# ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПРОТОЧНОГО КУЛЬТИВАТОРА С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

**Л.Ж. Паланджянц, О.П. Шевякова**

*Майкопский государственный технологический институт, Майкоп*

Проводится анализ решений дифференциального уравнения Абеля.

Перейдем к рассмотрению дифференциального уравнения Абеля с переменными коэффициентами.

$$y' = y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x), \tag{1}$$

где функции *b(x), c(x)* и *d(x)* - непрерывны во всей области существования решения уравнения. (1). Предположим, что уравнение

$$y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x) = 0 \tag{2}$$

имеет вещественные корни $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x),$ т.е. уравнение (1.3.1) можно записать в виде

$$y' = (y-\alpha_1)(y-\alpha_2)(y-\alpha_3). \quad . \tag{3}$$

Возможны также случаи

$$y' = (y-\alpha_1)^2(y-\alpha_2) \tag{4}$$

$$y' = (y-\alpha_1)^3 \tag{5}$$

$$y' = (y-\alpha_1)(y^2 + m(x)y + n(x)) \tag{6}$$

Повсюду будем предполагать, что

$$\alpha_1(x) < \alpha_2(x) < \alpha_3(x).$$

В известной модели проточного культиватора [1] происходит размножение бактериальных клеток и их гибель. Дифференциальное уравнение, описывающее динамику концентраций живых клеток, имеет вид

$$U' = f(t) - b(t)U - c(t)U^2,$$

где $f(t)$-скорость притока клеток извне в культиватор, $b(t)$ и $c(t)$-соответственно коэффициенты размножения и гибели клеток.

Если учесть фактор столкновения клеток по три, другими словами, фактор «третьего лишнего», то соответствующее дифференциальное уравнение примет вид

$$U' = f(t) - b(t)\cdot U - c(t)\cdot U^2 - a(t)\cdot U^3,$$

где $a(t)$-коэффициент фактора «третьего лишнего».

Проведем качественный анализ этого уравнения в зависимости от корней кубического уравнения $f(t) - b(t)\cdot U - c(t)\cdot U^2 - a(t)\cdot U^3 = 0$ .

Установлено, что при определенных начальных условиях уравнение (6) имеет три семейства ограниченных решений. Это означает, что при этих условиях число клеток в проточном культиваторе остается близким к некоторому числу. Кроме того, найдены начальные условия, при выполнении которых число клеток в проточном культиваторе неограниченно возрастает.

А). Пусть имеем случай (5) и функция $y = \alpha_1(x)$ ограничена

$$m_1 \le \alpha_1(x) \le M_1,$$

где $m_1$ и $M_1$ - постоянные.

Исследуем поведения решения уравнения (5) в общем случае [2].

Рассмотрим решение уравнения (5) при условии $y(x_0) = y_0 > M_1$. Так как

$$\alpha_1(x) \le M_1$$
$$-\alpha_1(x) \ge -M_1$$
$$y - \alpha_1(x) \ge y - M_1 > 0, \quad (y-\alpha_1)^3 \ge (y-M_1)^3$$

Отсюда следует, что если $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ решение уравнения

$$\tilde{y}' = (\bar{y} - M_1)^3 \tilde{y}(x_0) = y_0,$$ то будет

$y' \ge \tilde{y}'$ и, следовательно, при $x\text{-}x_0 > 0$ имеем $y(x) \ge \tilde{y}(x)$

В самом деле, поскольку

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0),$$
$$\bar{y} - y_0 = \bar{y}_0'(x - x_0),$$

$(y - \tilde{y}) = (x - x_0)(y_0' - \tilde{y}_0'),$ так как $x - x_0 > 0, y_0' - \tilde{y}_0' \ge 0,$ то

$$y - \tilde{y} \ge 0, \; y(x) \ge \tilde{y}(x).$$

Так как $\tilde{y}(x) \to +\infty, x \to \tilde{x}_1,$ то

$$y(x) \to +\infty\,, x \to x_1 - 0 \tag{7}$$

Очевидно, при $x < x_0$ имеем $y(x) < y_0$, так как при уменьшении $x$ $y(x)$ убывает

Так как

$$m_1 \le \alpha_1(x)$$
$$-m_1 \ge \alpha_1$$
$$y - m_1 \ge y - \alpha_1(x) > 0$$
$$(y-\alpha_1)^3 \le (y - m_1)^3$$

Отсюда следует, что если $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ решение уравнения

$$\tilde{y}' = (\tilde{y} - m_1)^3 \tilde{y}(x_0) = y_0,$$ то будет

$y' \le \tilde{y}'$ и, следовательно, при $x\text{-}x_0 < 0$ имеем $\tilde{y}(x) \le y(x)$

Так как

$$\tilde{y}(x) \to m_1\,, x \to -\infty, \text{ то и } \quad y(x) \to m_0 \ge m_1, x \to -\infty\,. \tag{8}$$

Доказана теорема 1.3.1:

*Все решения уравнения, подчинённые условию*
*$y(x) = y_0 > M_1$ обладают свойствами (7) и (8).*

Рассмотрим решение уравнения (5) с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0 < m_1 \tag{9}$$

Интегрируя равенство (5) в промежутке $(x_0, x)$, получаем

$$y = y_0 + \int_{f_0}^{x} (y - \alpha_1(x))^3 dx$$

Зададимся вопросом, существует ли непрерывное решение с условиями (9) такое, что при

$$x \to -\infty\,, y(x) < m_1 \le \alpha_1(x).$$

Покажем, что это невозможно.

Так как $\alpha_1(x) \le M_1$

$$-\alpha_1(x) \ge -M_1$$
$$y - \alpha_1(x) \ge y - M_1$$

Поскольку обе части неравенства отрицательны, то верно неравенство

$$(y-\alpha_1)^3 \ge (y - M)^3$$

Теперь, предположив, что $(y-M_1)^3 \geq -b^2$, получаем

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} (y-\alpha_1)^3\, dx \geq y_0 + \int_{x_0}^{x} (y-M_1)^3\, dx \geq y_0 - b^2(x-x_0),$$

откуда следует, что при некотором $x < x_0$ будет $y > \alpha_1(x)$, что противоречит предположению. Очевидно, рассматриваемое решение либо обладает свойством

$$y(x) - \alpha_1(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty. \tag{10}$$

либо существует такое $x = x_1$, что

$$y(x_1) - \alpha_1(x_1) > 0 \tag{11}$$

Если имеем (10), то это решение ограничено при $x \to -\infty$.

Если же имеем (11), то решение $y(x)$ пересекая $\alpha_1(x)$ попадает в область, где $y'(x) > 0$ и убывая оно либо стремится к какому-то постоянному значению $b_1$, либо вновь уйдёт в область, где $y'(x) < 0$ в случае, если угловой коэффициент решения будет больше углового коэффициента кривой $\alpha_1(x)$, то есть при условии $y'(x) > \alpha_1'(x)$.

И в том и в другом случаях решение будет ограничено при $x \to -\infty$.

В этом случае, очевидно, что $m_0 > \alpha_1(x)$ и $m_0 > b_1$, ибо в противном случае может оказаться, что и решение пересекающее $\alpha_1(x)$, пересекало бы, возможно и решение с начальными условиями $y_0 > M_1$, стремящиеся к $m_0$ $x \to -\infty$, что противоречило бы существованию и единственности уравнения (5).

Рассмотрим это решение при $x > x_0$.

Очевидно, при $x > x_0$ имеем $y(x) < y_0$, так как при увеличении $x$ и $y(x)$ убывает. Так как

$$m_1 \leq \alpha_1(x)$$

$$-m_1 \geq -\alpha_1(x)$$

$$y - m_1 \geq y - \alpha_1(x)$$

Поскольку обе части неравенства отрицательны, то верно и неравенство

$$(y - \alpha_1(x))^3 \leq (y - m_1)^3$$

Отсюда следует, что если $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$- решение уравнения $\tilde{y}' = (\tilde{y} - m_1)^3 \tilde{y}(x_0) = y_0$, то будет $y' \leq \tilde{y}'$ и, следовательно, при $x - x_0 > 0$ имеем $y(x) \leq \tilde{y}(x)$

Таким образом $y(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$, то и $\tilde{y}(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$.

Доказана теорема 2:

*Все решения уравнения (5), подчинённые условию (9) либо обладают свойством (10), либо пересекают кривую* $y = \alpha_1(x)$. *В обоих случаях решения ограничены при* $x \to -\infty$ *и* $y(x) \to -\infty$ *при* $x \to x_1 > x_0$.

Случаи (8), (9) и (11) исследуются аналогично.

**Литература**

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии: Учеб. пособие для университетов.– М.: Высш. Шк., 1995. – 301с.

2. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.

## Investigation of biological models with cube nonlinear

**L. Zh. Palandzhyants, O. P. Shevyakova**

The solutions of Abel differential equations with variable coefficients are given.

 