

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПРОТОЧНОГО КУЛЬТИВАТОРА С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Л.Ж. Паланджянц, О.П. Шевякова

Майкопский государственный технологический институт, Майкоп

Проводится анализ решений дифференциального уравнения Абеля.

Перейдем к рассмотрению дифференциального уравнения Абеля с переменными коэффициентами.

$$y' = y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x), \quad (1)$$

где функции $b(x)$, $c(x)$ и $d(x)$ - непрерывны во всей области существования решения уравнения. (1).

Предположим, что уравнение

$$y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x) = 0 \quad (2)$$

имеет вещественные корни $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)$, т.е. уравнение (1.3.1) можно записать в виде

$$y' = (y - \alpha_1)(y - \alpha_2)(y - \alpha_3). \quad (3)$$

Возможны также случаи

$$y' = (y - \alpha_1)^2(y - \alpha_2) \quad (4)$$

$$y' = (y - \alpha_1)^3 \quad (5)$$

$$y' = (y - \alpha_1)(y^2 + m(x)y + n(x)) \quad (6)$$

Повсюду будем предполагать, что

$$\alpha_1(x) < \alpha_2(x) < \alpha_3(x).$$

В известной модели проточного культиватора [1] происходит размножение бактериальных клеток и их гибель. Дифференциальное уравнение, описывающее динамику концентраций живых клеток, имеет вид

$$U' = f(t) - b(t)U - c(t)U^2,$$

где $f(t)$ - скорость притока клеток извне в культиватор, $b(t)$ и $c(t)$ - соответственно коэффициенты размножения и гибели клеток.

Если учесть фактор столкновения клеток по три, другими словами, фактор «третьего лишнего», то соответствующее дифференциальное уравнение примет вид

$$U' = f(t) - b(t) \cdot U - c(t) \cdot U^2 - a(t) \cdot U^3,$$

где $a(t)$ - коэффициент фактора «третьего лишнего».

Проведем качественный анализ этого уравнения в зависимости от корней кубического уравнения $f(t) - b(t) \cdot U - c(t) \cdot U^2 - a(t) \cdot U^3 = 0$.

Установлено, что при определенных начальных условиях уравнение (6) имеет три семейства ограниченных решений. Это означает, что при этих условиях число клеток в проточном культиваторе остается близким к некоторому числу. Кроме того, найдены начальные условия, при выполнении которых число клеток в проточном культиваторе неограниченно возрастает.

А). Пусть имеем случай (5) и функция $y = \alpha_1(x)$ ограничена

$$m_1 \leq \alpha_1(x) \leq M_1,$$

где m_1 и M_1 - постоянные.

Исследуем поведения решения уравнения (5) в общем случае [2].

Рассмотрим решение уравнения (5) при условии $y(x_0) = y_0 > M_1$. Так как

$$\begin{aligned}\alpha_1(x) &\leq M_1 \\ -\alpha_1(x) &\geq -M_1 \\ y - \alpha_1(x) &\geq y - M_1 > 0, \quad (y - \alpha_1)^3 \geq (y - M_1)^3\end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ решение уравнения

$$\tilde{y}' = (\bar{y} - M_1)^3 \tilde{y}(x_0) = y_0, \text{ то будет}$$

$y' \geq \tilde{y}'$ и, следовательно, при $x - x_0 > 0$ имеем $y(x) \geq \tilde{y}(x)$

В самом деле, поскольку

$$\begin{aligned}y - y_0 &= y'_0(x - x_0), \\ \bar{y} - y_0 &= \bar{y}'_0(x - x_0), \\ (y - \tilde{y}) &= (x - x_0)(y'_0 - \tilde{y}'_0), \text{ так как } x - x_0 > 0, y'_0 - \tilde{y}'_0 \geq 0, \text{ то} \\ y - \tilde{y} &\geq 0, \quad y(x) \geq \tilde{y}(x).\end{aligned}$$

Так как $\tilde{y}(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow \tilde{x}_1$, то

$$y(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_1 - 0 \quad (7)$$

Очевидно, при $x < x_0$ имеем $y(x) < y_0$, так как при уменьшении x $y(x)$ убывает

Так как

$$\begin{aligned}m_1 &\leq \alpha_1(x) \\ -m_1 &\geq \alpha_1 \\ y - m_1 &\geq y - \alpha_1(x) > 0 \\ (y - \alpha_1)^3 &\leq (y - m_1)^3\end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ решение уравнения

$$\tilde{y}' = (\tilde{y} - m_1)^3 \tilde{y}(x_0) = y_0, \text{ то будет}$$

$y' \leq \tilde{y}'$ и, следовательно, при $x - x_0 < 0$ имеем $\tilde{y}(x) \leq y(x)$

Так как

$$\tilde{y}(x) \rightarrow m_1, x \rightarrow -\infty, \text{ то и } y(x) \rightarrow m_0 \geq m_1, x \rightarrow -\infty. \quad (8)$$

Доказана теорема 1.3.1:

Все решения уравнения, подчинённые условию $y(x) = y_0 > M_1$ обладают свойствами (7) и (8).

Рассмотрим решение уравнения (5) с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0 < m_1 \quad (9)$$

Интегрируя равенство (5) в промежутке (x_0, x) , получаем

$$y = y_0 + \int_{f_0}^x (y - \alpha_1(x))^3 dx$$

Зададимся вопросом, существует ли непрерывное решение с условиями (9) такое, что при $x \rightarrow -\infty, y(x) < m_1 \leq \alpha_1(x)$.

Покажем, что это невозможно.

Так как $\alpha_1(x) \leq M_1$

$$-\alpha_1(x) \geq -M_1$$

$$y - \alpha_1(x) \geq y - M_1$$

Поскольку обе части неравенства отрицательны, то верно неравенство

$$(y - \alpha_1)^3 \geq (y - M)^3$$

Теперь, предположив, что $(y - M_1)^3 \geq -b^2$, получаем

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x (y - \alpha_1)^3 dx \geq y_0 + \int_{x_0}^x (y - M_1)^3 dx \geq y_0 - b^2(x - x_0),$$

откуда следует, что при некотором $x < x_0$ будет $y > \alpha_1(x)$, что противоречит предположению. Очевидно, рассматриваемое решение либо обладает свойством

$$y(x) - \alpha_1(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (10)$$

либо существует такое $x = x_1$, что

$$y(x_1) - \alpha_1(x_1) > 0 \quad (11)$$

Если имеем (10), то это решение ограничено при $x \rightarrow -\infty$.

Если же имеем (11), то решение $y(x)$ пересекая $\alpha_1(x)$ попадает в область, где $y'(x) > 0$ и убывая оно либо стремится к какому-то постоянному значению b_1 , либо вновь уйдёт в область, где $y'(x) < 0$ в случае, если угловой коэффициент решения будет больше углового коэффициента кривой $\alpha_1(x)$, то есть при условии $y'(x) > \alpha_1'(x)$.

И в том и в другом случаях решение будет ограничено при $x \rightarrow -\infty$.

В этом случае, очевидно, что $m_0 > \alpha_1(x)$ и $m_0 > b_1$, ибо в противном случае может оказаться, что и решение пересекающее $\alpha_1(x)$, пересекало бы, возможно и решение с начальными условиями $y_0 > M_1$, стремящиеся к m_0 $x \rightarrow -\infty$, что противоречило бы существованию и единственности уравнения (5).

Рассмотрим это решение при $x > x_0$.

Очевидно, при $x > x_0$ имеем $y(x) < y_0$, так как при увеличении x и $y(x)$ убывает. Так как

$$\begin{aligned} m_1 &\leq \alpha_1(x) \\ -m_1 &\geq -\alpha_1(x) \\ y - m_1 &\geq y - \alpha_1(x) \end{aligned}$$

Поскольку обе части неравенства отрицательны, то верно и неравенство

$$(y - \alpha_1(x))^3 \leq (y - m_1)^3$$

Отсюда следует, что если $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ - решение уравнения $\tilde{y}' = (\tilde{y} - m_1)^3 \tilde{y}(x_0) = y_0$, то будет $y' \leq \tilde{y}'$ и, следовательно, при $x - x_0 > 0$ имеем $y(x) \leq \tilde{y}(x)$

Таким образом $y(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$, то и $\tilde{y}(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$.

Доказана теорема 2:

Все решения уравнения (5), подчинённые условию (9) либо обладают свойством (10), либо пересекают кривую $y = \alpha_1(x)$. В обоих случаях решения ограничены при $x \rightarrow -\infty$ и $y(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow x_1 > x_0$.

Случаи (8), (9) и (11) исследуются аналогично.

Л и т е р а т у р а

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии: Учеб. пособие для университетов. – М.: Высш. Шк., 1995. – 301с.
2. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.

Investigation of biological models with cube nonlinear

L. Zh. Palandzhyants, O. P. Shevyakova

The solutions of Abel differential equations with variable coefficients are given.