О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА

С.К. Куижева

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

Для уравнения Аллера с постоянными коэффициентами рассматриваются некоторые краевые задачи.

Рассмотрим уравнение Аллера

$$u_t=(au_x+bu_{xt})_x, \qquad (A)$$

при условии, что a и b постоянные.

Уравнение (A) встречается в математическом моделировании явления переноса в живых системах, при условии, что учитывается скорость диффузионного процесса [1, 2].

Изучение уравнений с частными производными целесообразно начинать с уравнений с постоянными коэффициентами, в виду того, что такие уравнения могут иметь некорректные решения [3]. По аналогии с уравнением теплопроводности, имеющего некорректные решения, приведем пример некорректного решения для уравнения Аллера. Отметим, что в случае, когда a и b – заданные функции, вопрос о корректности решений уравнения (A) решен в работе [1]. Для удобства положим в уравнении (A) $a=1, b=\frac{1}{n^2}$.

Пример. Рассмотрим последовательность решений

$$u_n(x,t)=e^{-n}e^{-\frac{n^2}{2}t}\sin nx,\ t<0,\ 0\le x\le\pi,$$

удовлетворяющей условиям

$$u_n(0,t)=e^{-n}\sin nx.$$

Легко проверить, что $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(0,t)=0$, в то же самое время $u_n(x,t)$ при $t<0$ неограничены.

В работе [1] поставлено ряд краевых задач для уравнения (A). Рассмотрим несколько стандартных задач для него.

1. О задаче Самарского для уравнения теплопроводности.

Задача Самарского [1]. Найти регулярное в области Ω решение уравнения

$$u_t=u_{xx}, \qquad (1)$$

непрерывное в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(0,t)=\tau(t),\ 0\le t\le T, \qquad (2)$$

$$\int_0^l u(\xi,t)d\xi=\mu(t),\ 0\le t\le T, \qquad (3)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l, \qquad (4)$$

где $\tau(t)$, $\mu(t)$ и $\varphi(t)$ – заданные непрерывные функции на $0\le t\le T$, $0\le x\le l$.

Покажем, что задачу Самарского для уравнения теплопроводности можно свести к краевой задаче для нагруженного уравнения параболического типа, содержащего некоторую произвольную функцию.

Предварительно докажем лемму.

Лемма 1. *Замена*

$$v(x,t)=k(-x)u(x,t)+\int_0^x u(\xi,t)d\xi \qquad (5)$$

обращается по формуле

$$u(x,t)=\frac{1}{k(-x)}v(x,t)-\int_0^x\frac{1}{k^2(-\xi)}v(\xi,t)d\xi\ , \tag{6}$$

где $k = k(-x)$ *– некоторая гладкая функция на* $0\le x\le l$.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$v(x,t)=k(-x)u(x,t)+\int_0^x u(\xi,t)d\xi \tag{7}$$

$$u(x,t)=pv(x,t)+\int_0^x qv(\xi,t)d\xi\ , \tag{8}$$

где p и q – некоторые гладкие функции на $0\le x\le l$.

Подставляя равенство (7) в равенство (8), получаем

$$u=pku+p\int_0^x ud\xi+\int_0^x qkud\xi+\int_0^x q\int_0^\xi ud\xi d\xi \tag{9}$$

Интегрируя по частям третье и четвертое слагаемое в равенстве (9), получаем

$$u=pku+(p+qk)\int_0^x ud\xi+\int_0^x (q-(qk)_x)\int_0^\xi ud\xi d\xi \tag{10}$$

Положим $pk=1$, $p+qk=0$, $q-(qk)_x=0$, откуда следует, что $p=\frac{1}{k}$, $q=-\frac{1}{k^2}$.

Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Задача Самарского* (1) – (4) *сводится к краевой задаче*

$$v(0,t) = \tau(t),\ 0\le t\le T, \tag{11}$$

$$v(l,t) = \mu(t),\ 0\le t\le T, \tag{12}$$

$$v(x,0)=k(-x)\varphi(x)+\int_0^x\varphi(\xi)d\xi \tag{13}$$

для уравнения

$$\begin{aligned} v_t&=v_{xx}+\frac{2k_x-1}{k}v_x+\frac{1}{k^2}(-kk_{xx}+2k_x^2-3k_x+1)v+k_{xx}\int_0^x\frac{1}{k^2}vd\xi+\\ &+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x\left(\frac{1}{k^2}v-\int_0^\xi\frac{1}{k^2}vd\xi\right)d\xi \end{aligned} \tag{14}$$

Доказательство. Из равенство (6) имеем $u_x=(\frac{1}{k})_x v+\frac{1}{k}v_x-\frac{1}{k^2}v$.

Дифференцируя равенство (5) по t и два раза по x, получаем

$$v_t=ku_t+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x ud\xi\ ,$$

$$v_{xx}=k_{xx}u+(1-2k_x)u_x+ku_{xx}\ ,$$

откуда следует, что

$$v_t-v_{xx}=k(u_t-u_{xx})-k_{xx}u+(2k_x-1)u_x\ . \tag{15}$$

Подставляя в равенство (15) значение u по формуле (6), получим уравнение (14). Теорема 1 доказана.

2. О задаче Самарского для уравнения Аллера.

Найти регулярное в области Ω решение уравнения

$$u_t=u_{xx}+u_{xxt}, \tag{16}$$

непрерывное в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(0,t)=\tau(t),\ 0\le t\le T, \tag{17}$$

$$\int_0^l u(\xi,t)d\xi=\mu(t),\ 0\le t\le T, \tag{18}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l, \tag{19}$$

где $\tau(t)$, $\mu(t)$ и $\varphi(t)$ – заданные непрерывные функции на $0\le t\le T$, $0\le x\le l$.

Покажем, что задачу Самарского для уравнения теплопроводности можно свести к краевой задаче для нагруженного уравнения параболического типа, содержащего некоторую произвольную функцию.

Теорема 2. *Задача Самарского (16) – (19) сводится к краевой задаче*

$$v(0,t)=\tau(t),\ 0\le t\le T, \tag{20}$$

$$v(l,t)=\mu(t),\ 0\le t\le T, \tag{21}$$

$$v(x,0)=k(-x)\varphi(x)+\int_0^x\varphi(\xi)d\xi \tag{22}$$

для уравнения

$$\begin{aligned}&(1-\frac{1}{k^2}(-kk_{xx}+2k_x^2-3k_x+1))v_t=v_{xx}+v_{xxt}+\frac{2k_x-1}{k}v_{xt}+\frac{2k_x-1}{k}v_x+\\&+\frac{1}{k^2}(-kk_{xx}+2k_x^2-3k_x+1)v+k_{xx}\int_0^x\frac{1}{k^2}vd\xi++\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x(\frac{1}{k^2}v-\int_0^\xi\frac{1}{k^2}vd\xi)d\xi\end{aligned} \tag{23}$$

Доказательство. Из равенство (6) имеем $u_x=(\frac{1}{k})_x v+\frac{1}{k}v_x-\frac{1}{k^2}v$

Дифференцируя равенство (5) по t и два раза по x,а затем еще раз по t, получаем

$$v_t=ku_t+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x ud\xi,$$

$$v_{xx}=k_{xx}u+(1-2k_x)u_x+ku_{xx},$$

$$v_{xxt}=k_{xx}u_t+(1-2k_x)u_{xt}+ku_{xxt},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}&v_t-v_{xx}-v_{xxt}=k(u_t-u_{xx}-u_{xxx})-k_{xx}u+(2k_x-1)u_x-k_{xx}u_t+(2k_x-1)u_{xt}+\\&+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x u(\xi,t)d\xi\end{aligned} \tag{24}$$

Подставляя в равенство (24) значение u по формуле (6), получим уравнение (23). Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии: Учеб. пособие для университетов. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

2. *Форлоу С.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
3. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 392 с.

On the boundary value problems for Allers equation

S.K. Kuigeva

Some boundary value problems for Allers equation with constant coefficients are considered.

