

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ В ТЕРМИНАХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА

Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

В этой статье рассматриваются основные понятия римановой геометрии, такие как параллельный перенос, инвариантность метрического тензора, тензор кривизны в терминах теории мультипликативного интеграла.

Рассмотрим следующие понятия римановой геометрии как параллельный перенос, инвариантность метрического тензора, тензор кривизны с точки зрения теории мультипликативного интеграла.

Пусть $g = (g_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ - метрический тензор; $\Gamma_k = (\Gamma_{jk}^i)$, $k = 1, 2, \dots, n$ - коэффициенты связности в пространстве переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Известно, что коэффициенты связности Γ_{jk}^i метрики g_{ij} выражаются через g_{ij} следующим образом:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{si}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right). \quad (1)$$

1. Параллельный перенос.

Пусть в некоторой области пространства переменных x_1, x_2, \dots, x_n задан дифференцируемый вектор $\xi = (\xi^i)$ и гладкая кривая $c: x^k = x^k(t)$, $t \in [a, b]$.

Определим ковариантную производную

$$\nabla_k \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i \xi^j \text{ и абсолютную производную } \frac{\delta \xi^i}{\delta t} = (\nabla_k \xi^i) \frac{dx^k}{dt}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{\delta \xi^i}{\delta t} = \frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \xi^j \frac{dx^k}{dt}.$$

Если в каждой точке кривой с построить вектор, равный по длине вектору ξ и ему параллельный, то компоненты ξ^i вектора ξ удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \xi^j \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Более подробно, рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ точками $a = t_0, t_1, \dots, t_n = b$.

Тогда для любого отрезка $[t_s, t_{s+1}]$, $s = 0, 1, \dots, n-1$ имеем

$$\xi^i(t_{s+1}) - \xi^i(t_s) + \Gamma_{jk}^i(\tau_s) \xi^j(\tau_s) \Delta x^k(\tau_s) = 0, \text{ где } \tau_s \in [t_s, t_{s+1}].$$

Параллельный перенос вектора $\xi^i(t_s)$ из точки t_s в точку t_{s+1} задается соотношением

$$\xi^i(t_{s+1}) = (\delta_j^i - \Gamma_{jk}^i(\tau_s) \Delta x^k(\tau_s)) \xi^j(t_s).$$

Отсюда следует, что $\xi^i(b) = (\delta_j^i - \Gamma_{jk}^i(\tau_n) \Delta x^k(\tau_n)) \dots (\delta_j^i - \Gamma_{jk}^i(\tau_0) \Delta x^k(\tau_0)) \xi^j(a)$,

$$\xi^i(b) = \prod_{s=n}^0 (\delta_j^i - \Gamma_{jk}^i(\tau_s) \Delta x^k(\tau_s)) \xi^j(a).$$

Таким образом, параллельный перенос вектора $\xi(a)$ из точки $t_0 = a$ в точку $t_n = b$ задается криволинейным мультипликативным интегралом:

$$\xi(t) = \left(\int_c^{\circlearrowleft} E - \Gamma_k dx^k \right) \xi_0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Аналогично, если переносится вдоль кривой $c: x^k = x^k(t)$ ковектор ξ_i , то параллельный перенос задается соответствующим криволинейным мультипликативным интегралом:

$$\xi(t) = \xi^0 \left(\int_c^{\circlearrowright} E + \Gamma_k dx^k \right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Подробное описание процесса параллельного переноса показывает, что конструкции мультипликативного интеграла и параллельного переноса описываются как предел произведения большого числа линейных операторов, близких к единичному, примененного к переносимому вектору (ковектору). Поэтому с этой точки зрения криволинейный мультипликативный интеграл и связность являются эквивалентными понятиями [1].

2. Инвариантность римановой метрики (Теорема Риччи).

Рассмотрим метрический тензор $g = (g_{ij})$. Тогда ковариантная производная тензора g_{ij} равна нулю: $\nabla_k g_{ij} = 0$, т.е. $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{sj} \Gamma_{ik}^s + g_{is} \Gamma_{jk}^s$.

Вдоль произвольной гладкой кривой $c: x^k = x^k(t)$, получаем

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} dx^k = g_{sj} \Gamma_{ik}^s dx^k + g_{is} \Gamma_{jk}^s dx^k,$$

или в матричной форме $\frac{\partial g}{\partial x^k} dx^k = g \Gamma_k dx^k + \Gamma_k^T g dx^k$,

где T означает транспонирование.

Умножим обе части этого равенства на g^{-1} слева и запишем в виде

$$-g^{-1} \Gamma_k^T g dx^k + g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^k} dx^k = \Gamma_k x^k.$$

Перейдем к мультипликативному интегралу:

$$\int_c^{\circlearrowright} E + \left(-g^{-1} \Gamma_k^T g + g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^k} \right) dx^k = \int_c^{\circlearrowright} E + \Gamma_k dx^k \quad (4)$$

Заметим, что $g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^k}$ представляет собой мультипликативную производную, т.е.

$$g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^k} = D_{x^k} g.$$

Тогда равенство (4) переписется в виде:

$$\int_c^{\circlearrowright} E + \left(-g^{-1} \Gamma_k^T g + D_{x^k} g \right) dx^k = \int_c^{\circlearrowright} E + \Gamma_k dx^k. \quad (5)$$

Воспользуемся свойством мультипликативного интеграла:

$$\int_{t_0}^t E + (CAC^{-1} + D_t(C^{-1})) dt = C(t_0) \left(\int_{t_0}^t E + A dt \right) C^{-1}(t).$$

Тогда равенство (5) примет вид: $g_0^{-1} \left(\int_c^{\cup} E - \Gamma_k^T dx^k \right) g = \int_c^{\cup} E + \Gamma_k dx^k$,

где g_0 - постоянная матрица, причем $g_0^T = g_0$.

Отсюда получает выражение метрического тензора $g = (g_{ij})$ через мультипликативные интегралы вида (2) и (3):

$$g = \left(\int_c^{\cup} E + \Gamma_k dx^k \right) g_0 \left(\int_c^{\cup} E + \Gamma_k^T dx^k \right). \quad (6)$$

Покажем, что $\det g_0 = 1$.

В самом деле, $\det g = \det \left(\int_c^{\cup} E + \Gamma_k dx^k \right) \det g_0 \det \left(\int_c^{\cup} E + \Gamma_k^T dx^k \right)$.

Вспользуемся формулой Лиувилля: $\det \left(\int_t^t E + A(\tau) d\tau \right) = \exp \left(\int_{t_0}^t sp A(\tau) d\tau \right)$.

Тогда $\det g = \exp \int_{t_0}^t sp(\Gamma_k + \Gamma_k^T) dt \det g_0$.

Учитывая, что $sp \Gamma_k = \Gamma_{ik}^i = \frac{\partial}{\partial x^k} (\ln \sqrt{\det g})$, получаем, что $\det g = \det g \det g_0$,

откуда следует, что $\det g_0 = 1$.

Из равенства (6) можно найти выражение для второго фундаментального тензора $g^{-1} = (g^{ij})$:

$$g^{-1} = \left(\int_c^{\cup} E + \Gamma_k^T dx^k \right)^{-1} g_0^{-1} \left(\int_c^{\cup} E + \Gamma_k dx^k \right)^{-1},$$

или, учитывая свойства мультипликативного интеграла, получаем:

$$g^{-1} = \left(\int_c^{\cup} E - \Gamma_k^T dx^k \right) g_0^{-1} \left(\int_c^{\cup} E - \Gamma_k dx^k \right). \quad (7)$$

Таким образом, формулы (6) и (7) показывают, что фундаментальные тензоры $g = (g_{ij})$ и $g^{-1} = (g^{ij})$ ковариантно постоянны.

Пример [2]. Рассмотрим метрику $g = \lambda(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда коэффициенты связности вычисляются по формулам: $\Gamma_1 = \frac{1}{2\lambda} (\lambda_x E + \lambda_y I)$, $\Gamma_2 = \frac{1}{2\lambda} (\lambda_y E - \lambda_x I)$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как коэффициенты связности удовлетворяют условию В.В. Морозова и порождают случай Лаппо-Данилевского вдоль произвольной кривой, то криволинейные мультипликативные интегралы от коэффициентов связностей вычисляются в конечном виде:

$$g = \left(\int_c^{\cup} E + \Gamma_1 dx + \Gamma_2 dy \right) \lambda(x_0, y_0) E \left(\int_c^{\cap} E + \Gamma_1^T dx + \Gamma_2^T dy \right) =$$

$$= \lambda(x_0, y_0) E \exp \int_{t_0}^t (\Gamma_k + \Gamma_k^t) dx^k(t) =$$

$$= \lambda(x_0, y_0) E \exp \int_{t_0}^t d(\ln \lambda(x(t), y(t))) = \lambda(x, y) E$$

Рассмотрим некоторые специальные связности, интегрируемые в конечном виде.

1) Евклидово пространство.

Пусть $\Gamma_k \equiv 0$. Тогда $\int_c^{\cup} E + \Gamma_k dx^k = E$, следовательно, метрика постоянна, т.е. $g = g_0$.

2) [3] Пусть коэффициенты связности постоянны, но не все равны нулю, т.е. $\Gamma_k = C_k$.

Тогда $\int_c^{\cup} E + \Gamma_k dx^k = \exp C_k x^k(t)$. Следовательно, метрика g имеет вид:

$$g = (\exp C_k x^k(t)) g_0 (\exp C_k^T x^k(t)).$$

3) [1] Пусть коэффициенты связности представляют мультипликативную производную от некоторой функции $\Phi = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т.е. $\Gamma_k = \Phi^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}$, $\Gamma_s = \Phi^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x^s}$.

Тогда $\int_c^{\cup} E + \Gamma_k dx^k + \Gamma_s dx^s = E$, т.е. в случае полной мультипликативной производной римановы пространства оказываются евклидовыми. При этом оператор кривизны

$$R_{ks} = \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma_s}{\partial x^k} + \Gamma_k \Gamma_s - \Gamma_s \Gamma_k = 0.$$

Этот случай соответствует так называемым уравнениям нулевой кривизны [1].

4) Пусть коэффициенты связности двух аффинных пространств $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ и Γ_{jk}^i связаны между собой следующим образом:

$$\tilde{\Gamma}_k = \Gamma_k + p_k E, \text{ где } p_k - \text{некоторый ковектор.}$$

Тогда криволинейные мультипликативные интегралы от коэффициентов связностей также связаны между собой:

$$\int_c^{\cup} E + \tilde{\Gamma}_k dx^k = \left(\exp \int_{t_0}^t p_k \dot{x}^k(t) dt \right) \int_c^{\cup} E + \Gamma_k dx^k,$$

где $c: x^k = x^k(t)$ - гладкая кривая.

5) [1] Случай Лаппо-Данилевского. Коэффициенты связности перестановочны при различных значениях аргумента: $[\Gamma_k(x), \Gamma_s(y)] = 0$.

Тогда криволинейный мультипликативный интеграл вычисляется в конечном виде.

$$\int_c^{\cup} E + \Gamma_k dx^k = \exp \int_{t_0}^t \Gamma_k dx^k.$$

Естественно, что список специальных связностей может быть продолжен. Причем, очевидно, что эти связности выделены по тому свойству, интегрируются они в конечном виде или между их интегралами существует некоторая зависимость.

Поэтому задача об интегрировании в конечном виде мультипликативного интеграла приобретает геометрический смысл и становится актуальной.

3. Тензор кривизны.

Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл

$$\int_c E + \Gamma_k dx^k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

где $\Gamma_k = \Gamma_k(x^1, x^2, \dots, x^n)$ - функции от n вещественных переменных со значениями в алгебре $Mat(n)$ - матриц $n \times n$ с операцией матричного умножения.

Параметризация кривой $c: x^k = x^k(t)$ сводит криволинейный мультипликативный интеграл (8) к обыкновенному мультипликативному интегралу

$$\int_{t_0}^t E + \Gamma_k(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)) \dot{x}^k(t) dt. \quad (9)$$

Рассмотрим случай $n = 2$ и выясним геометрический смысл интеграла (8) вдоль гладкой замкнутой кривой c .

Для удобства введем обозначения: $\Gamma_1 = P$, $\Gamma_2 = Q$, $x^1 = x$, $x^2 = y$. Тогда интеграл (8) примет вид:

$$\int_c E + P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (10)$$

Вычислим приближенно интеграл (10) в предположении, что кривая c имеет небольшую длину и ограничивает двумерную поверхность S небольшой площади.

При этом воспользуемся интегральным представлением мультипликативного интеграла либо дифференциальным представлением мультипликативного интеграла. Это необходимо, поскольку алгебраическая структура подынтегральной матричной функции неизвестна и невозможно применить другие методы вычисления мультипликативного интеграла, связанные с определенной структурой подынтегральной матричной функции.

Определение: Оператор $K = Q_x - P_y + QP - PQ$ будем называть кривизной криволинейного мультипликативного интеграла (10).

Геометрический смысл кривизны криволинейного мультипликативного интеграла раскрывается в следующем утверждении.

Теорема 1. (Локальная теорема о кривизне).

Для криволинейного мультипликативного интеграла, вычисленного вдоль бесконечно малого прямоугольника c , имеет место формула: $\int_c E + P dx + Q dy = E + K \Delta \sigma + o(\Delta \sigma)$, где $\Delta \sigma$ - площадь прямоугольника, $o(\Delta \sigma)$ - означают члены более высокого порядка малости, чем $\Delta \sigma$.

Доказательство. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Имеет место равенство:

$$\begin{aligned} \int_c E + P dx + Q dy &= \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} E + Q(x_0, y) dy \int_x^{x_0 + \Delta x} E + P(x, y) dx \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} E + \\ &+ Q(x, y) dy \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} E + P(x, y_0) dx \end{aligned}$$

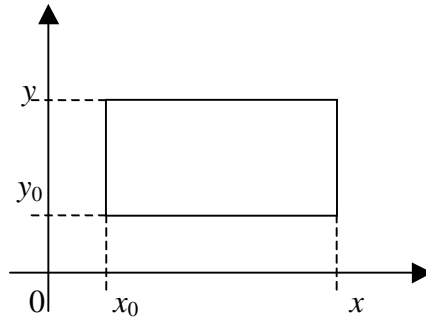


Рис. 1

Кроме того,

$$\int_{x_0}^x E + P(x, y_0) dx \approx \int_{x_0}^x E + \left(P(x_0, y_0) + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y + \dots \right) dx ;$$

$$\int_{y_0}^y E + Q(x, y) dy \approx \int_{y_0}^y E + \left(Q(x, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x + \dots \right) dy ;$$

$$\int_x^{x_0} E + P(x, y) dx \approx \int_x^{x_0} E + \left(P(x_0, y) + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y + \dots \right) dx ;$$

$$\int_y^{y_0} E + Q(x_0, y) dy \approx \int_y^{y_0} E + \left(Q(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x + \dots \right) dy .$$

Воспользуемся формулой:

$$\int_{x_0}^x E + A(t) dt = E + \int_{x_0}^x A(t) dt + \int_{x_0}^x A(\tau) \int_{x_0}^{\tau} A(t) dt d\tau + \dots$$

Тогда получим, что

$$\int_{x_0}^x E + P(x, y_0) dx \approx E + P \Delta x + \left(\frac{\partial P}{\partial x} + P^2 \right) \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$$

$$\int_{y_0}^y E + Q(x, y) dy \approx E + Q \Delta y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + Q^2 \right) \frac{\Delta y^2}{2} + \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x \Delta y + \dots$$

$$\int_x^{x_0} E + P(x, y) dx \approx E - P \Delta x + \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + P^2 \right) \frac{\Delta x^2}{2} - \frac{\partial P}{\partial y} \Delta x \Delta y + \dots$$

$$\int_y^{y_0} E + Q(x_0, y) dy \approx E - Q \Delta y + \left(-\frac{\partial Q}{\partial y} + Q^2 \right) \frac{\Delta y^2}{2} + \dots$$

Следовательно,

$$\int_y^{y_0} E + P dx + Q dy = E + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} + QP - PQ \right) \Delta x \Delta y + o(\Delta x \Delta y).$$

Теорема доказана.

Пусть теперь $\Gamma_k = (\Gamma_{jk}^i)$, $i, j = 1, 2$ означают коэффициенты связности на двумерном пространстве аффинной связности [1].

Тогда координаты тензора R^i_{jks} рассматриваемой аффинной связности имеют вид:

$$R^i_{12j} = \left(\frac{\partial \Gamma_{2j}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_{1j}}{\partial y} - [\Gamma_1, \Gamma_2] \right)_j^i.$$

Если в интеграле (8) зафиксировать постоянными значения всех x^i , за исключением двух, то интеграл (8) превратится в интеграл (10). Следовательно, справедлива формула

$$K_{ks} = \frac{\partial \Gamma_s}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x^s} - [\Gamma_k, \Gamma_s],$$

где k, s – номера незафиксированных переменных x^k, x^s , а кривизна в двумерном направлении (k, s) в системе координат x^i , имеет следующие координаты:

$$(K_{ks})^i_j = \left(\frac{\partial \Gamma_s}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x^s} - [\Gamma_k, \Gamma_s] \right)_j^i = R^i_{ksj},$$

где R^i_{ksj} – компоненты тензора кривизны аффинной связности с коэффициентами связности Γ_k и Γ_s .

Таким образом, кривизна аффинной связности R^i_{ksj} и кривизна криволинейного мультипликативного интеграла $(K_{ks})^i_j$ являются эквивалентными понятиями.

Теорема 2. Для криволинейного мультипликативного интеграла (2) условие $K = 0$ эквивалентно существованию функции $\Phi(x, y)$ со значениями в группе обратимых операторов, называемой потенциальной, такой, что $\Phi_x = P\Phi$, $\Phi_y = Q\Phi$.

Доказательство. В самом деле, так как $K = 0$, то вдоль бесконечно малой петли l_i (замкнутой кривой) имеет место равенство: $\oint E + Pdx + Qdy = E$,

где $l_1 = (15981)$, $l_2 = (95269)$, $l_3 = (98379)$, $l_4 = (89749)$.

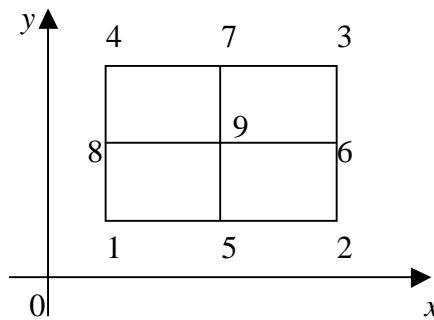


Рис. 2

Петля $l = (12341)$ есть произведение петель [4].

$$(12341) = l_1(189)l_2(981)(189)l_3(981)(18)l_4(81)$$

Переходя к интегралу, получаем, что $\oint_l = \oint_{l_1} \cdot \oint_{(189)} \cdot \oint_{l_2} \cdot \int_{(981)} \cdot \int_{(189)} \cdot \oint_{l_3} \cdot \int_{(981)} \cdot \int_{(18)} \cdot \oint_{l_4} \cdot \int_{(81)}$.

Повторяя эту операцию для каждого нового прямоугольника достаточное число раз, получаем, что

$$\int_c E + Pdx + Qdy = E$$

вдоль произвольной замкнутой кривой c .

Рассмотрим функцию $\Phi(x, y) = \int_{y_0}^y E + Q(x, y)dy + \int_{x_0}^x E + P(x, y_0)dx$.

Вычислим мультипликативную производную

$$D_y \Phi = \Phi_y \Phi^{-1} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{y_0}^y E + Q(x, y)dy \right) \cdot \int_{x_0}^x E + P(x, y_0)dx \times \\ \times \left(\int_{x_0}^x E + P(x, y_0)dx \right)^{-1} \left(\int_{y_0}^y E + Q(x, y)dy \right)^{-1} = D_y \int_{y_0}^y E + Q(x, y)dy = Q(x, y)$$

Рассмотрим функцию $\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x E + P(x, y)dx + \int_{y_0}^y E + Q(x_0, y)dy$.

Вычислим мультипликативную производную

$$D_x \Phi = \Phi_x \Phi^{-1} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{x_0}^x E + P(x, y)dx \right) \cdot \int_{y_0}^y E + Q(x_0, y)dy \times \\ \times \left(\int_{y_0}^y E + Q(x_0, y)dy \right)^{-1} \left(\int_{x_0}^x E + P(x, y)dx \right)^{-1} = D_x \int_{x_0}^x E + P(x, y)dx = P(x, y)$$

Следовательно, подынтегральное выражение представляет собой полный мультипликативный дифференциал $Q = D_y \Phi$, $P = D_x \Phi$, откуда следуют равенства $\Phi_x = P\Phi$, $\Phi_y = Q\Phi$.

Обратное утверждение вытекает из последних равенств.

Имеем: $\Phi_{xy} = P_y \Phi + PQ\Phi$, $\Phi_{yx} = Q_x \Phi + QP\Phi$, откуда следует, что

$$(Q_x - P_y + [Q, P])\Phi = 0, \text{ т.е. } K = 0. \text{ Теорема доказана.}$$

Теорема 3. (Глобальная теорема о кривизне. Теорема Грина-Шлезингера).

Имеет место аналог формулы Грина, установленный Шлезингером [5]. Криволинейный мультипликативный интеграл (10), вычисленный вдоль произвольной замкнутой кривой $c: x^k = x^k(t)$, выражается через оператор кривизны R_{12} следующим образом:

$$\int_c E + P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c \left(\int TR_{12}T^{-1}dx \right) dy + E, \tag{11}$$

где $T = \int_{y_0}^y E + Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^{x_1} E + P(x, y)dy$; (c) – область, заключенная кривой $c: x = x(t)$,

$$y = y(t).$$

Ограничимся рассмотрением прямоугольника (рис. 3)

$$x_0 \leq x \leq x_1; y_0 \leq y \leq y_1.$$

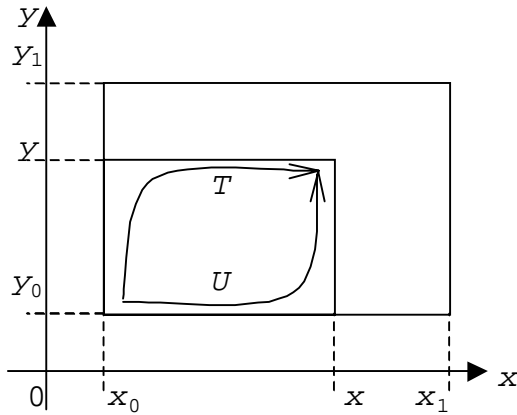


Рис. 3

Тогда

$$\int_c^U E + P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_0}^x E + P(x, y_0)dx \int_{y_0}^y E + Q(x, y)dy \times \\ \times \int_{x_1}^x E + P(x, y_1)dx \int_{y_1}^y E + Q(x_0, y)dy.$$

Рассмотрим матрицы:

$$T = \int_{y_0}^y E + Q(x_0, y)dy \int_{x_0}^x E + P(x, y)dy, \\ U = \int_{x_0}^x E + P(x, y_0)dx \int_{y_0}^y E + Q(x, y)dy.$$

Тогда очевидно, что выполняется равенство:

$$\int_c^U E + P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ y \rightarrow y_1}} UT^{-1}.$$

Составим выражение $Q - D_y T$ и напомним формулу мультипликативного дифференцирования произведения двух функций: $D_y(AB) = B^{-1}D_y AB + D_y A$.

Тогда получаем, что

$$D_y(UT^{-1}) = TD_y UT^{-1} + D_y T^{-1} = TD_y UT^{-1} - TD_y TT^{-1} = T(D_y U - D_y T)T^{-1} = \\ = T(Q - D_y T)T^{-1}$$

Продифференцируем по x выражение $T(Q - D_y T)T^{-1}$.

$$\frac{\partial}{\partial x} (T(Q - D_y T)T^{-1}) = T \left(D_x T(Q - D_y T) + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} D_y T - QD_y T + D_y TD_x T \right) T^{-1}.$$

Из очевидного равенства $T''_{xy} = T''_{yx}$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} (T^{-1}T'_y) + T^{-1}T'_x T^{-1}T'_y = \frac{\partial}{\partial y} (T^{-1}T'_x) + T^{-1}T'_y T^{-1}T'_x, \\ \frac{\partial}{\partial x} D_y T + D_x TD_y T = \frac{\partial}{\partial y} D_x T + D_y TD_x T.$$

Выразим из этого равенства $\frac{\partial}{\partial x} D_y T$ и подставим в равенство (11).

$$\frac{\partial}{\partial x} (T(Q - D_y T)T^{-1}) = T \left(D_x T Q + \frac{\partial Q}{\partial x} - Q D_x T - \frac{\partial}{\partial y} D_x T \right) T^{-1}.$$

Учитывая, что $D_x T = P$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x} (T(Q - D_y T)T^{-1}) = T \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} + P Q - Q P \right) T^{-1}.$$

Введя обозначение $R_{12} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} + P Q - Q P$, получаем: $\int_{x_0}^x T R_{12} T^{-1} dx = T(Q - D_y T)T^{-1}$,

или $D_y (UT^{-1}) = \int_{x_0}^x T R_{12} T^{-1} dx$.

Перейдя к мультипликативному интегралу по переменной Y , получаем:

$$\int_{y_0}^y E + D_y (UT^{-1}) dy = \int_{y_0}^y \left(E + \int_{x_0}^x T R_{12} T^{-1} dx \right) dy.$$

Учитывая, что подынтегральная функция в левой части есть полная мультипликативная производная,

имеем: $UT^{-1} = \int_{y_0}^y \left(\int_{x_0}^x T R_{12} T^{-1} dx \right) dy + E$.

Отсюда, переходя к пределу при $x \rightarrow x_1, y \rightarrow y_1$, получаем формулу (11).

Теорема доказана.

Замечание 1. Если интегрирование проводить в отрицательном направлении обхода кривой C , то тогда можно в двойном интеграле переставить между собой переменные X и Y . При этом матрица

T заменяется на матрицу U . Таким образом, справедлива формула:

$$\int_{-c}^c E + P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{(c)}^c \left(\int U R_{12} U^{-1} dy \right) dx + E. \tag{13}$$

В самом деле, доказательство следует из равенства: $\frac{\partial}{\partial y} (U(D_x U - P)U^{-1}) = U R_{12} U^{-1}$.

Заметим также, что формулы (11) и (13) согласованы между, т.е. выполняется равенство

$$\left(\int_c^c E + P(x, y) dx + Q(x, y) dy \right) \left(\int_{-c}^c E + P(x, y) dx + Q(x, y) dy \right) = E.$$

Следовательно, $\left(\int_{y_0}^{y_1} \left(\int_{x_0}^{x_1} T R_{12} T^{-1} dx \right) dy + E \right) \left(\int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{y_0}^{y_1} U R_{12} U^{-1} dy \right) dx + E \right) = E$.

Таким образом, переменные X и Y под интегралом можно переставить по этому правилу.

Замечание 2. Формулы (11) и (13) можно упростить, применив калибровочное преобразование.

Лемма. Пусть $\tilde{P} = C P C^{-1} \pm C_x C^{-1}$ $\tilde{Q} = C Q C^{-1} \pm C_y C^{-1}$

калибровочные преобразования матричных функций P и Q , где $C = C(x, y)$ - некоторая невырожденная гладкая матричная функция. Пусть, далее,

$$K = Q_x - P_y \pm [QP], \quad \tilde{K} = \tilde{Q}_x - \tilde{P}_y \pm [Q, P].$$

Тогда $\tilde{K} = CKC^{-1}$.

Утверждение леммы легко проверяется, причем, знак “+” нужно брать в случае интеграла \int^{\cup} , а знак “-” в случае интеграла \int_{-c}^{\cup} . Выбрав в качестве $C(x, y)$ соответственно $C = T^{-1}$ и $C = U^{-1}$, из формул (11) и (13) получаем формулы:

$$\int_c^{\cup} E + \tilde{P}(x, y)dx + \tilde{Q}(x, y)dy = \int_c^{\cup} \left(\int R_{12} dx \right) dy + E,$$

$$\int_{-c}^{\cup} E + \tilde{P}(x, y)dx + \tilde{Q}(x, y)dy = \int_{-c}^{\cup} \left(\int R_{12} dy \right) dx + E.$$

Таким образом, криволинейный мультипликативный интеграл (10) естественно рассматривать с точностью до полной мультипликативной производной, аналогично тому, как обычный криволинейный интеграл рассматривается с точностью до градиента некоторой функции, как это применяется в физических моделях (см., например, [6]).

Литература

1. Мантуров О.В. Мультипликативный интеграл//Проблемы геометрии, 1990, т.22, с. 167 – 215.
2. Паланджянц Л.Ж. Об одном приеме вычисления мультипликативного интеграла методами теории поверхностей. //Дифференц. уравнения, 1983, т.19, № 9, с. 1630 – 1632.
3. Вагнер В.В. Римановы пространства с постоянными символами Кристоффеля. – Уч. записки Саратовского гос. ун-та, вып. 2, 1938, с. 98 – 101.
4. Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономий. – М.: ИЛ, 1960.
5. Schlesinger L. Parallelverschiebung und Krümmungstensor//Math. Ann., 1928, t. 99, s. 413 – 434.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Краткий курс теоретической физики. Книга 1. – М.: Наука, 1969.

Basic ground conceptions of Riemannian geometry in terms of multiplicative integral

L.Zh. Palandzhants

Parallel translation invariant of metric tensor and curvature tensor in terms of multiplicative integral are considered.