

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д.С. Ушко

Адыгейский государственный университет, Майкоп.

Для дифференциальной системы Ляпунова найдены достаточные условия рождения предельного цикла из особой точки типа «фокус» с двумя нулевыми характеристическими числами в случае, когда она превращается в узел противоположной устойчивости с одним нулевым характеристическим числом. В рассматриваемом случае фокус и узел являются особыми точками одной и той же кратности $2n-1$, где $n > 1$ и $n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = y + P_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y) \quad (1)$$

с аналитическими правыми частями, причём $P_2(x, y)$ и $Q_2(x, y)$ не содержат свободных и линейных членов. Ляпунов А.М. показал [1], что начало координат системы (1) является особой точкой второй группы (центром или фокусом) тогда и только тогда, когда

$$Q_2(x, F(x)) \equiv a_1 x^{2n-1} + \dots \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial P_2(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q_2(x, y)}{\partial y} \right)_{y=F(x)} \equiv A_1 x^{n-1} + b_1 x^n + \dots$$

$A^2_1 + 4na_1 < 0$, где $y = F(x)$ – аналитическая в окрестности $x=0$ функция, определяемая уравнением $y + P_2(x, y) = 0$, причём $F(0) = 0$, n – целое число, большее единицы. Применяя к системе (1) преобразо-

$$\text{вание [2]} \quad x = (-a_1)^{-\frac{1}{2n-2}} x_1, \quad y = (-a_1)^{-\frac{1}{2n-2}} y_1 + \sum_{k=2}^n B_k x^k$$

и не меняя обозначений переменных x и y , получаем систему

$$\frac{dx}{dt} = y + ax^{n+1} + \dots + P(x, y)y \equiv y + \sum_{k=2}^{\infty} \bar{P}_k(x, y) \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x^{2n-1} + \dots + (Ax^{n-1} + bx^n + \dots)y + Q(x, y)y^2 \equiv \sum_{k=2}^{\infty} \bar{Q}_k(x, y),$$

где \bar{P}_k, \bar{Q}_k – однородные полиномы k -й степени, $P(0; 0) = 0$, $4n - A^2 > 0$.

Рассмотрим частный случай системы (3)

$$\frac{dx}{dt} = y + Mx^{2n-1} + Nx^{2n} + \dots + P(x, y)y \equiv y + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{P}_k(x, y) \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x^{2n-1} + \dots + (Ax^{n-1} + bx^n + \dots)y + Q(x, y)y^2 \equiv \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{Q}_k(x, y),$$

Не сужая общности рассуждений, считаем $M=0$, ибо в противном случае применяем линейное невырожденное преобразование $x = x_1 - My_1$, $y = y_1$ (5)

Наша задача состоит в том, чтобы путём изменения правых частей системы (4) добиться появления предельного цикла в достаточно малой окрестности начала координат.

Имеет место

Теорема 1. Если $O(0; 0)$ – неустойчивый (устойчивый) фокус системы (4), то для системы

$$\frac{dx}{dt} = y + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{P}_k(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{Q}_k(x, y) + my \quad (6)$$

при достаточно малых $|m|$ и $m < 0$ ($m > 0$) $O(0; 0)$ – устойчивый (неустойчивый) узел, окружённый по крайней мере одним неустойчивым (устойчивым) предельным циклом.

Доказательство. Очевидно, начало координат есть сложная особая точка кратности $2n-1$, но при этом $\sigma = m \neq 0$. Следуя [3], к системе (6) применим неособенное преобразование $\bar{x} = -mx + y$, $\bar{y} = y$ при $m < 0$. В результате (6) примет вид

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\bar{x}^{2n-1}}{m^{2n-1}} + F_2(\bar{x}, \bar{y}), \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = m\bar{y} + G_2(\bar{x}, \bar{y}) \quad (7)$$

где F_2 , G_2 не содержит линейных и свободных членов по совокупности переменных \bar{x} и \bar{y} .

Согласно [3] $O(0, 0)$ – устойчивый топологический узел. Так как $\tilde{P}'_{kx}(0, 0) + \tilde{Q}'_{kx}(0, 0) + m \equiv \sigma(0, 0) \neq 0$ и $\sigma(x, y)$ – непрерывна, то в достаточно малой окрестности точки $O(0, 0)$ $\sigma(x, y)$ сохраняет свой знак, а стало быть, по признаку Дюлака-Бендиксона [4] в указанной окрестности отсутствуют любые замкнутые контуры, составленные из траекторий системы (6). Ввиду того, что при $m=0$ $O(0, 0)$ была неустойчивым фокусом, при достаточно малом $|m|$ и $m < 0$ в достаточно малой окрестности точки O найдутся два цикла без контакта C_1 и C_2 , окружающих O так, что траектории (6) пересекают C_1 , входя внутрь, а C_2 – выходя наружу. По принципу кольца [5] начало координат окружает по крайней мере один неустойчивый предельный цикл.

В случае, когда $O(0, 0)$ – устойчивый фокус, применяем преобразование $\bar{x} = mx - y$, $\bar{y} = y$, в

результате чего получаем систему $\frac{d\bar{x}}{dt} = -\frac{\bar{x}^{2n-1}}{m^{2n-1}} + \bar{F}_2(\bar{x}, \bar{y})$, $\frac{d\bar{y}}{dt} = m\bar{y} + \bar{G}_2(\bar{x}, \bar{y})$, где $m > 0$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Если $n=2$, то в системе (3) с помощью преобразования (5), где $M=a$, можно добиться равенства нулю коэффициента a . Поэтому утверждение теоремы 1 остается в силе для (3).

Замечание 2. В условиях теоремы 1 из кратной особой точки второй группы типа «фокус» рождается по крайней мере один предельный цикл той же устойчивости, что и сам кратный фокус. При этом фокус превращается в узел той же кратности, что и фокус, но противоположной устойчивости.

Для сравнения заметим [6], что из фокуса с чисто мнимыми характеристическими корнями при смене его устойчивости рождается предельный цикл, но при этом негрубый фокус превращается в грубый фокус противоположной устойчивости.

Далее рассмотрим кубическую систему

$$\frac{dx}{dt} = y - y^2 \equiv P(x, y) \quad (8)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x^3 + d_{11}xy + d_{21}x^2y + d_{12}xy^2 + my \equiv Q(x, y),$$

$$\text{где} \quad 8 - d_{11}^2 > 0 \quad (9)$$

Как отмечено выше, при $m=0$ $O(0, 0)$ – особая точка типа «фокус» или «центр», т.е. налицо проблема различения.

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$d_{21}^2 + 4(d_{11} + d_{12}) < 0 \quad (10)$$

Теорема 2. Если $m=0$, $d_{21} > 0$ ($d_{21} < 0$) и кроме того, выполнены условия (9) и (10), то система (8) ациклична, причем, $O(0, 0)$ – неустойчивый (устойчивый) фокус.

Доказательство. Легко видеть, что особая точка $A(0; 0)$ – седло, ибо $\Delta = d_{11} + d_{12} < 0$ (это следует из (10)). В силу системы (8) никакой замкнутый контур, составленный из траекторий системы (8) не может пересекать изоклину бесконечности $y=1$.

Рассмотрим функцию

$$\Delta(x, y) = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} + \frac{Q(-x, y)}{P(-x, y)} = \frac{d_{21}x^2}{1-y}, y \neq 0 \quad (11)$$

В области возможного расположения замкнутых траекторий (в полуплоскости $y < 1$) функция (11) знакопостоянна.

Следовательно, система ациклична, а значит $O(0,0)$ – фокус. Выясним характер его устойчивости. Для этого воспользуемся системой сравнения.

При $d_{21}=0$ функция (11) тождественно равна нулю, что свидетельствует о симметрии векторного поля системы (8) относительно оси ординат (см. рис.1). Так как $\frac{d}{d_{21}} \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y} > 0$, то при d_{21}

увеличивающемся (уменьшающемся) вектор поля системы (8) вращается против часовой стрелки (по часовой стрелке). Поэтому при $d_{21} > 0$ ($d_{21} < 0$) фокус $O(0,0)$ – неустойчивый (устойчивый) (см.рис.2,3). Теорема доказана.

Согласно замечанию 1 к теореме 1 из устойчивого (неустойчивого) фокуса при $m > 0$, $d_{21} < 0$ ($m < 0$, $d_{21} > 0$) рождается по крайней мере один устойчивый (неустойчивый) предельный цикл системы (8). При этом фокус превращается в топологический узел противоположной устойчивости.

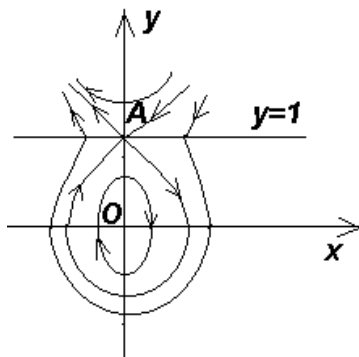


Рис. 1

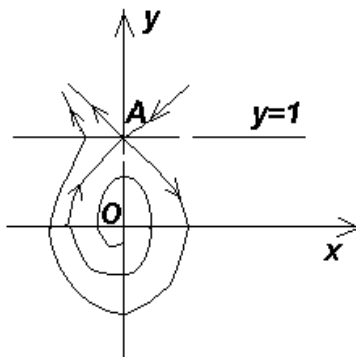


Рис. 2

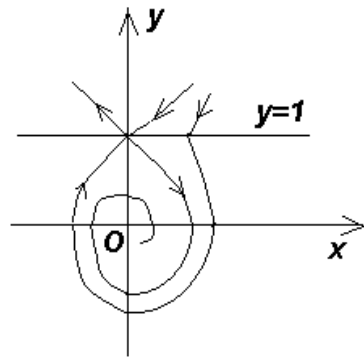


рис. 3

Литература

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
2. Амелькин В.В. и др. Нелинейные колебания в системах второго порядка. – Мн.: Изд-во БГУ, 1982.
3. Андронов А.А. и др. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966.
4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959.
5. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Мн.: Наука и техника, 1979.
6. Андронов А.А. и др. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1967.

On periodical solutions one system of differential equations

D.S. Ushkho

The conditions of birth of limit cycle from critical point types of "focus" for differential system of Liapunov are founded.