1 9 9 9 г. **№ 4**

Труды ФОРА

ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ ДИХОТОМИЧНОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

В.А. Тешев, М.М. Шумафов

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

В статье получен частотный критерий дихотомичности нелинейных систем автоматического управления с гистерезисным элементом, удовлетворяющим условию «секториальности». В качестве примера рассматривается система второго порядка с гистерезисной нелинейностью.

1. ВВЕДЕНИЕ

В различных областях техники широко распространены устройства, описываемые системами дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями.

В настоящей статье рассматривается система

$$\dot{x} = Px + q\xi, \quad \sigma = r^* x, \tag{1.1}$$

$$\xi = \varphi[\sigma(t), \varphi_0]_t \tag{1.2}$$

где $x \in$ IR^n, P – гурвицева (nxn) – матрица, q, r – n – векторы, $\varphi[\sigma(t), \varphi_0]_t$ - значение (ветвь) гистерезисной функции.

Ниже всюду предполагается, что гистерезисная функция (1.2) сильно непрерывна и удовлетворяет следующему *условию «секториальности»*

$$0 \le \sigma(t) \cdot \varphi[\sigma(t), \varphi_0]_t \le \mu_0 \sigma(t)^2 \qquad (0 < \mu_0 \le +\infty). \tag{1.3}$$

Геометрически соотношение (1.3) означает, что график гистерезисной функции $\varphi[\sigma(t), \varphi_0]_t$ лежит в секторе $S[0, \mu_0] = \left\{(\sigma, \xi) \mid 0 \le \dfrac{\xi}{\sigma} \le \mu_0\right\}$.

Основная наша цель – получить частотный критерий дихотомичности системы (1.1), (1.2).

Изучению систем вида (1.1), (1.2) было посвящено большое количество работ, среди которых отметим в первую очередь основополагающие работы В.А. Якубовича [1], [2], Г.А. Леонова и М.Ю. Филиной [3], [4], А.М. Красносельского и А.В. Покровского [5],[6],[7], А.В. Покровского [8]. Исследованию различных свойств решений системы (1.1), (1.2) была посвящена диссертация М.Ю. Филиной [9].

Хорошо известно [2], что частное условие В.М. Попова остается справедливым и в случае гистерезисной нелинейности, если параметр, фигурирующий в условии В.М. Попова, имеет лишь определенный знак, зависящий от направления, в котором обходится петля гистерезиса.

В настоящей статье с помощью идей, изложенных в работах [10] - [13] получен *частотный критерий дихотомичности для систем вида* (1.1), (1.2) *с любым обходом петли гистерезиса.* При этом график гистерезисной функции может содержать несколько петель, которые обходятся независимо друг от друга в произвольном направлении.

Определения, используемых ниже понятий, можно найти в вышеуказанных работах (см., например [2],[7],[13]). Напомним некоторые из них.

Определение 1 [13]. *Комплекснозначная функция*

$$X(\lambda) = r^*(P - \lambda E_n)^{-1} q \tag{1.4}$$

где λ *– комплексная переменная,* E_n *– единичная матрица, называется передаточной функцией линейной части системы* (1.1),(1.2*) от входа* ξ *к выходу* $(-\sigma)$.

Определение 2 [13]. Функция

$$X(i\omega) = r^*(P - i\omega E_n)^{-1} q \tag{1.5}$$

где $\omega \in (-\infty, +\infty)$ *– вещественная переменная,* $i = \sqrt{-1},$ *называется частотной характеристикой линейной части системы* (1.1), (1.2).

Естественно, что в (1.4) и (1.5) значения переменных λ и $i\omega$ не должны совпадать с собственными значениями матрицы P. На остальной части плоскости комплексной переменной λ функция $X(\lambda)$ является аналитической и может быть восстановлена по значениям частотной характеристики $X(i\omega)$.

Определение 3 [13]. *Передаточная функция* $X(\lambda)$ *называется невырожденной, если её невозможно представить в виде отношения многочленов со степенью знаменателя меньше* n.

Определение 4 [13]. *Стационарным множеством системы (1.1), (1.2) называется множество* $\Lambda = \{(x_0, \xi_0) : Px_0 + q\xi_0 = 0, \varphi[c^* x_0, \xi_0]_t \equiv \xi_0\}$.

Определение 5 [13]. *Система (1.1), (1.2) называется дихотомичной, если любое ограниченное при* $t > t_0$, $t_0 \in R$, *решение стремится при* $t \to +\infty$ *к стационарному множеству.*

Таким образом, для дихотомичной системы справедлива альтернатива : любое решение либо не ограничено при $t > t_0$, либо стремится при $t \to +\infty$ к стационарному множеству. Отметим, что дихотомия является более слабым свойством, чем устойчивость, поскольку не предполагает отсутствия неограниченных решений. Однако, что весьма важно для приложений, дихотомичная система (как это видно из определения) не может иметь автоколебаний.

Определение 6 [2]. *Говорят, что гистерезисная функция* $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ *обладает свойством предельной непрерывности, если из соотношений* $\sigma(t) \to \sigma_*$, $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t \to \varphi_*$ *при* $t \to +\infty$ *следует, что* $\varphi_* \in E[\sigma_*]$ и $\varphi[\sigma_*, \varphi_*]_t \equiv \varphi_*$. *(Здесь* $E[\sigma_*]$ *означает некоторое подмножество из* R^1 *отвечающее числу* σ_**).*

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема. *Пусть в системе* (1.1), (1.2) *P – гурвицева матрица, передаточная функция* $X(\lambda)$ *невырождена, а гистерезисная функция* $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ *удовлетворяет соотношению* (1.3), *ограничена и обладает свойством предельной непрерывности.*

Далее, предположим, что выполнены следующие условия:

1*) существуют числа* $\delta > 0, \varepsilon > 0, \tau \geq 0$ и θ *такие, что справедливо неравенство*

$$\frac{\tau}{\mu_0} + Re(\tau + \theta\, i\omega)\chi(i\omega) \geq (\delta + \varepsilon\omega^2)|\chi(i\omega)|^2, \quad \forall \omega \geq 0; \tag{2.1}$$

2*) существует непрерывная функция* $F(\sigma)$ *и число* ν*, для которых*

$$\left|\varphi[\sigma(t), \varphi_0]_t - F(\sigma(t))\right| \leq \nu \cdot |\sigma(t)|; \tag{2.2}$$

3) $4\delta\varepsilon > (\theta\nu)^2$.

Тогда система (1.1), (1.2) *дихотомична.*

Приведем пример, иллюстрирующий сформулированную выше теорему.

Пример [2]. Рассмотрим систему 2-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta x - y, \\ \alpha \dot{y} = x - \xi, \quad \xi = \varphi[y, \varphi_0]_t \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ - константы.

Передаточная функция $X(\lambda)$ имеет вид $X(\lambda) = \dfrac{\lambda + \beta}{\alpha\lambda^2 + \alpha\beta\lambda + 1}$.

Учитывая, что $|X(i\omega)|^2 = \dfrac{\beta^2 + \omega^2\left[(1-\alpha\omega^2) - \alpha\beta^2\right]^2}{\left[(1-\alpha\omega^2) + \alpha^2\beta^2\omega^2\right]^2}$, частотное условие (2.1) принимает вид

$$\frac{\tau}{\mu_0} + \frac{\tau\beta + Q(\alpha\beta^2 - 1)\omega^2 + \alpha Q\omega^4}{(1-\alpha\omega^2)^2 + \alpha^2\beta^2\omega^2} \geq (\delta + \varepsilon\omega^2)\frac{\left[\beta(1-\alpha\omega^2) + \alpha\beta\omega^2\right]^2 + \left[\omega(1-\alpha\omega^2) - \alpha\beta^2\omega\right]^2}{\left[(1-\alpha\omega^2)^2 + \alpha^2\beta^2\omega^2\right]^2}. \tag{2.4}$$

Обозначая $\omega^2 = \eta$ и полагая в (2.4) $\tau = 1$, $\varepsilon = 1$, $\delta = \dfrac{1}{\beta}$ после элементарных вкладок приходим к условию $A_4\eta^4 + A_3\eta^3 + A_2\eta^2 + A_1\eta + A_0 \geq 0$, $\forall \eta \geq 0$, где $A_0 = \dfrac{1}{\mu_0}$;

$$A_1 = \alpha\left(\frac{2}{\mu_0} + \beta\right)(\alpha\beta^2 - 2) + (\alpha\beta^2 - 1)Q - \frac{1}{\beta}\left[\alpha\beta^2(\alpha\beta^2 - 2) + 1\right] - \beta^2;$$

$$A_2 = \left(\frac{6}{\mu_0} + \beta\right)\alpha^2 + \frac{\alpha^3\beta^2}{\mu_0}(\alpha\beta^2 - 4) + \alpha\left[1 + (\alpha\beta^2 - 1)(\alpha\beta^2 - 2)\right]Q - \left[1 + \alpha\beta^2(\alpha\beta^2 - 2) - \frac{2\alpha}{\beta}(\alpha\beta^2 - 1)\right];$$

$$A_3 = \frac{2}{\mu_0}\alpha^3(\alpha\beta^2 - 2) + \alpha^2(2\alpha\beta^2 - 3)Q - 2\alpha(\alpha\beta^2 - 1) - \frac{\alpha^2}{\beta};$$

$$A_4 = \frac{1}{\mu_0}\alpha^4 + \alpha^3 Q - \alpha^2.$$

Коэффициенты A_0, A_1, A_2, A_3 и A_4 неотрицательны при достаточно большом $Q > 0$ если

$$\begin{cases} 2\alpha\beta^2 - 3 > 0, \\ (\alpha\beta^2 - 1)(\alpha\beta^2 - 2) + 1 > 0, \\ \alpha\beta^2 - 1 > 0, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \alpha\beta^2 > \frac{3}{2}.$$

В качестве функции $F(\sigma)$ можно взять любую непрерывную функцию, график которой вне петель совпадает с графиком гистерезисной функции $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$, а внутри петель – например, с нижней кривой петли.

Таким образом, с учетом условия 3) теоремы получаем следующий результат для системы (2.3).

Утверждение. *Если выполнены условия* $\alpha\beta^2 > 3/2,\ 0 < \nu < \dfrac{2}{Q\cdot\sqrt{\beta}}$ *, то система (2.3) дихотомична в классе всех ограниченных и сильно непрерывных гистерезисных нелинейностей, удовлетворяющих условию «секториальности»* (1.3).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим *функцию*

$$V(x) = x^* Hx + Q\int_0^{\sigma} F(\eta)d\eta, \quad \sigma = r^* x, \tag{3.1}$$

где Q – некоторый параметр.

1. Постараемся *подобрать матрицу* $H = H^*$ и число Q так, чтобы было выполнено неравенство $\dot{V} < 0$. Дифференцируя (3.1) в силу систем (1.1), (1.2) получаем

$$\dot{V} = 2x^* H(Px + q\xi) + QF(\sigma)\dot{\sigma} = F(x,\xi) - \delta\sigma^2 - \varepsilon\dot{\sigma}^2 - Q[\xi - F]\dot{\sigma} - \tau\xi\left(\sigma - \frac{\xi}{\mu_0}\right), \tag{3.2}$$

где $F(x,\xi) = 2x^* H(Px + q\xi) + x^*(\varepsilon P^* rr^* P + \delta rr^*)x +$

$$+2x^*\left(\varepsilon P^* rr^* q + \frac{Q}{2}Pr + \frac{\tau}{2}Er\right)\xi + \left(\varepsilon(r^* q)^2 + Qr^* q - \frac{\tau}{\mu_0}\right)\xi^2 .$$

Здесь E – единичная (nxn) матрица.

В силу частотного условия (2.1) по лемме Якубовича-Калмана [13] существует симметричная, положительно-определенная матрица H такая, что будет выполнено неравенство

$$F(x,\xi) < 0 \quad \forall x \in R^n, \quad \forall \xi \in R^1 \quad (x \neq 0, \xi \neq 0).$$

Так как по условию P – гурвицева и $P^*rr^*P + \delta rr^* \geq 0$, то из той же леммы Якубовича-Калмана следует, что $H > 0$ (т.е. $x^*Hx^* > 0$).

Используя (1.2) и (2.2), получим из (3.2) оценку $\dot{V} \leq F(x,\xi) - h\left(\sigma, \dot{\sigma}\right)$, где $h\left(\sigma, \dot{\sigma}\right) = \delta\sigma^2 + \varepsilon\dot{\sigma}^2 - |\theta||v||\sigma|\left|\dot{\sigma}\right|$. В силу условия 3) доказываемой теоремы

$$h\left(\sigma, \dot{\sigma}\right) > 0 \quad \forall\left(\sigma, \dot{\sigma}\right) \neq (0;0).$$

Поэтому

$$\dot{V} \leq F(x,\xi) < 0 \quad \forall x \neq 0, \forall \xi \neq 0. \tag{3.3}$$

2. Покажем *ограниченность снизу функции* $V(t) \equiv V(x(t))$, где $(x(t), \xi(t))$ - произвольное решение системы(1.1), (1.2). Имеем

$$V(t) = x(t)^* Hx(t) + Q\int_0^{\sigma(t)} F(\eta)d\eta \geq \lambda_{\min}(H)\cdot|x(t)|^2 + QF(\eta_*)\sigma(t), \tag{3.4}$$

где $\lambda_{\min}(H)$ – наименьшее собственное значение матрицы H, η_* – некоторое значение между нулем и $\sigma(t)$: $0 < \eta_* < \sigma(t)$.

Из ограниченности гистерезисной функции $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ и гурвицевости матрицы Р следует [14], что *любое решение x(t) системы* (1.1), (1.2) *ограничено.*

Учитывая последнее обстоятельство, из (3.4) выводим оценку

$$V(t) > C, \quad \forall t \geq t_0, \tag{3.5}$$

где t_0, C – некоторые числа.

3. *Покажем, что* $|x(t)| \in L_2(0,+\infty)$, $\quad |\xi| \in L_2(0,+\infty)$.

Из неравенств (3.3) и (3.5) следует существование $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t) = V_\infty$. Последнее соотношение означает, что сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\left(-\dot{V}\right)dt.$

Так как $F(x,\xi)$ отрицательно определенная форма, то

$$-\dot{V} > -F(x,\xi) \geq k\left(|x|^2 + \xi^2\right), \tag{3.6}$$

для которого $k > 0$.

С учетом того, что $\int\limits_0^{+\infty}\left(-\dot{V}\right)dt < +\infty$, из (3.6) имеем

$$\int\limits_0^{+\infty}\xi(t)^2\,dt < +\infty, \qquad \int\limits_0^{+\infty}|x(t)|^2\,dt < +\infty. \tag{3.7}$$

4. Теперь для любого решения x(t) установим *предельное соотношение* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0.$

Обозначим $|x(t)|^2 = \eta(t)$. Получаем $\dot{\eta}(t) = 2x(t)^* \cdot \dot{x}(t)$. Из (1.1), (1.2) с учетом того, что x(t) и $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ ограничены, имеем $\left|\dot{x}(t)\right| \le \|P\| \cdot x(t) + |q| \cdot \left|\varphi[\sigma,\varphi_0]_t\right| \le C_1$, где $C_1 > 0$ – некоторая константа. Из ограниченности $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ следует ограниченность $\dot{\eta}(t)$:

$\left|\dot{\eta}(t)\right| = 2\left|x(t)^* \cdot \dot{x}(t)\right| \le C_2, \quad (C_2 > 0 - \text{константа}).$

Учитывая последнюю оценку, находим, что наряду со сходимостью второго интеграла из (3.7) сходится интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\eta(t)\cdot\dot{\eta}(t) \tag{3.8}$$

Поскольку $\int\limits_0^{+\infty}\eta(t)\cdot\dot{\eta}(t) = \dfrac{1}{2}\left[\eta(t)^2 - \eta(0)^2\right]$, то из сходимости интеграла (3.8) следует существование предела $\lim\limits_{t\to+\infty}\eta(t) = \eta_\infty < +\infty$.

Отсюда и из того, что $|x(t)| \in L_2(0,+\infty)$ (см.(3.7)) имеем $\eta_\infty = 0$, т.е. $x(t) \to 0$ $(t\to+\infty)$.

5. Остается показать, что ($x = 0$, $\xi = 0$) – *стационарное решение системы* (1.1), (1.2).

Это следует из свойства предельной непрерывности функции $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$. Действительно, из $x(t)\to 0$ $(t\to+\infty)$ следует, что $\sigma(t)\to 0$ $(t\to+\infty)$, а отсюда $\exists \lim \varphi[\sigma(t),\varphi_0]_t = \varphi_\infty$, причем $\varphi_\infty = 0$, так как $\varphi[\sigma(t),\varphi_0]_t = \xi(t) \in L_2(0,+\infty)$ (см.(3.7)).

Воспользовавшись свойством предельной непрерывности функции $\varphi[\sigma(t),\varphi_0]_t$, имеем $\varphi[0,\varphi_\infty]_t \equiv \varphi_\infty \Leftrightarrow \varphi[0,0]_t \equiv 0.$

Таким образом, (x=0, ξ=0) является стационарной точкой системы (1.1), (1.2).

Итак, мы показали, что любое решение ($x(t)$, $\xi(t)$) системы (1.1), (1.2) ограничено и стремится к стационарной точке (x=0, ξ=0). А это означает, что система (1.1), (1.2) дихотомична.

Теорема полностью доказана.

Литература

1. *Якубович В.А.*. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями //Докл. АН СССР. – 1963. – Т.149. – №2. – С.288–291.
2. *Якубович В.А.*. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями //Автоматика и телемеханика. – 1965. – №5. – С.753–763.
3. *Леонов Г.А., Филина М.Ю.*. Необходимые условия устойчивости в целом дифференциальных систем с гистерезисной правой частью: Сб. Проблемы современной теории периодических движений. – Ижевск. –1981. – №5. –С.39–44.
4. *Леонов Г.А., Филина М.Ю.*. Неустойчивость и колебания систем с гистерезисными нелинейностями //Автоматика и телемеханика. –1983. – №1. –С.44–49.
5. *Красносельский А.М., Покровский А.В.*. Виброустойчивость решений дифференциальных уравнений //Докл. АН СССР. – 1970.– Т.195. –№3. –С.544–547.
6. *Красносельский А.М., Покровский А.В.*. Системы гистеронов //Докл. АН СССР. –1971. –Т.200. –№2. –С.286–289.
7. *Красносельский А.М., Покровский А.В.*. Системы с гистерезисом. –М. –1983.
8. *Покровский А.В.*. Нелокальная продолжимость решений виброустойчивых уравнений //Докл. АН СССР. –1973.–Т.208.–№6.–С.1286–1289.
9. *Филина М.Ю.*. Устойчивость и колебания решений дифференциальных уравнений с гистерезисными функциями. Канд. дис., Л.–1983.
10. *Бакаев Ю.Н., Гуж А.А.*.//Радиотехника и электроника.–1965.–Т.10.–№1,–С. 175–176.
11. *Корякин Ю.Н., Леонов Г.А.* //Изв. АН КазССР.–Сер. Физ.–мат.–1976.–№3.–С. 41–46.
12. *Леонов Г.А.,.Смирнова В.Б.* // Сиб.мат. журн.–1978.–№4.– С. 1406–1412.
13. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.*. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. –М.,1978.
14. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления./ Под ред. Р.А.Нелепина.– М.: Наука, 1975.

Frequency criterion of the dichotomy of nonlinear control systems with hysteresis element

V.A.Teshev, M.M.Shymafov

In the paper frequency criterion of the dichotomy of nonlinear control systems with hysteresis element, satisfied to a “sectorial” condition is obtained. A second order system with hysteresis nonlinearity is given as an example.

