1 9 9 9 г. № 4

Т р у д ы Ф О Р А

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ В ТЕРМИНАХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА

Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

В этой статье рассматриваются основные понятия римановой геометрии, такие как параллельный перенос, инвариантность метрического тензора, тензор кривизны в терминах теории мультипликативного интеграла.

Рассмотрим следующие понятия римановой геометрии как параллельный перенос, инвариантность метрического тензора, тензор кривизны с точки зрения теории мультипликативного интеграла.

Пусть $g = (g_{ij})$, $i, j = 1,2,\dots,n$ - метрический тензор; $\Gamma_k = \left(\Gamma^i_{jk}\right)$, $k = 1,2,\dots,n$ – коэффициенты связности в пространстве переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Известно, что коэффициенты связности Γ^i_{jk} метрики g_{ij} выражаются через g_{ij} следующим образом:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\frac{\partial g_{si}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s}\right). \tag{1}$$

1. ***Параллельный перенос.***

Пусть в некоторой области пространства переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ задан дифференцируемый вектор $\xi = \left(\xi^i\right)$ и гладкая кривая с: $x^k = x^k(t)$, $t \in [a,b]$.

Определим ковариантную производную

$\nabla_k \xi^i = \dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}\xi^i$ и абсолютную производную $\dfrac{\delta \xi^i}{\delta t} = \left(\nabla_k \xi^i\right)\dfrac{dx^k}{dt}$, т.е.

$$\frac{\delta \xi^i}{\delta t} = \frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}\xi^j \frac{dx^k}{dt}.$$

Если в каждой точке кривой с построить вектор, равный по длине вектору ξ и ему параллельный, то компоненты ξ^i вектора ξ удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}\xi^j \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Более подробно, рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a = t_0, t_1, \dots, t_n = b$.

Тогда для любого отрезка $[t_s, t_{s+1}]$, $s = 0,1,\dots,n-1$ имеем

$$\xi^i(t_{s+1}) - \xi^i(t_s) + \Gamma^i_{jk}(\tau_s)\xi^j(\tau_s)\Delta x^k(\tau_s) = 0, \text{ где } \tau_s \in [t_s, t_{s+1}].$$

Параллельный перенос вектора $\xi^i(t_s)$ из точки t_s в точку t_{s+1} задается соотношением

$$\xi^i(t_{s+1}) = \left(\delta^i_j - \Gamma^i_{jk}(\tau_s)\Delta x^k(\tau_s)\right)\xi^j(t_s).$$

Отсюда следует, что $\xi^i(b) = \left(\delta^i_j - \Gamma^i_{jk}(\tau_n)\Delta x^k(\tau_n)\right)\dots\left(\delta^i_j - \Gamma^i_{jk}(\tau_0)\Delta x^k(\tau_0)\right)\xi^j(a)$,

$$\xi^i(b) = \prod_{s=n}^{0}\left(\delta^i_j - \Gamma^i_{jk}(\tau_s)\Delta x^k(\tau_s)\right)\xi^j(a).$$

Таким образом, параллельный перенос вектора $\xi(a)$ из точки $t_0 = a$ в точку $t_n = b$ задается криволинейным мультипликативным интегралом:

$$\xi(t) = \left(\overset{\cap}{\int_c} E - \Gamma_k dx^k \right) \xi_0, \; k = 1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

Аналогично, если переносится вдоль кривой c: $x^k = x^k(t)$ ковектор ξ_i, то параллельный перенос задается соответствующим криволинейным мультипликативным интегралом:

$$\xi(t) = \xi^0 \left(\overset{\cup}{\int} E + \Gamma_k dx^k \right), \; k = 1,2,\ldots,n. \tag{3}$$

Подробное описание процесса параллельного переноса показывает, что конструкции мультипликативного интеграла и параллельного переноса описываются как предел произведения большого числа линейных операторов, близких к единичному, примененного к переносимому вектору (ковектору). Поэтому с этой точки зрения криволинейный мультипликативный интеграл и связность являются эквивалентными понятиями [1].

2. *Инвариантность римановой метрики (Теорема Риччи).*

Рассмотрим метрический тензор $g = (g_{ij})$. Тогда ковариантная производная тензора g_{ij} равна нулю: $\nabla_k g_{ij} = 0$, т.е. $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{sj}\Gamma^s_{ik} + g_{is}\Gamma^s_{jk}$.

Вдоль произвольной гладкой кривой c: $x^k = x^k(t)$, получаем

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} dx^k = g_{sj}\Gamma^s_{ik} dx^k + g_{is}\Gamma^s_{jk} dx^k,$$

или в матричной форме $\dfrac{\partial g}{\partial x^k} dx^k = g\Gamma_k dx^k + \Gamma_k^T g dx^k$,

где T означает транспонирование.

Умножим обе части этого равенства на g^{-1} слева и запишем в виде

$$-g^{-1}\Gamma_k^T g dx^k + g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x^k} dx^k = \Gamma_k x^k.$$

Перейдем к мультипликативному интегралу:

$$\overset{\cup}{\int_c} E + \left(-g^{-1}\Gamma_k^T g + g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x^k} \right) dx^k = \overset{\cup}{\int_c} E + \Gamma_k dx^k \tag{4}$$

Заметим, что $g^{-1}\dfrac{\partial g}{\partial x^k}$ представляет собой мультипликативную производную, т.е.

$$g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x^k} = D_{x^k} g.$$

Тогда равенство (4) перепишется в виде:

$$\overset{\cup}{\int_c} E + \left(-g^{-1}\Gamma_k^T g + D_{x^k} g \right) dx^k = \overset{\cup}{\int_c} E + \Gamma_k dx^k. \tag{5}$$

Воспользуемся свойством мультипликативного интеграла:

$$\overset{\cup}{\int_{t_0}^{t}} E + \left(CAC^{-1} + D_t\left(C^{-1}\right) \right) dt = C(t_0) \left(\overset{\cup}{\int_{t_0}^{t}} E + Adt \right) C^{-1}(t).$$

Тогда равенство (5) примет вид: $g_0^{-1}\left(\int\limits_c^{\cup} E - \Gamma_k^T dx^k\right) g = \int\limits_c^{\cup} E + \Gamma_k\, dx^k$,

где g_0 - постоянная матрица, причем $g_0^T = g_0$.

Отсюда получает выражение метрического тензора $g = (g_{ij})$ через мультипликативные интегралы вида (2) и (3):

$$g = \left(\int\limits_c^{\cup} E + \Gamma_k dx^k\right) g_0 \left(\int\limits_c^{\cap} E + \Gamma_k^T dx^k\right). \tag{6}$$

Покажем, что $det\, g_0 = 1$.

В самом деле, $det\, g = det\left(\int\limits_c^{\cup} E + \Gamma_k dx^k\right) det\, g_0\, det\left(\int\limits_c^{\cap} E + \Gamma_k^T dx^k\right)$.

Воспользуемся формулой Лиувилля: $det\left(\int\limits_t^{\overset{t}{\cap}} E + A(\tau)d\tau\right) = exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} spA(\tau)d\tau\right)$.

Тогда $det\, g = exp\int\limits_{t_0}^{t} sp\left(\Gamma_k + \Gamma_k^T\right)dt\, det\, g_0$.

Учитывая, что $sp\Gamma_k = \Gamma_{ik}^i = \dfrac{\partial}{\partial x^k}\left(ln\sqrt{det\, g}\right)$, получаем, что $det\, g = det\, g\, det\, g_0$,

откуда следует, что $det\, g_0 = 1$.

Из равенства (6) можно найти выражение для второго фундаментального тензора $g^{-1} = (g^{ij})$:

$$g^{-1} = \left(\int\limits_c^{\cap} E + \Gamma_k^T dx^k\right)^{-1} g_0^{-1} \left(\int\limits_c^{\cup} E + \Gamma_k\, dx^k\right)^{-1},$$

или, учитывая свойства мультипликативного интеграла, получаем:

$$g^{-1} = \left(\int\limits_c^{\cup} E - \Gamma_k^T dx^k\right) g_0^{-1} \left(\int\limits_c^{\cup} E - \Gamma_k\, dx^k\right). \tag{7}$$

Таким образом, формулы (6) и (7) показывают, что фундаментальные тензоры $g = (g_{ij})$ и $g^{-1} = (g^{ij})$ ковариантно постоянны.

Пример [2]. Рассмотрим метрику $g = \lambda(x,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда коэффициенты связности вычисляются по формулам: $\Gamma_1 = \dfrac{1}{2\lambda}\left(\lambda_x E + \lambda_y I\right)$, $\Gamma_2 = \dfrac{1}{2\lambda}\left(\lambda_y E - \lambda_x I\right)$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Так как коэффициенты связности удовлетворяют условию В.В. Морозова и порождают случай Лаппо-Данилевского вдоль произвольной кривой, то криволинейные мультипликативные интегралы от коэффициентов связностей вычисляются в конечном виде:

$$g=\left(\overset{\cup}{\int_c} E+\Gamma_1 dx+\Gamma_2 dy\right)\lambda(x_0,y_0)E\left(\overset{\cap}{\int_c} E+\Gamma_1^T dx+\Gamma_2^T dy\right)=$$

$$=\lambda(x_0,y_0)E\,exp\int_{t_0}^{t}\left(\Gamma_k+\Gamma_k^t\right)d\dot{x}^k(t)= \quad .$$

$$=\lambda(x_0,y_0)E\,exp\int_{t_0}^{t}d\left(ln\,\lambda(x(t),y(t))\right)=\lambda(x,y)E$$

Рассмотрим некоторые специальные связности, интегрируемые в конечном виде.

1) Евклидово пространство.

Пусть $\Gamma_k\equiv 0$. Тогда $\overset{\cup}{\int_c} E+\Gamma_k dx^k=E$, следовательно, метрика постоянна, т.е. $g=g_0$.

2) [3] Пусть коэффициенты связности постоянны, но не все равны нулю, т.е. $\Gamma_k=C_k$.

Тогда $\overset{\cup}{\int} E+\Gamma_k dx^k=exp\,C_k x^k(t)$. Следовательно, метрика g имеет вид:

$$g=\left(exp\,C_k x^k(t)\right)g_0\left(exp\,C_k^T x^k(t)\right).$$

3) [1] Пусть коэффициенты связности представляют мультипликативную производную от некоторой функции $\Phi=\Phi(x_1,x_2,...,x_n)$, т.е. $\Gamma_k=\Phi^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x^k}$, $\Gamma_s=\Phi^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x^s}$.

Тогда $\overset{\cup}{\int_c} E+\Gamma_k dx^k+\Gamma_s dx^s=E$, т.е. в случае полной мультипликативной производной римановы пространства оказываются евклидовыми. При этом оператор кривизны

$$R_{ks}=\frac{\partial\Gamma_k}{\partial x^s}-\frac{\partial\Gamma_s}{\partial x^k}+\Gamma_k\Gamma_s-\Gamma_s\Gamma_k=0.$$

Этот случай соответствует так называемым уравнениям нулевой кривизны [1].

4) Пусть коэффициенты связности двух аффинных пространств $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ и Γ_{jk}^i связаны между собой следующим образом: $\tilde{\Gamma}_k=\Gamma_k+p_k E$, где p_k - некоторый ковектор.

Тогда криволинейные мультипликативные интегралы от коэффициентов связностей также связаны между собой: $\overset{\cap}{\int_c} E+\tilde{\Gamma}_k dx^k=\left(exp\int_{t_0}^{t}p_k\dot{x}^k(t)dt\right)\overset{\cap}{\int} E+\Gamma_k dx^k$,

где c : $x^k=x^k(t)$ - гладкая кривая.

5) [1] Случай Лаппо-Данилевского. Коэффициенты связности перестановочны при различных значениях аргумента: $[\Gamma_k(x),\Gamma_s(y)]=0$.

Тогда криволинейный мультипликативный интеграл вычисляется в конечном виде.

$$\overset{\cup}{\int_c} E+\Gamma_k dx^k=exp\int_{t_0}^{t}\Gamma_k dx^k .$$

Естественно, что список специальных связностей может быть продолжен. Причем, очевидно, что эти связности выделены по тому свойству, интегрируются они в конечном виде или между их интегралами существует некоторая зависимость.

Поэтому задача об интегрировании в конечном виде мультипликативного интеграла приобретает геометрический смысл и становится актуальной.

3. *Тензор кривизны.*

Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл

$$\int\limits_{c}^{\cap} E+\Gamma_k dx^k\,,\; k=1,2,\ldots,n\,, \tag{8}$$

где $\Gamma_k=\Gamma_k\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right)$ - функции от n вещественных переменных со значениями в алгебре $Mat(n)$ - матриц $n\times n$ с операцией матричного умножения.

Параметризация кривой c : $x^k=x^k(t)$ сводит криволинейный мультипликативный интеграл (8) к обыкновенному мультипликативному интегралу

$$\int\limits_{t_0}^{\overset{t}{\cap}} E+\Gamma_k\left(x^1(t),x^2(t),\ldots,x^n(t)\right)\dot{x}^k(t)dt\,. \tag{9}$$

Рассмотрим случай $n=2$ и выясним геометрический смысл интеграла (8) вдоль гладкой замкнутой кривой c .

Для удобства введем обозначения: $\Gamma_1=P$, $\Gamma_2=Q$, $x^1=x$, $x^2=y$. Тогда интеграл (8) примет вид:

$$\int\limits_{c}^{\cap} E+P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,. \tag{10}$$

Вычислим приближенно интеграл (10) в предположении, что кривая c имеет небольшую длину и ограничивает двумерную поверхность s небольшой площадки.

При этом воспользуемся интегральным представлением мультипликативного интеграла либо дифференциальным представлением мультипликативного интеграла. Это необходимо, поскольку алгебраическая структура подынтегральной матричной функции неизвестна и невозможно применить другие методы вычисления мультипликативного интеграла, связанные с определенной структурой подынтегральной матричной функции.

<u>Определение</u>: Оператор $K=Q_x-P_y+QP-PQ$ будем называть кривизной криволинейного мультипликативного интеграла (10).

Геометрический смысл кривизны криволинейного мультипликативного интеграла раскрывается в следующем утверждении.

Теорема 1. (Локальная теорема о кривизне).

Для криволинейного мультипликативного интеграла, вычисленного вдоль бесконечно малого прямоугольника c *, имеет место формула:* $\int\limits_{c}^{\cap} E+Pdx+Qdy=E+K\Delta\sigma+o(\Delta\sigma)$*, где* $\Delta\sigma$ *– площадь прямоугольника,* $o(\Delta\sigma)$ *– означают члены более высокого порядка малости, чем* $\Delta\sigma$.

Доказательство. Обозначим $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$. Имеет место равенство:

$$\int\limits_{c}^{\cap} E+Pdx+Qdy=\int\limits_{y}^{\overset{y_0}{\cap}} E+Q(x_0,y)dy\int\limits_{x}^{\overset{x_0}{\cap}} E+P(x,y)dx\int\limits_{y_0}^{\overset{y}{\cap}} E+ \,.$$

$$+Q(x,y)dy\int\limits_{x_0}^{\overset{x}{\cap}} E+P(x,y_0)dx$$

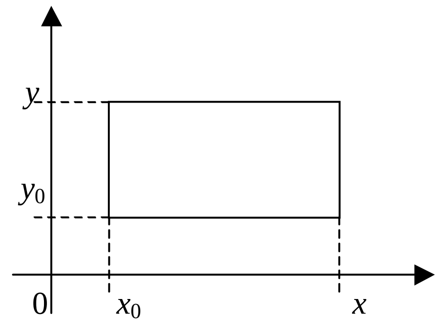

Рис. 1

Кроме того,

$$\mathop{\overset{\frown}{\int}}_{x_0}^{x} E + P(x,y_0)dx \approx \mathop{\overset{\frown}{\int}}_{x_0}^{x} E + \left(P(x_0,y_0) + \frac{\partial P}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial P}{\partial y}\Delta y + \ldots \right) dx;$$

$$\mathop{\overset{\frown}{\int}}_{y_0}^{y} E + Q(x,y)dy \approx \mathop{\overset{\frown}{\int}}_{y_0}^{y} E + \left(Q(x,y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial Q}{\partial x}\Delta x + \ldots \right) dy;$$

$$\mathop{\overset{\frown}{\int}}_{x}^{x_0} E + P(x,y)dx \approx \mathop{\overset{\frown}{\int}}_{x}^{x_0} E + \left(P(x_0,y) + \frac{\partial P}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial P}{\partial y}\Delta y + \ldots \right) dx;$$

$$\mathop{\overset{\frown}{\int}}_{y}^{y_0} E + Q(x_0,y)dy \approx \mathop{\overset{\frown}{\int}}_{y}^{y_0} E + \left(Q(x_0,y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial Q}{\partial x}\Delta x + \ldots \right) dy.$$

Воспользуемся формулой:

$$\mathop{\overset{\frown}{\int}}_{x_0}^{x} E + A(t)dt = E + \int_{x_0}^{x} A(t)dt + \int_{x_0}^{x} A(\tau)\int_{x_0}^{\tau} A(t)dtd\tau + \ldots$$

Тогда получим, что

$$\mathop{\overset{\frown}{\int}}_{x_0}^{x} E + P(x,y_0)dx \approx E + P\Delta x + \left(\frac{\partial P}{\partial x} + P^2 \right)\frac{\Delta x^2}{2} + \ldots$$

$$\mathop{\overset{\frown}{\int}}_{y_0}^{y} E + Q(x,y)dy \approx E + Q\Delta y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + Q^2 \right)\frac{\Delta y^2}{2} + \frac{\partial Q}{\partial x}\Delta x\Delta y + \ldots$$

$$\mathop{\overset{\frown}{\int}}_{x}^{x_0} E + P(x,y)dx \approx E - P\Delta x + \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + P^2 \right)\frac{\Delta x^2}{2} - \frac{\partial P}{\partial y}\Delta x\Delta y + \ldots$$

$$\mathop{\overset{\frown}{\int}}_{y}^{y_0} E + Q(x_0,y)dy \approx E - Q\Delta y + \left(-\frac{\partial Q}{\partial y} + Q^2 \right)\frac{\Delta y^2}{2} + \ldots$$

Следовательно,

$$\mathop{\overset{\frown}{\int}}_{y} E + Pdx + Qdy = E + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} + QP - PQ \right)\Delta x\Delta y + o(\Delta x\Delta y).$$

Теорема доказана.

Пусть теперь $\Gamma_k = \left(\Gamma_{jk}^{i}\right)$, $i, j = 1{,}2$ означают коэффициенты связности на двумерном пространстве аффинной связности [1].

Тогда координаты тензора R^i_{jks} рассматриваемой аффинной связности имеют вид:

$$R^i_{12j} = \left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} - [\Gamma_1, \Gamma_2] \right)^i_j .$$

Если в интеграле (8) зафиксировать постоянными значения всех x^i, за исключением двух, то интеграл (8) превратится в интеграл (10). Следовательно, справедлива формула

$$K_{ks} = \frac{\partial \Gamma_s}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x^s} - [\Gamma_k, \Gamma_s],$$

где k, s – номера незафиксированных переменных x^k, x^s, а кривизна в двумерном направлении (k,s) в системе координат x^i, имеет следующие координаты:

$$(K_{ks})^i_j = \left(\frac{\partial \Gamma_s}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x^s} - [\Gamma_k, \Gamma_s] \right)^i_j = R^i_{ksj} ,$$

где R^i_{ksj} - компоненты тензора кривизны аффинной связности с коэффициентами связности Γ_k и Γ_s.

Таким образом, кривизна аффинной связности R^i_{ksj} и кривизна криволинейного мультипликативного интеграла $(K_{ks})^i_j$ являются эквивалентными понятиями.

Теорема 2. *Для криволинейного мультипликативного интеграла (2) условие* $K = 0$ *эквивалентно существованию функции* $\Phi(x, y)$ *со значениями в группе обратимых операторов, называемой потенциальной, такой, что* $\Phi_x = P\Phi$, $\Phi_y = Q\Phi$.

Доказательство. В самом деле, так как $K = 0$, то вдоль бесконечно малой петли l_i (замкнутой кривой) имеет место равенство: $\oint E + Pdx + Qdy = E$,

где $l_1 = (15981)$, $l_2 = (95269)$, $l_3 = (98379)$, $l_4(89749)$.

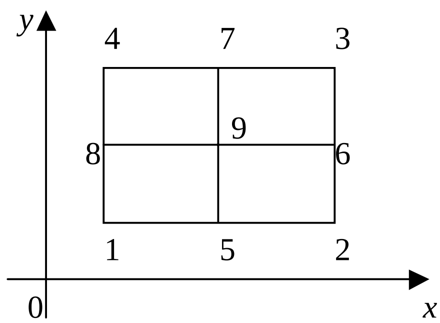

Рис. 2

Петля $l = (12341)$ есть произведение петель [4].

$$(12341) = l_1(189)l_2(981)(189)l_3(981)(18)l_4(81)$$

Переходя к интегралу, получаем, что $\overset{\frown}{\oint\limits_{l}} = \overset{\frown}{\oint\limits_{l_1}} \cdot \overset{\frown}{\oint\limits_{(189)}} \cdot \overset{\frown}{\oint\limits_{l_2}} \cdot \overset{\frown}{\int\limits_{(981)}} \cdot \overset{\frown}{\int\limits_{(189)}} \cdot \overset{\frown}{\oint\limits_{l_3}} \cdot \overset{\frown}{\int\limits_{(981)}} \cdot \overset{\frown}{\int\limits_{(18)}} \cdot \overset{\frown}{\oint\limits_{l_4}} \cdot \overset{\frown}{\int\limits_{(81)}}$.

Повторяя эту операцию для каждого нового прямоугольника достаточное число раз, получаем, что

$$\overset{\frown}{\int\limits_{c}} E + Pdx + Qdy = E$$

вдоль произвольной замкнутой кривой c.

Рассмотрим функцию $\Phi(x,y)=\overset{y}{\underset{y_0}{\stackrel{\frown}{\int}}} E+Q(x,y)dy+\overset{x}{\underset{x_0}{\stackrel{\frown}{\int}}} E+P(x,y_0)dx$.

Вычислим мультипликативную производную

$$D_y\Phi=\Phi_y\Phi^{-1}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\overset{y}{\underset{y_0}{\stackrel{\frown}{\int}}} E+Q(x,y)dy\right)\cdot\overset{x}{\underset{x_0}{\stackrel{\frown}{\int}}} E+P(x,y_0)dx\times$$

$$\times\left(\overset{x}{\underset{x_0}{\stackrel{\frown}{\int}}} E+P(x,y_0)dx\right)^{-1}\left(\overset{y}{\underset{y_0}{\stackrel{\frown}{\int}}} E+Q(x,y)dy\right)^{-1}=D_y\overset{y}{\underset{y_0}{\stackrel{\frown}{\int}}} E+Q(x,y)dy=Q(x,y)$$

Рассмотрим функцию $\Phi(x,y)=\overset{x}{\underset{x_0}{\stackrel{\frown}{\int}}} E+P(x,y)dx\overset{y}{\underset{y_0}{\stackrel{\frown}{\int}}} E+Q(x_0,y)dy$.

Вычислим мультипликативную производную

$$D_x\Phi=\Phi_x\Phi^{-1}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\overset{x}{\underset{x_0}{\stackrel{\frown}{\int}}} E+P(x,y)dx\right)\cdot\overset{y}{\underset{y_0}{\stackrel{\frown}{\int}}} E+Q(x_0,y)dy\times$$

$$\times\left(\overset{y}{\underset{y_0}{\stackrel{\frown}{\int}}} E+Q(x_0,y)dy\right)^{-1}\left(\overset{x}{\underset{x_0}{\stackrel{\frown}{\int}}} E+P(x,y)dx\right)^{-1}=D_x\overset{x}{\underset{x_0}{\stackrel{\frown}{\int}}} E+P(x,y)dy=P(x,y).$$

Следовательно, подынтегральное выражение представляет собой полный мультипликативный дифференциал $Q=D_y\Phi$, $P=D_x\Phi$, откуда следуют равенства $\Phi_x=P\Phi$, $\Phi_y=Q\Phi$.

Обратное утверждение вытекает из последних равенств.

Имеем: $\Phi_{xy}=P_y\Phi+PQ\Phi$, $\Phi_{yx}=Q_x\Phi+QP\Phi$, откуда следует, что $(Q_x-P_y+[Q,P])\Phi=0$, т.е. $K=0$. Теорема доказана.

Теорема 3. (Глобальная теорема о кривизне. Теорема Грина-Шлезингера).

Имеет место аналог формулы Грина, установленный Шлезингером [5]. *Криволинейный мультипликативный интеграл* (10), *вычисленный вдоль произвольной замкнутой кривой* $c:\ x^k=x^k(t)$, *выражается через оператор кривизны* R_{12} *следующим образом:*

$$\overset{\cup}{\underset{c}{\int}} E+P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\overset{\cup}{\underset{(c)}{\int}}\left(\int TR_{12}T^{-1}dx\right)dy+E, \qquad (11)$$

где $T=\overset{y}{\underset{y_0}{\stackrel{\cup}{\int}}} E+Q(x_0,y)dy\overset{x_1}{\underset{x_0}{\stackrel{\cup}{\int}}} E+P(x,y)dy$; (c) *– область, заключенная кривой* $c:\ x=x(t)$, $y=y(t)$.

Ограничимся рассмотрением прямоугольника (рис. 3)

$x_0\le x\le x_1;\ y_0\le y\le y_1$.

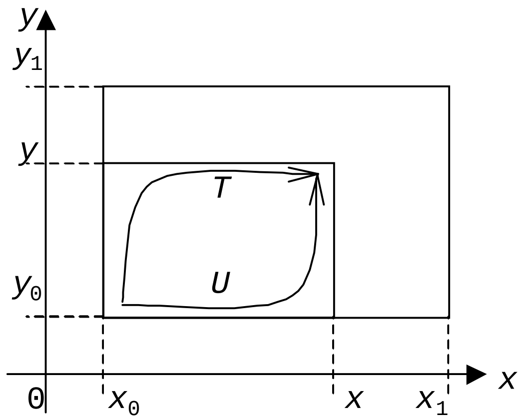

Рис. 3

Тогда

$$\int\limits_{c}^{\cup} E + P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_0}^{\overset{x}{\cup}} E + P(x,y_0)dx \int\limits_{y_0}^{\overset{y}{\cup}} E + Q(x,y)dy \times$$

$$\times \int\limits_{x_1}^{\overset{x}{\cup}} E + P(x,y_1)dx \int\limits_{y_1}^{\overset{y}{\cup}} E + Q(x_0,y)dy.$$

Рассмотрим матрицы:

$$T = \int\limits_{y_0}^{\overset{y}{\cup}} E + Q(x_0,y)dy \int\limits_{x_0}^{\overset{x}{\cup}} E + P(x,y)dy\,,,$$

$$U = \int\limits_{x_0}^{\overset{x}{\cup}} E + P(x,y_0)dx \int\limits_{y_0}^{\overset{y}{\cup}} E + Q(x,y)dy\,..$$

Тогда очевидно, что выполняется равенство:

$$\int\limits_{c}^{\cup} E + P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{x\to x_1\\ y\to y_1}} UT^{-1}.\,.$$

Составим выражение $Q - D_y T$ и напомним формулу мультипликативного дифференцирования произведения двух функций: $D_y(AB) = B^{-1}D_y AB + D_y A$.

Тогда получаем, что

$$D_y\left(UT^{-1}\right) = TD_yUT^{-1} + D_yT^{-1} = TD_yUT^{-1} - TD_yTT^{-1} = T\left(D_yU - D_yT\right)T^{-1} =$$
$$= T\left(Q - D_yT\right)T^{-1}.$$

Продифференцируем по x выражение $T\left(Q - D_yT\right)T^{-1}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\left(Q - D_yT\right)T^{-1}\right) = T\left(D_xT\left(Q - D_yT\right) + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}D_yT - QD_yT + D_yTD_xT\right)T^{-1}.\,.$$

Из очевидного равенства $T''_{xy} = T''_{yx}$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T^{-1}T'_y\right) + T^{-1}T'_xT^{-1}T'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(T^{-1}T'_x\right) + T^{-1}T'_yT^{-1}T'_x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}D_yT + D_xTD_yT = \frac{\partial}{\partial y}D_xT + D_yTD_xT.\,.$$

Выразим из этого равенства $\frac{\partial}{\partial x}D_yT$ и подставим в равенство (11).

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\left(Q-D_yT\right)T^{-1}\right)=T\left(D_xTQ+\frac{\partial Q}{\partial x}-QD_xT-\frac{\partial}{\partial y}D_xT\right)T^{-1}.$$

Учитывая, что $D_xT = P$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\left(Q-D_yT\right)T^{-1}\right)=T\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}+PQ-QP\right)T^{-1}.$$

Введя обозначение $R_{12}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}+\mathrm{P}Q-Q\mathrm{P}$, получаем: $\int\limits_{x_0}^{x}TR_{12}T^{-1}dx=T\left(Q-D_yT\right)T^{-1}$,

или $D_y\left(UT^{-1}\right)=\int\limits_{x_0}^{x}TR_{12}T^{-1}dx$.

Перейдя к мультипликативному интегралу по переменной y, получаем:

$$\overset{y}{\underset{y_0}{\overset{\cup}{\int}}}E+D_y\left(UT^{-1}\right)dy=\overset{y}{\underset{y_0}{\overset{\cup}{\int}}}\left(E+\int\limits_{x_0}^{x}TR_{12}T^{-1}dx\right)dy.$$

Учитывая, что подынтегральная функция в левой части есть полная мультипликативная производная, имеем: $UT^{-1}=\overset{y}{\underset{y_0}{\overset{\cup}{\int}}}\left(\int\limits_{x_0}^{x}TR_{12}T^{-1}dx\right)dy+E$.

Отсюда, переходя к пределу при $x\to x_1$, $y\to y_1$, получаем формулу (11).

Теорема доказана.

Замечание 1. Если интегрирование проводить в отрицательном направлении обхода кривой C, то тогда можно в двойном интеграле переставить между собой переменные x и y. При этом матрица T заменяется на матрицу U. Таким образом, справедлива формула:

$$\underset{-c}{\overset{\cup}{\int}}E+P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\underset{(c)}{\overset{\cup}{\int}}\left(\int UR_{12}U^{-1}dy\right)dx+E. \qquad (13)$$

В самом деле, доказательство следует из равенства: $\frac{\partial}{\partial y}\left(U\left(D_xU-P\right)U^{-1}\right)=UR_{12}U^{-1}$.

Заметим также, что формулы (11) и (13) согласованы между, т.е. выполняется равенство

$$\left(\underset{c}{\overset{\cup}{\int}}E+P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right)\left(\underset{-c}{\overset{\cup}{\int}}E+P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right)=E.$$

Следовательно, $\left(\overset{y_1}{\underset{y_0}{\overset{\cup}{\int}}}\left(\int\limits_{x_0}^{x_1}TR_{12}T^{-1}dx\right)dy+E\right)\left(\overset{x}{\underset{x_0}{\overset{\cup}{\int}}}\left(\int\limits_{y_0}^{y_1}UR_{12}U^{-1}dy\right)dx+E\right)=E$.

Таким образом, переменные x и y под интегралом можно переставить по этому правилу.

Замечание 2. Формулы (11) и (13) можно упростить, применив калибровочное преобразование.

Лемма. *Пусть* $\widetilde{P}=CPC^{-1}\pm C_xC^{-1}$ $\widetilde{Q}=CQC^{-1}\pm C_yC^{-1}$

калибровочные преобразования матричных функций P *и* Q, *где* $C=C(x,y)$ *- некоторая невырожденная гладкая матричная функция. Пусть, далее,*

$$K=Q_x-P_y\pm[QP],\ \widetilde{K}=\widetilde{Q}_x-\widetilde{P}_y\pm[Q,P].$$

Тогда $\widetilde{K} = CKC^{-1}$.

Утверждение леммы легко проверяется, причем, знак “+” нужно брать в случае интеграла $\overset{\cap}{\int}$, а знак “–” в случае интеграла $\overset{\cup}{\int}$. Выбрав в качестве $C(x,y)$ соответственно $C = T^{-1}$ и $C = U^{-1}$, из формул (11) и (13) получаем формулы:

$$\overset{\cup}{\int_{c}} E + \widetilde{P}(x,y)dx + \widetilde{Q}(x,y)dy = \overset{\cup}{\int_{(c)}} \left(\int R_{12}dx\right)dy + E\,,$$

$$\overset{\cup}{\int_{-c}} E + \widetilde{P}(x,y)dx + \widetilde{Q}(x,y)dy = \overset{\cup}{\int_{(c)}} \left(\int R_{12}dy\right)dx + E\,.$$

Таким образом, криволинейный мультипликативный интеграл (10) естественно рассматривать с точностью до полной мультипликативной производной, аналогично тому, как обычный криволинейный интеграл рассматривается с точностью до градиента некоторой функции, как это применяется в физических моделях (см., например, [6]).

Литература

1. *Мантуров О.В.* Мультипликативный интеграл//Проблемы геометрии,1990, т.22, с. 167 – 215.
2. *Паланджянц Л.Ж.* Об одном приеме вычисления мультипликативного интеграла методами теории поверхностей. //Дифференц. уравнения, 1983, т.19, № 9, с. 1630 – 1632.
3. *Вагнер В.В.* Римановы пространства с постоянными символами Кристоффеля. – Уч. записки Саратовского гос. ун-та, вып. 2, 1938, с. 98 – 101.
4. *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономий. – М.: ИЛ, 1960.
5. *Schlesinger L.* Parallelverschiebung und Krummundstensor//Math. Ann., 1928, t. 99, s. 413 – 434.
6. *Ландау Л.Д., Лифщиц Е.М.* Краткий курс теоретической физики. Книга 1. – М.: Наука, 1969.

Basic ground conceptions of Riemannian geometry in terms of mutiplicative integral

L.Zh. Palandzhants

Parallel translation invariant of metric tensor and curvature tensor in terms of mutiplicative integral are considered.

