

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА

С.К. Куижева

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

Для уравнения Аллера с постоянными коэффициентами рассматриваются некоторые краевые задачи.

Рассмотрим уравнение Аллера

$$u_t = (au_x + bu_{xt})_x \quad (A)$$

при условии, что a и b постоянные.

Уравнение (A) встречается в математическом моделировании явления переноса в живых системах, при условии, что учитывается скорость диффузионного процесса [1, 2].

Изучение уравнений с частными производными целесообразно начинать с уравнений с постоянными коэффициентами, в виду того, что такие уравнения могут иметь некорректные решения [3]. По аналогии с уравнением теплопроводности, имеющего некорректные решения, приведем пример некорректного решения для уравнения Аллера. Отметим, что в случае, когда a и b – заданные функции, вопрос о корректности решений уравнения (A) решен в работе [1]. Для удобства положим в уравнении (A) $a = 1$, $b = \frac{1}{n^2}$.

Пример. Рассмотрим последовательность решений

$$u_n(x, t) = e^{-n} e^{-\frac{n^2}{2}t} \sin nx, \quad t < 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

удовлетворяющей условиям

$$u_n(0, t) = e^{-n} \sin nx.$$

Легко проверить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0, t) = 0$, в то же самое время $u_n(x, t)$ при $t < 0$ неограничены.

В работе [1] поставлено ряд краевых задач для уравнения (A). Рассмотрим несколько стандартных задач для него.

1. О задаче Самарского для уравнения теплопроводности.

Задача Самарского [1]. Найти регулярное в области Ω решение уравнения

$$u_t = u_{xx} \quad (1)$$

непрерывное в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = \tau(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$\int_0^l u(\xi, t) d\xi = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

где $\tau(t)$, $\mu(t)$ и $\varphi(x)$ – заданные непрерывные функции на $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq l$.

Покажем, что задачу Самарского для уравнения теплопроводности можно свести к краевой задаче для нагруженного уравнения параболического типа, содержащего некоторую произвольную функцию.

Предварительно докажем лемму.

Лемма 1. Замена

$$v(x, t) = k(-x)u(x, t) + \int_0^x u(\xi, t) d\xi \quad (5)$$

обращается по формуле

$$u(x,t) = \frac{1}{k(-x)}v(x,t) - \int_0^x \frac{1}{k^2(-\xi)}v(\xi,t)d\xi, \quad (6)$$

где $k = k(-x)$ – некоторая гладкая функция на $0 \leq x \leq l$.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$v(x,t) = k(-x)u(x,t) + \int_0^x u(\xi,t)d\xi \quad (7)$$

$$u(x,t) = pv(x,t) + \int_0^x qv(\xi,t)d\xi, \quad (8)$$

где p и q – некоторые гладкие функции на $0 \leq x \leq l$.

Подставляя равенство (7) в равенство (8), получаем

$$u = pku + p \int_0^x u d\xi + \int_0^x qkud\xi + \int_0^x q \int_0^\xi u d\xi d\xi \quad (9)$$

Интегрируя по частям третье и четвертое слагаемое в равенстве (9), получаем

$$u = pku + (p + qk) \int_0^x u d\xi + \int_0^x (q - (qk)_x) \int_0^\xi u d\xi d\xi \quad (10)$$

Положим $pk=1$, $p + qk = 0$, $q - (qk)_x = 0$, откуда следует, что $p = \frac{1}{k}$, $q = -\frac{1}{k^2}$.

Лемма 1 доказана.

Теорема 1. Задача Самарского (1) – (4) сводится к краевой задаче

$$v(0,t) = \tau(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11)$$

$$v(l,t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (12)$$

$$v(x,0) = k(-x)\varphi(x) + \int_0^x \varphi(\xi)d\xi \quad (13)$$

для уравнения

$$v_t = v_{xx} + \frac{2k_x - 1}{k}v_x + \frac{1}{k^2}(-kk_{xx} + 2k_x^2 - 3k_x + 1)v + k_{xx} \int_0^x \frac{1}{k^2}v d\xi + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \left(\frac{1}{k^2}v - \int_0^\xi \frac{1}{k^2}v d\xi \right) d\xi \quad (14)$$

Доказательство. Из равенство (6) имеем $u_x = \left(\frac{1}{k}\right)_x v + \frac{1}{k}v_x - \frac{1}{k^2}v$.

Дифференцируя равенство (5) по t и два раза по x , получаем

$$v_t = ku_t + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x u d\xi,$$

$$v_{xx} = k_{xx}u + (1 - 2k_x)u_x + ku_{xx},$$

откуда следует, что

$$v_t - v_{xx} = k(u_t - u_{xx}) - k_{xx}u + (2k_x - 1)u_x. \quad (15)$$

Подставляя в равенство (15) значение u по формуле (6), получим уравнение (14). Теорема 1 доказана.

2. О задаче Самарского для уравнения Аллера.

Найти регулярное в области Ω решение уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{xxt}, \quad (16)$$

непрерывное в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = \tau(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (17)$$

$$\int_0^l u(\xi, t) d\xi = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (18)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (19)$$

где $\tau(t)$, $\mu(t)$ и $\varphi(x)$ – заданные непрерывные функции на $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq l$.

Покажем, что задачу Самарского для уравнения теплопроводности можно свести к краевой задаче для нагруженного уравнения параболического типа, содержащего некоторую произвольную функцию.

Теорема 2. Задача Самарского (16) – (19) сводится к краевой задаче

$$v(0,t) = \tau(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (20)$$

$$v(l,t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (21)$$

$$v(x,0) = k(-x)\varphi(x) + \int_0^x \varphi(\xi) d\xi \quad (22)$$

для уравнения

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{k^2}(-kk_{xx} + 2k_x^2 - 3k_x + 1)\right)v_t = v_{xx} + v_{xxt} + \frac{2k_x - 1}{k}v_{xt} + \frac{2k_x - 1}{k}v_x + \\ + \frac{1}{k^2}(-kk_{xx} + 2k_x^2 - 3k_x + 1)v + k_{xx} \int_0^x \frac{1}{k^2}v d\xi + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \left(\frac{1}{k^2}v - \int_0^\xi \frac{1}{k^2}v d\xi\right) d\xi \end{aligned} \quad (23)$$

Доказательство. Из равенство (6) имеем $u_x = \left(\frac{1}{k}\right)_x v + \frac{1}{k}v_x - \frac{1}{k^2}v$

Дифференцируя равенство (5) по t и два раза по x , а затем еще раз по t , получаем

$$v_t = ku_t + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x u d\xi,$$

$$v_{xx} = k_{xx}u + (1 - 2k_x)u_x + ku_{xx},$$

$$v_{xxt} = k_{xx}u_t + (1 - 2k_x)u_{xt} + ku_{xxt},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} - v_{xxt} = k(u_t - u_{xx} - u_{xxt}) - k_{xx}u + (2k_x - 1)u_x - k_{xx}u_t + (2k_x - 1)u_{xt} + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x u(\xi, t) d\xi \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя в равенство (24) значение u по формуле (6), получим уравнение (23). Теорема 2 доказана.

Л и т е р а т у р а

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии: Учеб. пособие для университетов. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

2. *Форлоу С.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
3. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 392 с.

On the boundary value problems for Allers equation

S.K. Kuigeva

Some boundary value problems for Allers equation with constant coefficients are considered.