2004 г. №9

Т р у д ы   Ф О Р А

# ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НА ПОЛУОСИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**К.С. Мамий**

*Адыгейский государственный университет, г. Майкоп*

В работе получены некоторые достаточные условия продолжаемости, ограниченности, колеблемости и стремления к нулю при $t \to +\infty$ решений уравнения

$$\ddot{u} + a(t, u, \dot{u}) + b(t)f(u) = 0.$$

## Введение

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{u} + a(t, u, \dot{u}) + b(t)f(u) = 0, \tag{1}$$

где функции $f(x)$ и $a(t, x, y)$ непрерывны, соответственно на $\mathbb{R}$ и $D = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}_0 = [0, +\infty)$, а функция $b(t)$ положительна и непрерывна при $t \geq 0$, имеет ограниченную вариацию на каждом конечном отрезке полуоси $0 \leq t < +\infty$. Последнее означает, что $b(t)$ представима в следующем виде:

$$b(t) = b_1(t) - b_2(t), \tag{2}$$

где $b_1(t)$ и $b_2(t)$ неубывающие функции на промежутке $[0, +\infty)$.

Очевидно, что в представлении (2) функции $b_1$ и $b_2$ определяются неоднозначно. Например, можно положить:

$$b_1(t) = \frac{1}{2}[\bigvee_0^t b(\tau) + b(t)], b_2(t) = \frac{1}{2}[\bigvee_0^t b(\tau) - b(t)], \tag{3}$$

как это сделано в работе [4]. Здесь символ $\bigvee_0^t$ обозначает полную вариацию соответствующей функции на отрезке $[0, t]$.

Введем следующие обозначения:

$$F(u) = 2\int_0^u f(x)dx,\ F_0 = \inf_{|u|<\infty}\{F(u)\},\ F_1(u) = F(u) - F_0,\ \text{если } F_0 > -\infty,$$

$$p^+(t) = max\{0, p(t)\},\ p^-(t) = max\{0, -p(t)\},$$

$$\varphi(t) = \frac{\dot{u}^2(t)}{b(t)} + F_1(u(t)), \tag{4}$$

где $u(t)$ – произвольное решение уравнения (1).

В данной статье получены достаточные условия продолжаемости, ограниченности, колеблемости и стремления к нулю при $t \to +\infty$ решений уравнения (1) и некоторых его частных видов. Получены также односторонние и двусторонние оценки функции $\varphi(t)$ приведены подробные доказательства ряда теорем, анонсированных в работе [16].

В идейном отношении статья непосредственно примыкает к работе Изюмовой Д.Б. и Кигурадзе И.Т. [4] и обобщает некоторые результаты, полученные ранее различными авторами [4,6,9,10,11,13,14,15].

## 1. Продолжаемость, колеблемость и оценка $\varphi(t)$

**Определение 1.1.** Пусть $a(t,x,0)\equiv 0$ и $F_0>-\infty$. Тогда, следуя [4], каждое решение $u_0$ уравнения

$$F(u)=F_0, \tag{1.1}$$

если оно существует, назовем $F_0$-решением уравнения (1).

Очевидно, что любое решение уравнения (1.1) является действительно решением уравнения (1).

**Определение 1.2.** Решение $u(t)$ уравнения (1) будем называть продолжаемым вправо, если оно определено вместе с первой производной $\dot u(t)$ на любом конечном отрезке $[0,T], 0<T<+\infty$.

Имеет место

**Теорема 1.1.** *Пусть*

$$F_0>-\infty \tag{1.2}$$

*и выполнено условие (2). Пусть, далее, существует неотрицательная и непрерывная на* $[0,+\infty)$ *функция* $p(t)$, *такая, что в области* $D$

$$a(t,x,y)y\geq -p(t)y^2. \tag{1.3}$$

*Тогда все решения уравнения (1) продолжаемы вправо и для любого решения* $u(t)$ *уравнения (1) для всех* $t\geq 0$ *справедлива оценка:*

$$\varphi(t)\leq \varphi(0)exp\int\limits_0^t\Big[2p(\tau)d\tau+\frac{db_2(\tau)}{b(\tau)}\Big]. \tag{1.4}$$

**Доказательство.** Допустим, что некоторое решение $u(t)$ уравнения (1) не продолжаемо. Тогда существует такое число $T$, $0<T<\infty$, что $u(t)$ и $\dot u(t)$ определены на $[0,T)$ и (см.[2], стр.22)

$$\lim_{t\to T-0}(|u(t)|+|\dot u(t)|)=+\infty. \tag{1.5}$$

Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число. Тогда для любого $t\in[0,T)$ справедливо равенство

$$\varphi(t)+\varepsilon=[\varphi(0)+\varepsilon]\exp\int\limits_0^t\frac{d\varphi(\tau)}{\varphi(\tau)+\varepsilon}=$$

$$=[\varphi(0)+\varepsilon]\exp\Big[-\int\limits_0^t\frac{2a(\tau,u(\tau),\dot u(\tau))\dot u(\tau)d\tau}{b(\tau)[\varphi(\tau)+\varepsilon]}-\int\limits_0^t\frac{\dot u^2(\tau)}{b(\tau)[\varphi(\tau)+\varepsilon]}\cdot\frac{db(\tau)}{b(\tau)}\Big]. \tag{1.6}$$

В силу (2), (1.3) и положительности $b(t)$ из (1.6) получаем, что

$$\varphi(t)\leq[\varphi(0)+\varepsilon]\cdot\exp[\int\limits_0^t\frac{\dot u^2(\tau)}{b(\tau)[\varphi(\tau)+\varepsilon]}\cdot(2p(\tau)d\tau+\frac{db_2(\tau)}{b(\tau)})], \tag{1.7}$$

или

$$\varphi(t)\leq[\varphi(0)+\varepsilon]\cdot\exp\int\limits_0^T[2p(\tau)d\tau+\frac{db_2(\tau)}{b(\tau)}]\equiv M^2(T)<+\infty$$

для всех $t\in[0,T)$. Учитывая, что $F_1(u(t))\geq 0$, из последнего неравенства имеем

$$|\dot u(t)|\leq M(T)\sqrt{b(t)},\ t\in[0,T).$$

 

Откуда в свою очередь следует, что

$$|u(t)| \leq M(T) \cdot \int_0^T \sqrt{b(\tau)} d\tau + |u(0)|, \ t \in [0, T).$$

Последние два неравенства, очевидно,противоречат соотношению (1.5).

Оценка (1.4) непосредственно получается из неравенства (1.7) в силу произвольности $\varepsilon$ и равенства (4). Теорема 1.1 доказана.

**Замечание 1.1.** Для продолжаемости решений уравнения (1) условие $F_0 > -\infty$ существенно.

В самом деле, уравнение

$$\ddot{u} + \frac{4n+2}{(2n-1)} u^{2n} = 0, (n = 1, 2, ...)$$

для которого $F_0 = -\infty$ , имеет решения вида

$$u(t) = -(t - C)^{-\frac{2}{2n-1}},$$

где C – произвольная постоянная. Очевидно эти решения непродолжаемы вправо при любом $C > 0$.

**Теорема 1.2.** *Если в предположениях теоремы 1.1 условие(1.3) заменить следующим:*

$$-p_2(t)y^2 \leq a(t, x, y)y \leq p_1(t)y^2, \ \forall (t, x, y) \in D, \tag{1.8}$$

*где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ неотрицательные и непрерывные функции на $[0, \infty)$, то любое решение $u(t)$ уравнения (1) продолжаемо вправо, причем справедлива двусторонняя оценка*

$$\varphi(0) \exp[\int_0^t (2p_1(\tau)d\tau + \frac{db_1(\tau)}{b(\tau)})] \leq \varphi(t) \leq \varphi(0) \exp[\int_0^t (2p_2(\tau)d\tau + \frac{db_2(\tau)}{b(\tau)})] \tag{1.9}$$

*для всех $t \geq 0$.*

**Доказательство.** Продолжаемость следует из теоремы 1.1. Оценка(1.9) легко получается из тождества (1.6), если учесть условие (1.8), возрастание функций $b_1(t)$ и $b_2(t)$ и произвольность $\varepsilon$.

**Замечание 1.2.** Если $a(t, x, y) \equiv 0$, а $b_1(t)$ и $b_2(t)$ определены по формулам (3), то теорема 1.2 превращается в теорему 1.1 из [4]. Если же $f(u) = u^{2n+1}$ (n=0,1,2,...) и $a(t, x, y) \equiv 0$, то из теоремы 1.1 получаем один результат из [13].

Точно также, как и в работе [4], из теоремы 1.2 выводятся следующие следствия.

**Следствие 1.1.** *Пусть $a(t, x, 0) \equiv 0$ и выполнены все условия теоремы 1.2. Тогда каковы бы ни были $F_0$ – решение $u_0$ и произвольное решение $u(t) \not\equiv u_0$ уравнения (1), функция $u(t) - u_0$ на каждом конечном отрезке промежутка $[0, \infty)$ может иметь лишь конечное число нулей.*

**Следствие 1.2.** *Пусть $F_0 = 0$ и $a(t, 0, 0) \equiv 0$. Тогда любое ненулевое решение уравнения (1) на каждом конечном отрезке промежутка $[0, \infty)$ может иметь только лишь конечное число нулей.*

Рассмотрим теперь следующее уравнение

$$\ddot{u} + a(t)\dot{u} + b(t)f(u) = 0, \tag{1.10}$$

где $a(t)$ непрерывная функция на $[0, \infty)$. Справедлива

**Теорема 1.3.** *Пусть $f(x)$ и $b(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1. Тогда все решения уравнения (1.10) продолжаемы вправо и для всех $t \geq 0$ справедлива оценка*

$$\varphi(0) \exp[-\int_0^t (2a^+(\tau)d\tau + \frac{db_1(\tau)}{b(\tau)})] \leq \varphi(t) \leq \varphi(0) \exp[\int_0^t (2a^-(\tau)d\tau + \frac{db_2(\tau)}{b(\tau)})]. \tag{1.11}$$

 

*Если функция* $b(t) > 0$ *и абсолютно непрерывна на* $[0, \infty)$, *то имеет место более точная оценка:*

$$\varphi(0) \exp \Big[ -\int\limits_0^t \alpha^+(\tau) d\tau \Big] \le \varphi(t) \le \varphi(0) \exp \int\limits_o^t \alpha^-(\tau) d\tau \tag{1.12}$$

*при всех* $t \ge 0$, *где* $\alpha(t) = 2a(t) + \frac{\dot b(t)}{b(t)}$.

**Доказательство.** Первая часть теоремы непосредственно следует из теоремы 1.2 в силу неравенств

$$-\alpha^-(t) \le \alpha(t) \le \alpha^+(t).$$

Для доказательства второй части, продифференцируем функцию $\varphi(t)$ в силу уравнения (1.10). Получим

$$\dot\varphi(t) = -\Big(2a(t) + \frac{\dot b(t)}{b(t)}\Big) \frac{\dot u^2}{b(t)}, \qquad (1.13).$$

откуда следуют неравенства

$$\Big(2a(t) + \frac{\dot b(t)}{b(t)}\Big)^+ \varphi(t) \le \dot\varphi(t) \le \Big(2a(t) + \frac{\dot b(t)}{b(t)}\Big)^- \cdot \varphi(t).$$

Отсюда непосредственно вытекает оценка(1.12).

**Следствие 1.3.** *Пусть функция b(t)>0 и абсолютно непрерывна при* $t \ge 0$. *Тогда*

$$\varphi(0) \le \varphi(t) \le \frac{\varphi(0) b(0)}{b(t)} \exp \Big[ -2 \int\limits_0^t a(\tau) d\tau \Big], \; t \ge 0 \tag{1.12'}$$

*если* $\alpha(t) \le 0$, *и*

$$\frac{\varphi(0) b(0)}{b(t)} \exp \Big[ -2 \int\limits_0^t a(\tau) d\tau \Big] \le \varphi(t) \le \varphi(0), \; t \ge 0, \tag{1.12''}$$

*если* $\alpha(t) \ge 0$.

Из равенства (1.13) получается сразу же следующее

**Следствие 1.4.** *Пусть на некотором интервале* $(t_1, t_2)$ *функция* $b(t)$ *знакопостоянна и удовлетворяет условию*

$$\frac{\dot b(t)}{b(t)} = -2a(t). \tag{1.14}$$

*Тогда на интервале* $(t_1, t_2)$ *уравнение (1.10) сводится к уравнению первого порядка*

$$\dot u^2 + b(t) F(u) = C b(t),$$

*где* $C$ *– произвольная постоянная.*

(Заметим, что здесь в формуле (4) вместо $F_1(u)$ можно взять просто $F(u)$).

В частности, если для линейного уравнения

$$\ddot u + a(t) \dot u + b(t) u = 0 \tag{1.10'}$$

выполнено условие (1.14), то легко найти его общее решение:

$$u(t) = C_1 \sin \int\limits_{t_0}^t \sqrt{b(\tau)} d\tau + C_2 \cos \int\limits_{t_0}^t \sqrt{b(\tau)} d\tau,$$

 

если b(t)>0 и

$$u(t) = C_1 \exp \int_{t_0}^{t} \sqrt{-b(\tau} d\tau + C_2 \exp \Big[ - \int_{t_0}^{t} \sqrt{-b(\tau)} d\tau \Big],$$

если b(t)<0, где $t_0, t \in (t_1, t_2), C_1$ и $C_2$ суть произвольные постоянные.

Отметим, что условие (1.14) является частным случаем более общего условия разрешимости в квадратурах уравнения (1.10′), полученного в работе [3] другим методом. Примеры уравнений, удовлетворяющих условию (1.14), можно найти в книге [5].

**Теорема 1.4.** *Если выполнены условия*

$$a(t,x,y)x \geq 0, \forall (t,x,y) \in D, \tag{1.15}$$

$$f(x)x > 0, \forall x \neq 0, \tag{1.16}$$

$$b(t) \geq 0 \, \forall t \geq 0, \tag{1.17}$$

$$\int^{\infty} t \cdot b(t) dt = +\infty, \tag{1.18}$$

*то любое продолжаемое и ограниченное на* $[0, \infty)$ *решение* $u(t) \not\equiv 0$ *уравнения (1) колеблется.*

**Доказательство.** Допустим противное. Пусть уравнение(1) имеет продолжаемое и ограниченное решение $u(t) \not\equiv 0$, которое не колеблется. Тогда существует такое $t_0 \geq 0$, что при всех $t \geq t_0$ u(t)>0, либо u(t)<0. Допустим сначала, что u(t)>0 при всех $t \geq t_0$ . Тогда, в силу(1.15), (1.16)и (1.17) из уравнения (1) получаем что $\ddot{u}(t) \leq 0$ при $t \geq t_0$, а , следовательно, $\dot{u}(t)$ убывает, причем $\dot{u}(t) > 0$ , так как в противном случае, нашлось бы такое $t_1 \geq t_0$, что $\dot{u}(t_1) = C < 0$, откуда в свою очередь следовало бы, что $u(t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$, что противоречит нашему допущению. Таким образом, при u(t)>0 будем иметь: $\ddot{u}(t) \leq 0, \dot{u}(t) > 0$. Аналогично убеждаемся, что при u(t)<0 будем иметь: $\ddot{u}(t) \geq 0, \dot{u}(t) < 0$.

Итак, при всех $t \geq t_0$ справедливы неравенства

$$u(t)\dot{u}(t) > 0, \ \dot{u}(t)\ddot{u}(t) \leq 0. \tag{1.19}$$

Умножим теперь (1) на t и проинтегрируем от $t_0$ до $t \geq t_0$. Тогда, учитывая (1.19), получим:

$$t|\dot{u}(t)| - |u(t)| + \int_{t_0}^{t} \tau |a(\tau, u(\tau), \dot{u}(\tau))| d\tau + \int_{t_0}^{t} \tau b(\tau) |f(u(\tau))| d\tau = t_0 |\dot{u}(t_0)| - |u(t_0)|$$

при всех $t \geq t_0$, где $u(t_0) \neq 0$. Из последнего равенства легко получается неравенство

$$\int_{t_0}^{\infty} t b(t) dt \leq \frac{t_0 |\dot{u}(t_0) + |u(+\infty)|}{\delta},$$

где $\delta = \min |f(x)| > 0$ на отрезке $[u(t_0), u(+\infty)]$, что противоречит условию (1.18). Теорема 1.4 доказана.

**Замечание 1.3.** Если $a(t,x,y) \equiv 0$ , то из теоремы 1.4 вытекает один результат из [4], при этом в отличие от [4] мы не требуем, чтобы $b(t) > 0$ при всех $t \geq 0$.

## 2. Ограниченность и стремление к нулю

Имеет место следующая

**Теорема 2.1.** *Пусть* $F_0 > -\infty$ *и*

$$a(t,x,y)y \geq 0, \ \forall (t,x,y) \in D, \tag{2.1}$$

 

$$\int\limits_0^\infty \frac{db_2(\tau)}{b(\tau)} < +\infty. \tag{2.2}$$

*Тогда для любого решения $u(t)$ уравнения (1) существует конечный предел*

$$\varphi_0 = \lim_{t\to+\infty} \varphi(t). \tag{2.3}$$

*Если $a(t,x,y)$ удовлетворяет условию (1.8) с $p_2(t) \equiv 0$,*

$$\int\limits_0^\infty p_1(t)dt = p_1 < +\infty \tag{2.4}$$

*и если существует конечный предел*

$$b_1 = \lim_{t\to+\infty} b_1(t), \tag{2.5}$$

*то*

$$\varphi_0 \geq \varphi(0)\exp\Big(-\frac{2p_1b_0+b_1}{b_0}\Big), \tag{2.6}$$

*где*

$$b_0 = \inf_{t\geq 0} b(t) > 0. \tag{2.7}$$

**Доказательство.** Существование конечного предела (2.3) следует из равенства

$$\varphi(t) = [\varphi(0)+1]\exp\Big[-\int\limits_0^t\Big(\frac{2a(\tau,u(\tau),\dot u(\tau))\cdot\dot u(\tau)d\tau)}{b(\tau)[\varphi(\tau)+1]} + \frac{\dot u^2(\tau)}{b(\tau)[\varphi(\tau)+1]}\cdot\frac{db_1(\tau)}{b(\tau)}\Big)+$$

$$+\int\limits_0^t \frac{\dot u^2(\tau)}{b(\tau)[\varphi(\tau)]+1}\cdot\frac{db_2(\tau)}{b(\tau)}\Big]-1,$$

если учесть условия (2), (2.7), (2.1) и (2.2).

Точно так же, как и в [4], доказывается справедливость соотношения (2.7). Дальше, оценка (2.6) непосредственно вытекает из оценки (1.9) в силу условий (2.7), (2.4) и (2.5). Теорема 2.1 доказана.

**Следствие 2.1.** *Пусть существуют конечные пределы*

$$\lim_{u\to+\infty} F(u),\quad \lim_{u\to-\infty} F(u) \tag{2.8}$$

*и выполняются условия (2.1),(2.2),(2.4)и (2.5). Тогда любое решение $u(t)$ уравнения (1), начальные значения $u(0)$ и $\dot u(0)$ которого удовлетворяют условию*

$$\varphi(0) = \frac{\dot u^2(0)}{b(0)} + F_1\big(u(0)\big) > F^*\cdot\exp\Big(\frac{2p_1b_0+b_1}{b_0}\Big), \tag{2.9}$$

*где $F^* = \sup\limits_{|u|<\infty} F_1(u)$, неограниченно. При этом*

$$0 < \lim_{t\to+\infty}\frac{|u(t)|}{t} = \lim_{t\to+\infty}|\dot u(t)| < +\infty. \tag{2.10}$$

**Доказательство.** Из (2.8) следует, что $F_0 > -\infty$ и $F^* < +\infty$ . Из левой части неравенств (1.9), в силу (2.4), (2.5)и (2.7), получаем, что для всех $t \geq 0$

$$\frac{\dot u^2(t)}{b(t)} + F_1(u(t)) \geq \varphi(0)\exp\Big(-\frac{2p_1b_0+b_1}{b_0}\Big).$$

 

Отсюда, в силу (2.9), следует, что $|\dot{u}(t)| \geq C > 0$ при $t \geq 0$,
где
$$C^2 = \Big[\varphi(0)\exp\Big(-\frac{2p_1b_0+b_1}{b_0}\Big)\Big]\cdot b_0 > 0.$$
Следовательно, $|u(t)| \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Отсюда вытекает, в силу (2.8), что существует конечный $\lim\limits_{t\to+\infty} F_1(u(t))$. Но тогда, в силу (2.3), (2.5), (2.7) и (4) существует и $\lim\limits_{t\to+\infty} |\dot{u}(t) \geq C > 0$. Далее, применяя правило Лопиталя, убеждаемся в справедливости (2.10). Следствие 2.1 доказано.

Заметим, что в случае $a(t,x,y) \equiv 0$ аналогичный результат получен в работе [4] в предположении, что $|\dot{u}(0)|$ достаточно большое число.

Справедлива

**Теорема 2.2.** *Пусть выполнены все условия теоремы 1.1 и*
$$\overline{\lim_{u\to+\infty}} F(u) = \overline{F} > F_0, \quad \overline{\lim_{u\to-\infty}} F(u) = \underline{F} > F_0, \tag{2.11}$$
$$\int\limits_0^\infty p(t)dt = p < +\infty, \quad \int\limits_0^\infty \frac{db_2(\tau)}{b(\tau)} = \beta < +\infty. \tag{2.12}$$
*Тогда любое решение $u(t)$ уравнения (1), начальные значения которого удовлетворяют условию*
$$\{\frac{\dot{u}^2(0)}{b(0)} + F_1(u(0))\}\exp(2p+\beta) < \min(\overline{F}-F_0, \underline{F}-F_0), \tag{2.13}$$
*ограничено при $t \to +\infty$, а для производной $\dot{u}(t)$ справедлива оценка:*
$$\dot{u}(t) = O(\sqrt{b(t)}). \tag{2.14}$$

**Доказательство.** Из (4), (1.14), (2.13) легко получаем, что
$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} F(u(t)) - F_0 < \min(\overline{F}-F_0, \underline{F}-F_0). \tag{2.15}$$
Из (2.11) следует, что существуют две последовательности $\overline{u}_k$ и $\underline{u}_k$ такие, что
$$\lim_{t\to+\infty} \overline{u}_k = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} \underline{u}_k = -\infty \tag{2.16}$$
и
$$\lim_{k\to\infty} F(\overline{u}_k) = \overline{F}, \quad \lim_{k\to+\infty} F(\underline{u}_k) = \underline{F}. \tag{2.17}$$
Допустим теперь, что решение $u(t)$ не ограничено при $t \to +\infty$. Тогда имеет место по крайней мере одно из равенств
$$\overline{\lim}_{t\to+\infty} u(t) = +\infty,$$
либо
$$\underline{\lim}_{t\to+\infty} u(t) = -\infty.$$
Предположим, что имеет место первое соотношение. Тогда, в силу (2.16), найдется такой номер $k_0$, что
$$\overline{u}_{k_o} > \inf_{t\geq 0}\{u(t)\}.$$
Теперь нетрудно видеть, что существует такая возрастающая последовательность $t_n$, что
$$u(t_n) = \overline{u}_{k_0+n} \ (n = 0, 1, 2...)$$
и $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.
Следовательно, в силу (2.17) имеем, что
$$\lim_{n\to\infty} F(u(t_n)) = \overline{F}.$$

Но тогда из (2.15) получаем, что $\overline{F} - F_0 < \overline{F} - F_0)$, чего быть не может. Аналогично рассматривается и случай $\underline{\lim}_{t\to+\infty} u(t) = -\infty$. Из ограниченности решения $u(t)$ и оценки (1.4) легко получается оценка (2.14). Теорема 2.2 доказана.

**Замечание 2.1.** Проанализировав доказательство теоремы 2.2, легко указать достаточные условия односторонней ограниченности решений уравнения (1). Например, любое решение $u(t)$ уравнения (1) будет ограничено снизу, если вместо условий (2.11) и (2.13) будет выполняться соответственно следующие условия:

$$\overline{\lim}_{u\to-\infty} F(u) = \underline{F} > F_0, \{\frac{\dot{u}^2(0)}{b(0)} + F_1(u(0))\} \exp(2p+\beta) < \underline{F} - F_0.$$

Аналогично формулируются и условия ограниченности сверху решения $u(t)$.

**Следствие 2.2.** *Если выполняются условия теоремы 2.2 и при этом $\overline{F} = \underline{F} = +\infty$, то все решения уравнения (1) ограничены при $t \to +\infty$ , а для производных решений справедлива оценка (2.14).*

**Замечание 2.2.** Из последнего предложения получаются, как частные случаи, некоторые результаты Ю.А.Клокова, С.Н. Олехника и автора (см. теоремы 1, 2 [6], теорему 1 [15] и теорему 5 [9]).

**Следствие 2.3.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.2 и пусть $u_0$ - некоторое $F_0$ - решение уравнения (1). Тогда любое решение $u(t)$ уравнения (1), для которого $|u(0) - u_0|$ и $|\dot{u}(0)|$ достаточно малы, ограничено при $t \to +\infty$; если при этом $F_0 = 0$, то любое решение уравнения (1) с достаточно малыми начальными значениями ограничено при $t \to +\infty$.*

**Доказательство** следует из того, что в силу непрерывности функции $F(u)$ начальные данные $u(0)$ и $\dot{u}(0)$ можно выбрать такими, чтобы выполнялось условие (2.13), а тогда по теореме 2.2 соответсвующее решение будет ограничено.

**Теорема 2.3.** *Пусть $b(t) > 0$ – неубывающая функция при $t \geq 0$ и пусть выполнены условия*

$$f(x)x \geq 0 \; \forall x \in (-\infty, +\infty), \tag{2.18}$$

$$f(x) \not\equiv 0 \quad \textit{в промежутках } (-\infty, 0), \; (0, \infty), \tag{2.19}$$

$$a(t,x,y)y \geq 0 \; \forall (t,x,y) \in D. \tag{2.20}$$

*Тогда любое решение $u(t)$, $0 \leq t < \infty$, уравнения (1), для которого существуют по крайней мере две точки $t_1, t_2 \in (0, +\infty)$ таких, что*

$$\dot{u}(t_1) = \dot{u}(t_2) = 0, \; u(t_1) \cdot u(t_2) < 0, \tag{2.21}$$

*ограничено при $t \to +\infty$.*

**Доказательство.** Из условия (2.20), положительности и неубывания функции $b(t)$ легко следует, что функция $\varphi(t)$, определяемая по формуле (5), невозрастающая при $t \geq 0$ . Далее, из (2.18), (2.19) и вида F(u) заключаем, что функция F(u) не убывает при $u \geq 0$. Учитывая теперь условие (2.21) и вид функции $\varphi(t)$, убеждаемся, что

$$F(u(t)) \leq F(u(t_i)), \; t \geq t_i, \; (i = 1, 2),$$

откуда, для определенности, допустив $u(t_1) > 0$, получаем, что $u(t_2) \leq u(t) \leq u(t_1)$ для всех $t \geq \max\{t_1, t_2\}$. Теорема 2.3 доказана.

**Следствие 2.4.** *Если выполнены все условия теоремы 2.3, то любое колеблющееся решение уравнения (1) ограничено.*

**Замечание 2.3.** Если $a(t,x,y) \equiv 0$, $f(x)x > 0$, $\forall x \neq 0$, то из последнего утверждения получаем теорему 2.3 из [4].

**Замечание 2.4.** Если выполнены условия теоремы 2.3 и если $f(x)$ - нечетная функция , то любое решение уравнения (1), производная которого обращается в нуль хотя бы один раз, ограничено при $t \to +\infty$.

Аналогично теореме 2.3 доказывается

 

**Теорема 2.4.** *Если выполнены условия (2.18) и (2.19), функция $b(t) > 0$ и абсолютно непрерывна при $t \geq 0$ и если существует непрерывная функция $p(t)$ такая, что*

$$a(t,x,y)y \geq p(t)y^2 \; \forall (t,x,y) \in D,$$

*и*

$$2p(t) + \frac{\dot{b}(t)}{b(t)} \geq 0 \;\; (t \geq 0),$$

*то любое решение уравнения (1), обладающее свойством (2.21) (в частности, любое колеблющееся решение) ограничено при $t \to +\infty$.*

**Следствие 2.5.** *Если функция $b(t) > 0$ абсолютно непрерывна при $t \geq 0$ и*

$$2a(t) + \frac{\dot{b}(t)}{b(t)} \geq 0 \, \forall t \geq 0,$$

*а $f(x)$ удовлетворяет условиям (2.18) и (2.19), то любое решение уравнения (1.10), обладающее свойством (2.21), ограничено при $t \to +\infty$.*

**Теорема 2.5.** *Если выполнены условия (1.2), (2.2) и*

$$\int\limits_0^\infty a^-(t)dt = a^- < +\infty, \tag{2.22}$$

*то для любого решения $u(t)$ уравнения (1.10) существует конечный предел (2.3). Если при этом*

$$\int\limits_0^\infty a^+(t)dt = a^+ < +\infty, \tag{2.23}$$

*и выполнено условие(2.5), то*

$$\varphi_0 \geq \varphi(0) \exp\Big( - \frac{2a^+ b_0 + b_1}{b_0} \Big), \tag{2.24}$$

*где $b_0 = \inf\limits_{t \geq 0} \{b(t)\} > 0$.*

**Доказательство.** Существование конечного предела $\varphi_0$ следует из равенства

$$\varphi(t) = \Big[\varphi(0) + 1\Big] \exp\{- \int\limits_0^t \Big(2a^+(\tau)d\tau + \frac{db_1(\tau)}{b(\tau)}\Big) \cdot \frac{\dot{u}^2(\tau)}{b(\tau)[\varphi(\tau)+1]} + \int\limits_0^t \frac{\dot{u}^2(\tau)}{b(\tau)[\varphi(\tau)+1]} \Big(2a^-(\tau)d\tau + \frac{db_2(\tau)}{b(\tau)}\Big)\} - 1.$$

Вторая часть легко следует из оценки (1.11).

**Теорема 2.6.** *Если $F_0 > -\infty, b(t) > 0$ и абсолютно непрерывная функция и*

$$\int\limits_0^\infty \alpha^-(t)dt = \alpha^- < +\infty, \tag{2.25}$$

*где $\alpha(t) = 2a(t) + \frac{\dot{b}(t)}{b(t)}$, то для любого решения $u(t)$ уравнения (1.10) существует конечный предел (2.3), причем, если*

$$\int\limits_0^\infty \alpha^+(t)dt = \alpha^+ < +\infty, \tag{2.26}$$

*то*

$$\varphi_0 \geq \varphi(0) \exp(-\alpha^+). \tag{2.27}$$

**Доказательство** следует из равенства

$$\varphi(t)=[\varphi(0)+1]\exp\{-\int\limits_0^t\Big[2a(\tau)+\frac{\dot b(\tau)}{b(\tau)}\Big]\cdot\frac{\dot u^2(\tau)d\tau}{b(\tau)[\varphi(\tau)+1]}\}=$$

$$=[\varphi(0)+1]\exp\{-\int\limits_0^t\Big[2a(\tau)+\frac{\dot b(\tau)}{b(\tau)}\Big]^+\cdot\frac{\dot u^2(\tau)d\tau}{b(\tau)[\varphi(\tau)+1]}+\int\limits_0^t\Big[2a(\tau)+\frac{\dot b(\tau)}{b(\tau)}\Big]^-\cdot\frac{\dot u^2(\tau)d\tau}{b(\tau)[\varphi(\tau)+1]}\}-1$$

и оценки(1.12).

Отметим, что для уравнения (1.10) легко сформулировать предложения, аналогичные следствию 2.1, теореме 2.2 и ее следствиям. Например, справедлива

**Теорема 2.7.** *Пусть выполнены условия (3), (1.12), (2.11) и (2.25). Тогда любое решение $u(t)$ уравнения (1.10), начальные значения которого удовлетворяют условию*

$$\Big[\frac{\dot u^2(0)}{b(0)}+F_1(u(0))\Big]e^{\alpha^-}<\min(\overline{F}-F_0,\underline{F}-F_0),$$

*ограничено при $t\to+\infty$, а для производной $\dot u(t)$ справедлива оценка (2.14).*

**Доказательство** проводится аналогично доказательству теоремы 2.2 с использованием оценки (1.12).

**Следствие 2.6.** *Если выполняются условия теоремы 2.7 и при этом $\overline{F}=\underline{F}=+\infty$, то все решения уравнения (1.10) ограничены при $t\to+\infty$. Если,кроме того, функция $b(t)$ будет ограничена и сверху, то будут ограничены все решения уравнения (1.10) вместе с первыми производными.*

**Замечание 2.5.** Если $\alpha(t)\geq 0$ , то из следствия 2.6 получаем один результат Лианг Чонг-Као [14]. Если при этом $f(x)=x$, то получается известная теорема В.М. Старжинского [11]. Из следствия 2.6 также получаются некоторые результаты Ю.А. Клокова [6], Р. Беллмана [1] и В.П. Скрипника [10].

**Замечание 2.6.** При изучении вопроса об ограниченности решений уравнений (1.10) и (1.10') большинство авторов, как правило, требуют, чтобы функция $a(t)$ была неотрицательной [6, 7, 8, 14 и др. ], либо, чтобы отрицательная ее часть была мала в каком-то смысле [10]. Однако, если выполняется условие (2.25) (например, $\alpha(t)\geq 0$), то эти ограничения на $a(t)$ излишни для ограниченности всех решений уравнения (1.10), если только не требовать ограниченности их производных. Более того, существуют примеры, когда $a(t)<0$ и даже $\lim\limits_{t\to+\infty}a(t)=-\infty$ и тем не менее все решения соответствующего уравнения ограничены при $t\to+\infty$.

Например, все решения уравнения

$$\ddot u-t\dot u+e^{2t^2}f(u)=0$$

ограничены на $[0,+\infty)$, если только

$$\lim_{|u|\to+\infty}\int\limits_0^u f(x)dx=+\infty, \tag{2.28}$$

так как здесь $\alpha(t)=2t\geq 0$, а для производных справедлива оценка $\dot u(t)=O(e^{t^2})$. Можно в качестве примера рассмотреть и более общее уравнение

$$\ddot u+P_n(t)\dot u+e^{Q_m(t)}\cdot f(u)=0,$$

где $f(x)$ удовлетворяет условию (2.28) (в частности, $f(x)\equiv x), P_n(t)$ и $Q_m(t)$ – многочлены соответственно степени n и m, а $a_0$ и $b_0$ - соответственно коэффициенты при старших членах этих многочленов.

 

Все решения этого уравнения будут ограничены, если будет выполнена одна из следующих групп условий:

$$1)\ n < m-1,\ b_0 > 0;$$

$$2)\ n = m-1,\ 2a_0 + mb_0 \geq 0;$$

$$3)\ n > m-1, a_0 > 0.$$

При этом для производной $\dot{u}(t)$ имеет место оценка: $\dot{u}(t) = O\Big(\exp\frac{1}{2}b_0t^m\Big)$.

**Следствие 2.7.** *Все решения уравнения* $\ddot{u} + a(t)\dot{u} + u = 0$ *ограничены вместе с первыми производными при* $t \to +\infty$*, если*

$$\int\limits_0^\infty a^-(t)dt < +\infty. \qquad (2.29)$$

Условие (2.29) близко к необходимому для ограниченности всех решений рассматриваемого уравнения, так как, например, все нетривиальные решения уравнения $\ddot{x} - \frac{2}{t+1}\dot{x} + x = 0$ не ограничены при $t \to +\infty$ (см.[12], стр. 61) и $\int\limits_0^\infty a^-(t)dt = \int\limits_0^\infty \frac{2}{t+1}dt = +\infty$.

Используя оценку (1.12), можно установить справедливость следующего утверждения

**Теорема 2.8.** *Пусть* $\alpha(t) \leq 0$ *при* $t \geq 0$, $\int\limits_0^t a(\tau)d\tau \geq M > -\infty, b(t) \geq \varepsilon > 0$. *Пусть, далее,* $f(x)$ *удовлетворяет условию (2.28). Тогда все решения уравнения (1.10) ограничены на* $[0, +\infty)$ *вместе с первыми производными.*

Например, все решения уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x}\sin(\alpha t) + \beta\exp\Big[\frac{2\cos\alpha t}{\alpha} + \frac{a}{t+b}\Big]\cdot x = 0,$$

где $\alpha \neq 0, \beta > 0, a \geq 0, b \neq 0$, ограничены вместе с первыми производными на $[0, +\infty)$ .

Из следствия 1.4 непосредственно вытекает следующая

**Теорема 2.9.** *Пусть выполнено условие (1.14) при всех* $t \geq 0$. *Тогда:*

*1) если* $b(t) > 0$, *то все решения уравнения (1.10') ограничены на* $[0, \infty)$, *а для производных справедлива оценка (2.14);*

*2) если b(t)<0 при* $t \geq 0$ *и*

$$\int\limits_0^\infty \sqrt{-b(t)}dt < +\infty,$$

*то все решения u(t) уравнения (1.10') ограничены на* $[0, \infty)$, *причем существует конечный предел* $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)$.

Следует отметить, что хотя во втором пункте теоремы 2.9 функция $b(t)$ и отрицательна, тем не менее решения уравнения $(1.10')$ ограничены.

Например, все решения $x(t)$ уравнения

$$\ddot{x} + \frac{2t}{t^2+1}\dot{x} - \frac{1}{(t^2+1)^2}x = 0$$

ограничены на $[0, \infty)$, причем

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x(0)ch\frac{\pi}{2} + \dot{x}(0)sh\frac{\pi}{2}, \lim_{t\to+\infty}\dot{x}(t) = 0.$$

В заключение сформулируем одну теорему о стремлении к нулю решений уравнения

$$\ddot{y} + b(t)y = 0. \qquad (2.30)$$

 

**Теорема 2.10.** *Все решения уравнения (2.30) стремятся к нулю при $t \to +\infty$, если функция $b(t)$ представима в виде*

$$b(t) = \omega^4(t) + \frac{\ddot{\omega}(t)}{\omega(t)} - 2\Big(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\Big)^2, \qquad (2.31)$$

*где $\omega(t) > o$ при $t \geq 0$ и $\lim_{t\to+\infty} \omega(t) = +\infty$.*

**Доказательство.** С помощью замены $y = \frac{u}{\omega}$ уравнение(2.30) можно свести к виду

$$\ddot{u} - \frac{2\dot{\omega}}{\omega}\dot{u} + \omega^4 u = 0. \qquad (2.32)$$

Очевидно, что коэффициенты уравнения (2.32) удовлетворяют условию (1.14) при всех $t \geq 0$ . Следовательно, общее решение уравнения (2.32) имеет вид

$$u(t) = C_1 \sin \int_0^t \omega^2(\tau)d\tau + C_2 \cos \int_0^t \omega^2(\tau)d\tau,$$

откуда следует ограниченность u(t)на $[0, \infty)$. Но тогда $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{\omega(t)} = 0$, и теорема 2.10 доказана.

**Литература**


1. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Иностранная литература, 1954.
2. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений– М.: Иностранная литература, 1958.
3. *Зборник И.*, в кн [5],Дополнения, 659-669.
4. *Изюмова Д.Б., Кигурадзе И.Т.* Дифференциальные уравнения. – 1968. – Т. 4. – N1. – С. 589-605.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М: Физматгиз, 1961.
6. *Клоков Ю.А.* Успехи математических наук. – 1958. – Т. 13. – N 2. – С. 189-195.
7. *Левин А.Ю.* Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 153. – N6.
8. *Левин А.Ю.* Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 141. – N6. – С.1298-1301.
9. *Мамий К.С.* Вестник МГУ. – 1967. – N2. – С. 3-9.
10. *Скрипник В.П.* Изв.вузов. Сер. Математика. – 1962. – N2(27). – С. 151-161.
11. *Старжинский В.П.* ПММ, XVI,3,369-374,1952.
12. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М: Мир, 1964.
13. *Coffman C.V. Ullrich D.F.* Monatsh. Math.,71,5,385-392,1967.
14. *Liang Lhong-Chao.* Chiness Math.,3,2,169-183,1963.
15. *Олехник С.Н.* Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5. – N11. – С. 2093-2095.
16. *Мамий К.С., Мирзов Д.Д.* Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т. 5. – N7. – С. 1330-1332.


## On the behaviour of the solutions on semi-axis of certain nonlinear second order differential equations

**K. S. Mamij**


In present paper some sufficient conditions of the expandability, boundedness, oscillations and tending to zero as $t \to +\infty$ the solutions of the equation

$$\ddot{u} + a(t, u, \dot{u}) + b(t)f(u) = 0$$

are obtained.


 