются частными случаями уравнений, порожденных линейными операторами.

Известно [1], что удачно подобранные линейные дифференциальные операторы первого порядка позволяют классифицировать дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. При этом гиперболический, параболический и эллиптический случаи регулируются знаком неизвестной функции и ее принадлежностью R или C.

1. Рассмотрим дифференциальные операторы второго порядка.

$$P = a_2\partial_x^2 + b_2\partial_y^2 + a_1\partial_x + b_1\partial_y + a_0,$$

$$L = c_2\partial_x^2 + m_2\partial_y^2 + m_1\partial_x + c_1\partial_y + b_0,$$

где $a_2, b_2, a_1, b_1, a_0, c_2, m_2, m_1, c_1, b_0$ – некоторые гладкие функции.

Условие $[P,L]=0$ равносильно системе уравнений:

$$a_2c_{2x} - c_2a_{2x} = 0,\ b_2m_{2y} - m_2b_{2y} = 0,\ b_2c_{2y} - m_2a_{2y} = 0,\ a_2m_{2x} - c_2b_{2x} = 0,\ b_2m_{1y} - m_2a_{1y} = c_2b_{1x} - a_2c_{1x}, \quad (1)$$

$$a_2c_{2xx} + b_2c_{2yy} + a_1c_{2x} + b_1c_{2y} + 2a_2m_{1x} = c_2a_{2xx} + 2c_2a_{1x} + m_2a_{2yy} + m_1a_{2x} + c_1a_{2y}, \quad (2)$$

$$a_2m_{2xx} + b_2m_{2yy} + a_1m_{2x} + b_1m_{2y} + 2b_2c_{1y} = c_2b_{2xx} + 2m_2b_{1y} + m_2b_{2yy} + m_1b_{2x} + c_1b_{2y} \quad (3)$$

$$a_2m_{1xx} + b_2m_{1yy} + a_1m_{1x} + b_1m_{1y} + 2a_2b_{0x} = c_2a_{1xx} + 2c_2a_{0x} + m_2a_{1yy} + m_1a_{1x} + c_1a_{1y} \quad (4)$$

$$a_2c_{1xx} + b_2c_{1yy} + a_1c_{1x} + b_1c_{1y} + 2b_2b_{0y} = c_2b_{1xx} + 2m_2a_{0y} + m_2b_{1yy} + m_1b_{1x} + c_1b_{1y}. \quad (5)$$

После преобразования системы находим:

$c_2 = a_2k_1(y)$, $m_2 = b_2k_2(x)$, или $a_2 = \dfrac{k_3}{k_1 - k_2}$, $c_2 = \dfrac{k_1k_3}{k_1 - k_2}$, $b_2 = \dfrac{k_4}{k_2 - k_1}$, $m_2 = \dfrac{k_2k_4}{k_2 - k_1}$,

где $k_1 = k_1(y)$, $k_2 = k_2(x)$, $k_3 = k_3(x)$, $k_4 = k_4(y)$ – произвольные гладкие функции.

Из условия (1) получаем:

$$m_1=k_2a_1+k_3\varphi_x,\ c_1=k_1b_1+k_4\varphi_y, \qquad (6)$$

где $\varphi=\varphi(x,y)$ – некоторая гладкая функция.

Подставляя равенства (6) в равенства (2) – (5), получаем:

$$b_2(c_2-k_2a_2)_{yy}+\mathbf{a_1}(c_{2x}-k_2a_{2x}) - k_3\varphi_x a2x+\mathbf{b_1}(c_{2y}-k_1a_{2y}) - k_4\varphi_y a_{2y}+2b_2((k_1-k_2)b_1+k_4\varphi_y)_y= 0 \qquad (7)$$

$$a_2(m_2-k_2b_2)_{xx}+\mathbf{a_1}(m_{2x}-k_2b_{2x}) - k_3\varphi_x b_{2x}+\mathbf{b_1}(m_{2y}-k_1b_{2y}) - k_4\varphi_y b_{2y}+2b_2((k_1-k_2)b_1+k_4\varphi_y)_y= 0 \qquad (8)$$

$$a_2((k_2-k_1)\mathbf{a_1}+k_3\varphi_x)_{xx}+2a_2(b_0-k_1a_0)_x+b_2(k_3\varphi_x)_{yy}+k_{2x}\mathbf{a}^2\mathbf{_1}+(k_{3x}\varphi_x+k_3\varphi_{xx})\mathbf{a_1}-$$
$$- k_3\varphi_x a_{1y}-k_4\varphi_y\mathbf{a_{1y}}+((k_2-k_1)\mathbf{a_{1y}}-k_3\varphi_{xx})\mathbf{b_1}= 0, \qquad (9)$$

$$b_2((k_1-k_2)\mathbf{b_1}+k_4\varphi_y)_{yy}+2b_2(b_0-k_2a_0)_y+a_2(k_4\varphi_y)_{xx}+k_{1y}\mathbf{b}^2\mathbf{_1}+(k_{4y}\varphi_y+k_4\varphi_{yy})\mathbf{b_1}-$$
$$- k_3\varphi_x\mathbf{b_{1x}}-k_4\varphi_y\mathbf{b_{1y}}+((k_1-k_2)\mathbf{b_{1y}}+k_4\varphi_{xy})\mathbf{a_1}= 0. \qquad (10)$$

Из равенств (7) и (8) найдем a_1 и b_1:

$$a_1=\frac{f_1-q_1b_1}{p_1},\ b_1=\frac{f_1-p_1a_1}{q_1},$$

где $p_1=a_2k_{1x}+(k_1-k2)b_{2y}$, $q_1=(a_2b_{1y}+(k_1-k_2)b_{2y}$, ; $f_1=(a_2-b_2)_x+(a2-b_2)_y+(k_2-k_1)(a_2-b_2)$.

В предположении, что $p_1\neq 0$, $q_1\neq 0$, из равенств (9) и (10) получаем условия в виде дифференциальных уравнений в частных производных на неизвестные функции $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{b_1}$:

$$a_2((k_2-k_1)\mathbf{a_1}+k_3\varphi_x)_{xx}+2a_2(b_0-k_1a_0)_x+b_2(k_3\varphi_x)_{yy}+k_{2x}\mathbf{a}^2\mathbf{_1}+(k_{3x}\varphi_x+k_3\varphi_{xx})\mathbf{a_1}-$$
$$- k_3\varphi_x a_{1y}-k_4\varphi_y\mathbf{a_{1y}}+((k_2-k_1)\mathbf{a_{1y}}- k_3\varphi_{xx})\ \frac{f_1-p_1a_1}{q_1} = 0,$$

$$b_2((k_1-k_2)\mathbf{b_1}+k_4\varphi_y)_{yy}+2b_2(b_0-k_2a_0)_y+a_2(k_4\varphi_y)_{xx}+k_{1y}\mathbf{b}^2\mathbf{_1}+$$
$$+(k_{4y}\varphi_y+k_4\varphi_{yy})\mathbf{b_1}-k_3\varphi_x\mathbf{b_{1x}}-k_4\varphi_y\mathbf{b_{1y}}\ +((k_1-k_2)\mathbf{b_{1y}}+k_4\varphi_{xy})\ \frac{f_1-q_1b_1}{p_1},= 0.$$

Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальные операторы $P = \partial_x^2 +2u_x\partial_x +u,\quad L = \partial_y + v$,

где $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ — некоторые гладкие функции.

Вычислим коммутатор $[P,L] = P\circ L - L\circ P$.

$$P\circ L = \partial_x^2\partial_y + v_{xx} + 2v_x\partial_x + v\partial_x^2 + 2u_x\partial_x\partial_y + 2u_xv_x + 2u_xv\partial_x + u\partial_y + uv,$$

$$L\circ P = \partial_y\partial_x^2 +2u_{xy}\partial_y + 2u_x\partial_x\partial_y + u_y + u\partial_y + v\partial_x^2 + 2u_xv\partial_x + vu.$$

Следовательно, $[P,L] = v_{xx} + 2u_xv_x - u_y + 2(v_x - u_{xy})\partial_x$

Условие $[P,L] = 0$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} v_x = u_{xy} \\ v_{xx} + 2u_xv_x - u_y = 0, \end{cases}$$

Откуда следует, что $u_{xxy}+(u_x^2)_y - u_y = 0$ или

$$u_{xx} + u_x^2 - u = f(x), \qquad (11)$$

где $f(x)$ – некоторая гладкая функция от x.

Уравнение (11) в обыкновенном случае встречается при исследовании вынужденных затухающих малых колебаний, если затухание пропорционально квадрату скорости [2. с. 491].

В частности, при $f(x)\equiv 0$, полагая $w(u)=u_x^2$, получаем линейное уравнение $w'+2w-2u=0$, отсюда следует

$$u'^2=ce^{-2y}-1/2(1-y), \qquad (12)$$

$x=c_1+\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, где Y – правая часть равенства (12).

Пример 2. Рассмотрим дифференциальные операторы

$$P=\partial_x^2 +2u_x\partial_x+u,\quad L=\partial_x+\partial_y+v,$$

где $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ – некоторые гладкие функции

Вычислим коммутатор $[P,L]=P\circ L - L\circ P$.

$P\circ L=\partial_x^3+\partial_x^2+\partial_y+v_{xx}+2v_x\partial_x+v\partial_x^2+2u_x\partial_x^2+2u_x\partial_x\partial_y+2u_xv_x+2vu_x\partial_x+u\partial_x+u\partial_y+uv,$

$L\circ P=\partial_x^3+2u_{xx}\partial_x+2u_x\partial_x^2+u_x+u\partial_x+\partial_y\partial_x^2-2u_{xy}\partial_x+2u_x\partial_x\partial_y+uy+u\partial_y+v\partial_x^2u_x\partial_x+uv.$

Следовательно, $[P,L]=v_{xx}+2u_xv_x-u_x-u_y+2(v_x-u_{xx}-u_{xy})\partial_x$

Условие $[P,L]=0$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} v_x=u_{xx}+u_{xy} \\ v_{xx}+2u_xv_x-u_x-u_y=0, \end{cases}$$

отсюда следует, что

$$(u_{xx}+u_x^2-u)_x+(u_{xx}+u_y^2-u)_y=0 \tag{13}$$

Интегрируя уравнение (13), получаем $u_{xx}+u_x^2-u=f(y-x)$, где $f(y-x)$ – произвольная функция.

Таким образом, добавление оператора ∂_y в оператор L приводит к изменению вынужденной силы: $f(x)\longrightarrow f(y-x)$.

Пример 3. Рассмотрим дифференциальные операторы

$L=u\partial+u^2+a(x),\quad P=u^2\partial^2-uu'\partial-uu''+u'^2,$

где $a=a(t)$ – некоторая гладкая функция, $u=u(t)$ – неизвестная функция

Тогда условие $[L,P]=0$ равносильно уравнению Риккати:

$$u'+u^2+a(t)=0 \tag{14}$$

Доказательство: Вычислим:

$$L\circ P=2u^2u'\partial^2+u^3\partial^3-u(uu')'\partial-u^2u'\partial^2-u(-uu''+u'^2)+u(-uu''+u'^2)\partial+(u^2+a)u^2\partial^2-$$
$$-(u^2+a)uu'\partial+(u^2+a)(-uu''+u'^2)$$
$$P\circ L=u^2u''\partial+2u^2u'\partial^2+u^3\partial^3+u^2(u^2+a)''+2u^2(u^2+a)'\partial+u^2(u^2+a)\partial^2-uu'^2\partial-u^2u'\partial^2-$$
$$-uu'(u^2+a)'-uu'(u^2+a)\partial+(-uu''+u'^2)u\partial+(-uu''+u'^2)(u^2+a)$$

Вычислим коммутатор:

$$[L,P]=-2u^2(u'+u^2+a)\partial,$$

откуда следует уравнение Риккати (14)

Теорема 1. Пусть $u(x)$ – решение уравнения Риккати

$$u'+u^2+a(t)=0$$

Тогда линейное уравнение

$$u^2y''-uu'y'+(-uu''+u'^2)y=0 \tag{15}$$

Интегрируется в конечном виде:

$$y=c_1u+c_2u\int\frac{dt}{u^2} \tag{16}$$

Доказательство:

Из уравнения (15) следует, что $y''-\frac{u'}{u}y'-\left(\frac{u'}{u}\right)'y=0$ или $y'-\left(\left(\frac{u'}{u}\right)y\right)'=0,\quad y'-\frac{u'}{u}y=c_2$

откуда следует равенство (16).

Пример 4. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L=u^{1-n}\partial_x^2+a(x)$$

где $a(x)$ – некоторая гладкая функция.

Найдём корень квадратный из оператора L.

Пусть $\lambda=u^{\frac{1-n}{2}}\xi+a_o+a_{-1}\xi^{-1}+a_{-2}\xi^{-2}+\ldots$ – ряд Лорана от свободной переменной ξ [3].

Определим умножение рядов по правилу:

$$\lambda\circ\lambda=\lambda\cdot\lambda+\lambda'_x\lambda'_\xi+\frac{1}{2}\lambda''_{xx}\lambda''_{\xi\xi}+\ldots+\frac{1}{n!}\lambda^{(n)}_{x\ldots x}\lambda^{(n)}_{\xi\ldots\xi}+\ldots$$

Из условия $\lambda\cdot\lambda = u^{1-n}\xi^2 + a(x)$, находим коэффициенты $a_0, a_{-1}, \ldots$

$$2u^{\frac{1-n}{2}}a_0+u^{\frac{1-n}{2}}(u^{\frac{1-n}{2}})'=0,$$

$$a_0^2+2u^{\frac{1-n}{2}}a_{-1}+u^{\frac{1-n}{2}}a_0=a(x),$$

$$2a_0a_{-2}+2u^{\frac{1-n}{2}}a_{-2}+u^{\frac{1-n}{2}}a'_{-1}-a_{-1}(u^{\frac{1-n}{2}})'=0,$$

откуда следует, что

$$a_0=-\frac{1}{2}(u^{\frac{1-n}{2}})',\quad 2a_{-1}=a(x)-\frac{1}{4}(u^{\frac{1-n}{2}})'^2+\frac{1}{4}(u^{\frac{1-n}{2}})',\;\; 2a_{-2}=2(u^{\frac{1-n}{2}})'u^{\frac{1-n}{2}}a_{-1}-a'_{-1},\ldots$$

Аналогично можно найти остальные коэффициенты a_i.

Вычислим дробные степени оператора L.

$$L^{\circ 3/2}=\lambda\circ L=(u^{\frac{1-n}{2}}\xi+a_0+a_{-1}\xi^{-1}+a_{-2}\xi^{-2}+\ldots)(u^{\frac{1-n}{2}}\xi^2+a)+$$
$$+((u^{\frac{1-n}{2}})'\xi+a'_0+a'_{-1}\xi^{-1}+a'_{-2}\xi^{-2}+\ldots)\cdot 2u^{\frac{1-n}{2}}\xi+$$
$$+\frac{1}{2}((u^{\frac{1-n}{2}})''\xi+a''_0+a''_{-1}\xi^{-1}+a''_{-2}\xi^{-2}+\ldots)\cdot 2u^{\frac{1-n}{2}}=$$
$$=u^{\frac{3(1-n)}{2}}\xi^3+a_0u^{\frac{1-n}{2}}\xi^2+a_{-1}u^{\frac{1-n}{2}}\xi+a_{-2}u^{\frac{1-n}{2}}+a_{-3}u^{\frac{1-n}{2}}\xi^{-1}+\ldots+$$
$$+au^{\frac{1-n}{2}}\xi-aa_0+aa_{-1}\xi^{-1}+aa_{-2}\xi^{-2}+\ldots+$$
$$+2u^{\frac{1-n}{2}}(u^{\frac{1-n}{2}})'\xi^2+2u^{\frac{1-n}{2}}a'_0\xi+2u^{\frac{1-n}{2}}a'_{-1}+2u^{\frac{1-n}{2}}a'_{-2}\xi^{-1}+\ldots+$$
$$=u^{\frac{3(1-n)}{2}}\xi^3+(a_0u^{\frac{1-n}{2}}+2u^{\frac{1-n}{2}}(u^{\frac{1-n}{2}})')\xi^2+$$
$$+(a_{-1}u^{\frac{1-n}{2}}+au^{\frac{1-n}{2}}+2u^{\frac{1-n}{2}}a'_0+u^{\frac{1-n}{2}}(u^{\frac{1-n}{2}})'')\xi+$$
$$+a_{-2}u^{\frac{1-n}{2}}+aa_0+2u^{\frac{1-n}{2}}a'_{-1}+u^{\frac{1-n}{2}}a''_0+(a_{-3}u^{\frac{1-n}{2}}+aa_{-1}+2u^{\frac{1-n}{2}}a'_{-2}+u^{\frac{1-n}{2}}a''_{-1})\xi^{-1}+\ldots$$

Таким образом,

$$L_+^{\circ 3/2}=u^{\frac{3(1-n)}{2}}\partial^3+(a_0u^{\frac{1-n}{2}}+2u^{\frac{1-n}{2}}(u^{\frac{1-n}{2}})')\partial^2+$$
$$+(a_{-1}u^{\frac{1-n}{2}}+au^{\frac{1-n}{2}}+2u^{\frac{1-n}{2}}a'_0+u^{\frac{1-n}{2}}(u^{\frac{1-n}{2}})'')\partial+$$
$$+a_{-2}u^{\frac{1-n}{2}}+aa_0+2u^{\frac{1-n}{2}}a'_{-1}+u^{\frac{1-n}{2}}a''_0.$$

Аналогично можно найти остальные дробные степени.

Теорема 3. Пусть $u(x)$ – уравнения Эмдена-Фаулера

$$u''+a(x)u^n=0, \tag{17}$$

где $a(x)$ – некоторая гладкая функция, $n\in\boldsymbol{R}$.

Тогда линейное уравнение

$$u^{1-n}y''+a(x)y=0, \tag{18}$$

интегрируется в конечном виде:

$$y = C_1 u + C_2 u \int \frac{dx}{u^2}\,. \tag{19}$$

Доказательство. В самом деле, из уравнения (17) имеем: $a(x) = \frac{u''}{u^n}$

Подставляя *a(x)* в уравнение (18), получаем: $y'' - \frac{u''}{u} y = 0$, откуда следует равенство (19).

Л и т е р а т у р а

1. *Паланджянц Л.Ж.* Мультипликативный интеграл и некоторые его приложения. //Пространства над алгебрами и некоторые вопросы теории сетей. – Уфа, 1985. – С.160-163.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971.
3. *Паланджянц Л.Ж., Куижева С.К., Шевякова О.П.* О дробных степенях дифференциальных операторов //Труды ФОРА. –1997.– № 3. – С. 35-40.

On differential equations with commutative line differential operators

S.K. Kuigeva

The differential equations with commutative line differential operators first and second order are considered.

