Труды ФОРА

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д.С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, Майкоп.

Для дифференциальной системы Ляпунова найдены достаточные условия рождения предельного цикла из особой точки типа «фокус» с двумя нулевыми характеристическими числами в случае, когда она превращается в узел противоположной устойчивости с одним нулевым характеристическим числом. В рассматриваемом случае фокус и узел являются особыми точками одной и той же кратности $2n-1$, где $n>1$ и $n\in Z$.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt}=y+P_2(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q_2(x,y) \tag{1}$$

с аналитическими правыми частями, причём $P_2(x,y)$ и $Q_2(x,y)$ не содержат свободных и линейных членов. Ляпунов А.М. показал [1], что начало координат системы (1) является особой точкой второй группы (центром или фокусом) тогда и только тогда, когда

$$Q_2(x,F(x))\equiv a_1x^{2n-1}+\ldots \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial P_2(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Q_2(x,y)}{\partial y}\right)_{y=F(x)}\equiv A_1x^{n-1}+b_1x^n+\ldots$$

$A_1^2+4na_1<0$, где $y=F(x)$ – аналитическая в окрестности $x=0$ функция, определяемая уравнением $y+P_2(x,y)=0$, причём $F(0)=0$, n–целое число, большее единицы. Применяя к системе (1) преобразование [2] $x=(-a_1)^{-\frac{1}{2n-2}}x_1,\ y=(-a_1)^{-\frac{1}{2n-2}}y_1+\sum_{k=2}^{n}B_kx^k$

и не меняя обозначений переменных x и y, получаем систему

$$\frac{dx}{dt}=y+ax^{n+1}+\ldots+P(x,y)y\equiv y+\sum_{k=2}^{\infty}\overline{P}_k(x,y) \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt}=-x^{2n-1}+\ldots+\left(Ax^{n-1}+bx^n+\ldots\right)y+Q(x,y)y^2\equiv\sum_{k=2}^{\infty}\overline{Q}_k(x,y),$$

где $\overline{P}_k,\overline{Q}_k$ – однородные полиномы которой степени, $P(0;0)=0$, $4n-A^2>0$.

Рассмотрим частный случай системы (3)

$$\frac{dx}{dt}=y+Mx^{2n-1}+Nx^{2n}+\ldots+P(x,y)y\equiv y+\sum_{k=2}^{\infty}\tilde{P}_k(x,y) \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dt}=-x^{2n-1}+\ldots+\left(Ax^{n-1}+bx^n+\ldots\right)y+Q(x,y)y^2\equiv\sum_{k=2}^{\infty}\tilde{Q}_k(x,y),$$

Не сужая общности рассуждений, считаем $M=0$, ибо в противном случае применяем линейное невырожденное преобразование $x=x_1-My_1,\ y=y_1$ (5)

Наша задача состоит в том, чтобы путём изменения правых частей системы (4) добиться появления предельного цикла в достаточно малой окрестности начала координат.

Имеет место

Теорема 1. *Если $O(0;0)$ – неустойчивый (устойчивый) фокус системы (4), то для системы*

$$\frac{dx}{dt} = y + \sum_{k=2}^{\infty} \widetilde{P}_k(x,y),\ \frac{dy}{dt} = \sum_{k=2}^{\infty} \widetilde{Q}_k(x,y) + my \tag{6}$$

при достаточно малых $|m|$ и $m<0$ ($m>0$) $O(0;0)$ – устойчивый (неустойчивый) узел, окружённый по крайней мере одним неустойчивым (устойчивым) предельным циклом.

Доказательство. Очевидно, начало координат есть сложная особая точка кратности $2n\text{-}1$, но при этом $\sigma=m\neq 0$. Следуя [3], к системе (6) применим неособенное преобразование $\overline{x}=-mx+y$, $\overline{y}=y$ при $m<0$. В результате (6) примет вид

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \frac{\overline{x}^{2n-1}}{m^{2n-1}} + F_2(\overline{x},\overline{y}),\ \frac{d\overline{y}}{dt} = m\overline{y} + G_2(\overline{x},\overline{y}) \tag{7}$$

где F_2 G_2 не содержит линейных и свободных членов по совокупности переменных $\overline{x}$ и $\overline{y}$.

Согласно [3] $O(0,0)$ – устойчивый топологический узел. Так как $\widetilde{P}'_{kx}(0,0) + \widetilde{Q}'_{kx}(0,0) + m \equiv \sigma(0,0) \neq 0$ и $\sigma(x,y)$ – непрерывна, то в достаточно малой окрестности точки $O(0,0)$ $\sigma(x,y)$ сохраняет свой знак, а стало быть, по признаку Дюлака-Бендиксона [4] в указанной окрестности отсутствуют любые замкнутые контуры, составленные из траекторий системы (6). Ввиду того, что при $m=0$ $O(0,0)$ была неустойчивым фокусом, при достаточно малом $|m|$ и $m<0$ в достаточно малой окрестности точки O найдутся два цикла без контакта C_1 и C_2, окружающих O так, что траектории (6) пересекают C_1, входя внутрь, а C_2 – выходя наружу. По принципу кольца [5] начало координат окружает по крайней мере один неустойчивый предельный цикл.

В случае, когда O(0,0) – устойчивый фокус, применяем преобразование $\overline{x} = mx - y, \overline{y} = y$, в результате чего получаем систему $\frac{d\overline{x}}{dt} = -\frac{\overline{x}^{2n-1}}{m^{2n-1}} + \overline{F}_2(\overline{x},\overline{y}), \frac{d\overline{y}}{\mathrm{dt}} = m\overline{y} + \overline{G}_2(\overline{x},\overline{y})$, где $m>0$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Если $n=2$, то в системе (3) с помощью преобразования (5), где $M=a$, можно добиться равенства нулю коэффициента a. Поэтому утверждение теоремы 1 остается в силе для (3).

Замечание 2. В условиях теоремы 1 из кратной особой точки второй группы типа «фокус» рождается по крайнем мере один предельный цикл той же устойчивости, что и сам кратный фокус. При этом фокус превращается в узел той же кратности, что и фокус, но противоположной устойчивости.

Для сравнения заметим [6], что из фокуса с чисто мнимыми характеристическими корнями при смене его устойчивости рождается предельный цикл, но при этом негрубый фокус превращается в грубый фокус противоположной устойчивости.

Далее рассмотрим кубическую систему

$$\frac{dx}{dt} = y - y^2 \equiv P(x,y) \tag{8}$$

$$\frac{dy}{dt} = -x^3 + d_{11}xy + d_{21}x^2y + d_{12}xy^2 + my \equiv Q(x,y),$$

где
$$8 - d_{11}^2 > 0 \tag{9}$$

Как отмечено выше, при $m=0$ $O(0,0)$ – особая точка типа «фокус» или «центр», т.е. налицо проблема различения.

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$d_{21}^2 + 4(d_{11} + d_{12}) < 0 \tag{10}$$

Теорема 2. *Если $m=0$, $d_{21}>0$ ($d_{21}<0$) и кроме того, выполнены условия (9) и (10), то система (8) ациклична, причем, $O(0,0)$ – неустойчивый (устойчивый) фокус.*

Доказательство. Легко видеть, что особая точка $A(0;0)$ – седло, ибо $\Delta=d_{11}+d_{12}<0$ (это следует из (10)). В силу системы (8) никакой замкнутый контур, составленный из траекторий системы (8) не может пересекать изоклину бесконечности $y=1$.

Рассмотрим функцию

$$\Delta(x,y) = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} + \frac{Q(-x,y)}{P(-x,y)} = \frac{d_{21}x^2}{1-y}, \ y \neq 0 \tag{11}$$

В области возможного расположения замкнутых траекторий (в полуплоскости $y<1$) функция (11) знакопостоянна.

Следовательно, система ациклична, а значит $O(0,0)$ – фокус. Выясним характер его устойчивости. Для этого воспользуемся системой сравнения.

При $d_{21}=0$ функция (11) тождественно равна нулю, что свидетельствует о симметрии векторного поля системы (8) относительно оси ординат (см. рис.1). Так как $\frac{d}{d_{21}}\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y} > 0$, то при d_{21} увеличивающемся (уменьшающемся) вектор поля системы (8) вращается против часовой стрелки (по часовой стрелке). Поэтому при $d_{21}>0$ ($d_{21}<0$) фокус $O(0,0)$ – неустойчивый (устойчивый) (см.рис.2,3). Теорема доказана.

Согласно замечанию 1 к теореме 1 из устойчивого (неустойчивого) фокуса при $m>0$, $d_{21}<0$ ($m<0$, $d_{21}>0$) рождается по крайнем мере один устойчивый (неустойчивый) предельный цикл системы (8). При этом фокус превращается в топологический узел противоположной устойчивости.

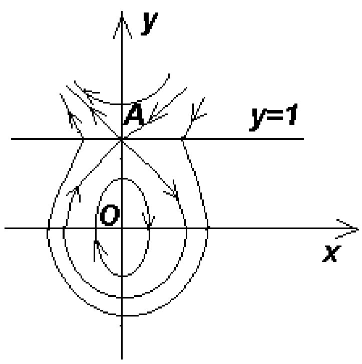

Рис. 1

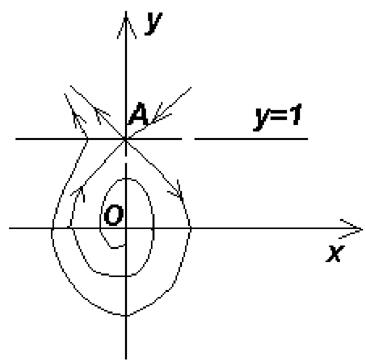

Рис. 2

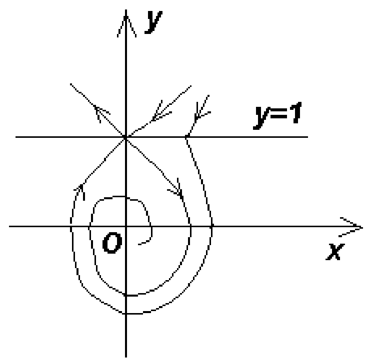

рис. 3

Литература

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
2. *Амелькин В.В. и др.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. – Мн.: Изд-во БГУ, 1982.
3. *Андронов А.А. и др.* Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966.
4. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959.
5. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Мн.: Наука и техника, 1979.
6. *Андронов А.А. и др.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1967.

On periodical solutions one system of differential equations

D.S. Ushkho

The conditions of birth of limit cycle from critical point types of "focus" for differential system of Liapunov are founded.

