ИНДУКТИВНОЕ И ПРОЕКТИВНОЕ ОПИСАНИЕ СХЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

А.Б Шишкин, Н.Н. Шевцов

Армавирский государственный педагогический институт, г. Армавир

В статье рассматривается попытка подвести единую математическую базу под известные теоремы двойственности, что позволяет переформулировать каждую из них в соответствии с единым стандартом.

Мотивация. В самых различных областях математики возникают отдельные предложения или группы предложений, обычно, объединяемые в блоки под общим названием – двойственность (законы де Моргана в математической логике называют законами двойственности; теория топологических сопряженных к локально выпуклым пространствам в функциональном анализе называется теорией двойственности; такое же название носит теория характеров в теории локально компактных групп и т.д.). Общее название отражает наличие определенной, осознанной на уровне интуиции, математической однотипности этих предложений. Настоящая работа представляет собой попытку подвести под все известные (по крайней мере авторам) теоремы двойственности единую математическую базу, позволяющую переформулировать каждую из них в соответствии с единым стандартом. Такая возможность существует. Ее представляет возникшая в условиях теории спектрального синтеза трактовка двойственных переходов, как переходов от внутреннего описания одних математических объектов (инвариантных подпространств) к внешнему описанию других математических объектов (подмодулей аналитических функций).

Выберем произвольный математический объект – множество, наделенной какой-либо математической структурой. Предположим, что он допускает один из двойственных видов описания (однозначного восстановления): описание по некоторой совокупности внутренних своих подструктур – *индуктивное (внутреннее) описание*, или описание по некоторой совокупности более богатых надструктур – *проективное (внешнее) описание*. Будем называть такой объект *универсальным*. Из того факта, что универсальный объект допускает индуктивное описание (соответственно, проективное описание), вытекает вопрос: допускают ли подструктуры (соответственно, надструктуры) универсального объекта аналогичное описание? Этот вопрос составляет суть задач *индуктивного и проективного* описаний.

На практике, всякому универсальному объекту, допускающему одно из описаний, как правило, удается поставить в соответствие другой универсальных объект, допускающий другое по характеру описание. Если это соответствие удается распространить на подструктуры (надструктуры) универсальных объектов, то говорят, что имеет место *принцип двойственности*. Возникает вопрос: определяется ли возможность описания подструктуры (надструктуры) одного универсального объекта возможностью описания соответствующей надструктуры (подструктуры) другого универсального объекта? В случае положительного ответа на этот вопрос говорят о *двойственном переходе* от описания одного характера к описанию другого характера. Возможность двойственных переходов утверждают так называемые схемы двойственности. Последние, в свою очередь, лежат в основе доказательства специальных *теорем двойственности*, используемых в решении конкретных математических задач.

Понимание двойственного перехода, как перехода от описания одного характера к описанию другого характера, возникло, главным образом, благодаря работам И.Ф.Красичкова-Терновского (см., например, [3],[4]) и А.Б.Шишкина [5],[6]. В [6] приведена схема двойственности, послужившая толчком к разработке схемы двойственности излагаемой ниже.

Вполне изотонные отображения. Множество X называется частично упорядоченным, если для некоторых пар его элементов x и y определено отношение $x<y$ (x меньше y), причем выполнены два условия: $x<y$ исключает $x=y$; если $x<y$ и $y<z$, то $x<z$. Пишем $x\leq y$,если, как обычно имеет место одно из двух соотношений $x<y$ или $x=y$.

Отображение $m{:}X\to Y$, где X,Y – частично упорядоченные множества, называется изотонным (соответственно, антитонным), если для любых $x_1,x_2\in X$ таких, что $x_1\leq x_2$, выполнено неравенство

$m(x_1)\le m(x_2)$ (соответственно, $m(x_2)\le m(x_1)$). Изотонное (соответственно, антитонное) отображение $m:X\to Y$ называется *порядковым изоморфизмом* (соответственно, *порядковым антиизоморфизмом*), если оно взаимно однозначно эпиморфно и соотношение $x_1<x_2$ имеет место тогда и толькл тогда, когда имеет место соотношение $m(x_1)\le m(x_2)$ (соответственно, $m(x_2)\le m(x_1)$). Изотонное отображение $m:X\to Y$ называется вполне изотонным индуктивным (соответственно, вполне изотонно проективным), если для любого $y\in Y$ множество $\{x\in X:m(x)\le y\}$ (соответственно, $\{x\in X: y\le m(x)\}$ обладает наибольшим (соответственно, наименьшим) элементом. Всякое вполне изотонное индуктивное (соответственно, проективное) отображение $m:X\to Y$ обладает *условно обратным* отображением m^{-1}: $Y\to X$, которое каждому элементу $y\in Y$ ставит в соответствие наибольший (соответственно, наименьший) элемент множества $\{x\in X:m(x)\le y\}$ (соответственно, $\{x\in X: y\le m(x)\}$). Для всякого вполне изотонного индуктивного (соответственно, проективного) отображения имеют место следующие соотношения:

$$m\circ m^{-1}(y)\le y\ \forall y\in Y \text{ (соответственно, } y \le m\circ m^{-1}(y)\ \forall y\in Y), \tag{1}$$

$$x \le m^{-1}\circ m(x)\ \ \forall x\in X \text{ (соответственно, } m^{-1}\circ m(x)\le x\ \forall x\in X). \tag{2}$$

Первое соотношение следует непосредственно из определения условно обратного отображения. Докажем второе соотношение. Пусть $x\in X$ и $y=m(x)$. Тогда $x\in\{x'\in X: m(x')\le y)\}$ (соответственно, $x\in\{x'\in X: y\le m(x')\}$). Так как $m^{-1}(y)$ – наибольший (соответственно, наименьший) элемент множества $\{x'\in X: m(x')\le y)\}$(соответственно, $\{x'\in X: y\le m(x')\}$), то $x\le m^{-1}(y)=m^{-1}\circ m(x)\le x)$.

Условно обратное отображение является изотонным независимо от того, каким является исходное отображение – вполне изотонным индуктивным или вполне изотонным проективным. Действительно, допустим, что исходное отображение $m:X\to Y$ является вполне изотонным индуктивным (соответственно, проективным) и $y_1\le y_2$. Тогда $\{x\in X:m(x)\le y_1)\}\subseteq \{x\in X:m(x)\le y_2\}$ (соответственно, $\{x\in X: y_2\le m(x)\} \subseteq \{x\in X:y_1\le m(x)\}$). Значит, $m^{-1}(y_1)\le m^{-1}(y_2)$.

Из соотношений (1) ,(2) и изотонности условно обратных отображений вытекает, что для всех $y\in Y$ справедливы равенства $m^{-1}\circ m\circ m^{-1}(y)= m^{-1}(y)$, $m^{-1}\circ m\circ m^{-1}(x)= m^{-1}(x)$. Другими словами, для любого x из условного прообраза $m^{-1}(Y)$ справедливо равенство

$$m^{-1}\circ m(x)= x, \tag{3}$$

а для любого y из образа m(X) справедливо равенство

$$m\circ m^{-1}(y)= y. \tag{4}$$

Следовательно, сужение отображения m^{-1} на множество m(X) и сужение m на множество m(Y) являются взаимно обратными отображениями.

Предложение 1. *Пусть X,Y – частично упорядоченные множества. Отображение $h:X\to Y$ является вполне изотонным индуктивным (соответственно, проективным) тогда и только тогда, когда существует изотонное отображение $r:Y\to X$, удовлетворяющее условиям:*

$$h\circ r(y)\le y\ \ \forall y\in Y \text{ (соответственно } y\le h\circ r(y)\ \ \forall y\in Y), \tag{5}$$

$$x\le r\circ h(x)\ \ \forall x\in X \text{ (соответственно } r\circ h(x)\le x\ \ \forall x\in X). \tag{6}$$

Отображения r, удовлетворяющее условиям (5), (6) и условно обратное отображение h^{-1} совпадают.

Доказательство. Пусть $h:X\to Y$ – вполне изотонное индуктивное (соответственно, проективное) отображение. Как показано выше, его условно обратное отображение удовлетворяет условиям (5),(6). Допустим, что существует изотонное отображение $r:X\to Y$, удовлетворяющее условиям (5),(6). Покажем, что отображение является вполне изотонным индуктивным (соответственно, проективным). Выберем произвольный элемент $y\in Y$ и рассмотрим множество $\{x\in X:h(x)\le y\}$ (соответственно, $\{x\in X: y\le h(x)\}$). Из (5) вытекает, что это множество содержит элемент r(y). С другой стороны, если x принадлежит этому множеству, то $r\circ h(x)\le r(y)$ (соответственно, $r(y)\le r\circ h(y)$. В силу (6) имеем $x\le r\circ h(x)\le r(y)$ (соответственно, $r(y) \le r\circ h(x) \le x$). Другими словами, элемент r(y) является наибольшим (соответственно наименьшим) элементом множества $\{x\in X:h(x)\le y\}$ $\{x\in X: y\le h(x)\}$). Это означает, что отображение h является вполне изотонным индуктивным (соотв. проективным). При этом $h^{-1}(y)=r(y)$.

Вполне антитонные отображения. Антитонное отображение $m:X\to Y$ называется *вполне антитонным индуктивным* (соотв. *вполне антитонным проективным*), если для любого $y\in Y$ множество $\{x\in X: y\le m(x)\}$ (соотв. $\{x\in X: m(x)\le y\}$) обладает наибольшим (соответственно наименьшим) элементом. Если заменить порядок в Y его «обратным» порядком: $y_1 \prec y_2 \Leftrightarrow y_2<y_1$, то вполне антитонное индуктивное (соответственно проективное) отображение становится вполне изотонным проективным (соотв. индуктивным). Этим объясняется тесная связь свойств вполне антитонных отображений со свойствами вполне изотонных отображений. Всякое вполне антитонное

индуктивное (соотв. проективное) отображение $m:X\to Y$ обладает *условно обратным* отображением m^{-1}: $Y \to X$. Оно каждому элементу $y\in Y$ ставит в соответствие наибольший (соотв. наименьший) элемент множества $\{x\in X:\ m(x)\ \le y\}$ (соответственно $\{x\in X:\ y\le m(x)\ \}$). Для всякого вполне антитонного индуктивного (проективного) отображения имеют место соотношения:

$$y\le m\circ m^{-1}(y)\ \forall y\in Y(\text{соотв. } m\circ m^{-1}(y)\le y\ \forall y\in Y), \tag{7}$$

$$x\le m^{-1}\circ m(x)\ \forall x\in Y(\text{соотв. } m^{-1}\circ m(x)\le x\ \forall x\in X), \tag{8}$$

двойственные соотношениям (1) и (2). Условно обратное отображение является антитонным независимо от того, каким является исходное отображение – индуктивным или проективным. Для любого x из условного прообраза $m^{-1}(Y)$ справедливо равенство (3), а для любого y из образа $m(X)$ справедливо равенство (4). Значит, как и прежде, сужение отображения m^{-1} на множество $m(X)$ и сужение m на множество $m^{-1}(Y)$ являются взаимно обратными отображениями.

Предложение 2. *Пусть X,Y – частично упорядоченные множества. Отображение $h : X\to Y$ является вполне антитонным индуктивным (соотв. проективным) тогда и только тогда, когда существует антитонное отображение $r : X\to Y$, удовлетворяющее условиям :*

$$y\le h\circ r(y)\ \forall y\in Y(\text{соотв. } h\circ r(y)\le y\ \forall y\in Y), \tag{9}$$

$$x\le r\circ h(x)\ \forall x\in Y(\text{соотв. } r\circ h(x)\le x\ \forall x\in X), \tag{10}$$

Отображения r, удовлетворяющее условиям (9),(10) и условно обратное отображение h^{-1} совпадают.

Доказательство этого предложения легко получить, осуществив локальные изменения в доказательстве предложения 1.

Предложение 3. *Пусть X,Y,A,B – частично упорядоченные множества; $m : A\to X$ –вполне изотонное индуктивное (проективное) отображение,*

$h : X\to Y$ – вполне антитонное индуктивное (проективное) отображение,

$\eta : A\to B$ – вполне антитонное проективное (индуктивное) отображение.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ m\ \uparrow & & \uparrow\ n \\ A & \xrightarrow[\eta]{} & B \end{array}$$

Композиция $n=h\circ m\circ\eta^{-1}$ представляет собой вполне изотонное проективное (индуктивное) отображение. Его условно обратное отображение совпадает с $\eta\circ m^{-1}\circ h^{-1}$.

Доказательство. Прежде всего, условно обратное отображение h^{-1} определено на множестве Y, условно обратное отображение m^{-1} определено на множестве X, значит, отображение n определено на множестве Y. Отображения h^{-1},η являются антитонными, а отображение m^{-1} является изотонным, значит, отображение n является изотонным. Осталось убедится в том, что отображение n является вполне изотонным проективным (соотв. индуктивным). Пусть $y\in Y$ и $b_y=\eta\circ m^{-1}\circ h^{-1}(y)\in Y$. Нам достаточно показать, во-первых, что $y\le n(b_y)$ (соотв. $n(b_y)\le y$), и, во-вторых, что условия $b\in B$, $y\le n(b)$ (соотв. $n(b)\le y$) влекут выполнимость неравенства $b_y\le b$ (соотв. $b\le b_y$). Прежде всего, из определения отображения n вытекает, что $\eta^{-1}(b_y)=(\eta^{-1}\circ\eta)\circ m^{-1}\circ h^{-1}(y)$. Из соотношения (8) вытекает, что $\eta^{-1}(b_y) \le m^{-1}\circ h^{-1}(y)$ (соответственно, $m^{-1}\circ h^{-1}(y)\le\eta^{-1}(b_y)$). Значит, $m\circ\eta^{-1}(b_y) \le (m\circ m^{-1}) \circ h^{-1}(y)$ (соответственно, $(m\circ m^{-1}) \circ h^{-1}(y) \le m\circ\eta^{-1}(b_y)$). В силу соотношения (1) $m\circ\eta^{-1}(b_y) \le h^{-1}(y)$ (соответственно, $h^{-1}(y) \le m\circ\eta^{-1}(b_y)$). Значит, $h\circ h^{-1}(y) \le h \circ m\circ\eta^{-1}(b_y)$ (соответственно, $h \circ m\circ\eta^{-1}(b_y) \le h\circ h^{-1}(y)$). На основании (7) делаем вывод, что $y \le h \circ m\circ\eta^{-1}(b_y)$ (соответственно, $h \circ m\circ\eta^{-1}(b_y) \le y$), т.е. $y \le n(b_y)$ (соответственно, $n(b_y) \le y$). Тем самым, первое утверждение доказано. Перейдем к доказательству второго. Пусть $b\in B$, $y\le n(b)$ (соотв. $n(b)\le y$). Тогда $(h^{-1} \circ h) \circ m\circ\eta^{-1}(b) \le h^{-1}(y)$ (соответственно, $h^{-1}(y) \le (h^{-1} \circ h) \circ m\circ\eta^{-1}(b)$). В силу (8) имеем $m\circ\eta^{-1}(b) \le h^{-1}(y)$ (соответственно, $h^{-1}(y)\le m\circ\eta^{-1}(b)$), значит, $(m^{-1}\circ m) \circ \eta^{-1}(b)\le m^{-1}\circ h^{-1}(y)$ (соответственно, $m^{-1}\circ h^{-1}(y) \le (m^{-1}\circ m) \circ \eta^{-1}(b)$). В силу неравенств (2), получаем $\eta^{-1}(b)\le m^{-1}\circ h^{-1}(y)$ (соответственно, $m^{-1}\circ h^{-1}(y) \le \circ\ \eta^{-1}(b)$). Отсюда вытекает, что $\eta\circ m^{-1}\circ h^{-1}(y) \le (\eta\circ\eta^{-1})(b)$ (соотв. $(\eta\circ\eta^{-1})(b)\le\eta\ \circ m^{-1}\circ h^{-1}(y)$). Наконец, из (7) вытекает неравенство $\eta\circ m^{-1}\circ h^{-1}(y) \le b$ (соотв. $b\le\eta\circ m^{-1}\circ h^{-1}(y)$), т.е. $b_y\le b$ (соотв. $b\le b_y$). Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть X,Y – частично упорядоченные множества. Порядковый изоморфизм (порядковый антиизоморфизм) $h : X\to Y$ является вполне изотонным (вполне антитонным)* *индуктивным и вполне изотонным (вполне антитонным) проективным отображением одновременно. Его условно обратное отображение совпадает с обратным.*

Доказательство. Отображение $r : Y \to X$, обратное к $h : X \to Y$, является изотонным (соотв. антитонным). Остальное вытекает из предложения 1 (соотв. из предложения 2).

Индуктивное описание. Пусть X, A_λ, $\lambda\in\Lambda$, – частично упорядоченные множества; $m_\lambda : A_\lambda \to X$ – вполне изотонные индуктивные отображения. Выделим в X произвольный элемент $x^\#$ (индуктивный универсальный объект) и обозначим $X^\#$ – совокупность всех элементов из X, подчиненных элементу $x^\#$. Пусть $a^\#_\lambda \in A_\lambda$ – условный прообраз $m_\lambda^{-1}(x^\#)$ (индуктивный элемент $x^\#$ в A_λ). Предположим, что элемент $x^\#$ допускает индуктивное (внутреннее) описание, точнее, связан с элементами $a^\#_\lambda$ соотношением $x^\#=\mathbf{F}(m_\lambda(a^\#_\lambda) : \lambda\in\Lambda)$, где $\mathbf{F} : X^\Lambda \to X$ – некоторое отображение (закон индуктивного восстановления), X^Λ – декартова степень X. Говорим, что элемент $x \in X^\#$ *допускает индуктивное описание,* если имеет место соотношение

$$x =\mathbf{F}(m_\lambda(a_\lambda) : \lambda\in\Lambda),$$

где $a_\lambda = m_\lambda^{-1} (x)$ – индуктивный элемент x в A_λ .

Проективное описание. Пусть $Y, B_\lambda, \lambda \in\Lambda$, - частично упорядоченные множества; $n_\lambda : B_\lambda \to Y$ - вполне изотонные проективные отображения. Выделим в Y произвольный элемент $y^\#$ (проективный универсальный объект) и обозначим $Y^\#$ - совокупность всех элементов Y, подчиняющих элемент $y^\#$. Пусть $b^\#_\lambda$ – условный прообраз $n^{-1}{}_\lambda(y^\#)$ (проективный элемент $y^\#$ в B_λ). Предположим, что универсальный объект $y^\#$ связан с проективными элементами $b^\#_\lambda$ соотношением $y^\#=\mathbf{G}(n_\lambda(b^\#_\lambda) : \lambda\in\Lambda)$, где $\mathbf{G} : Y^A \to Y$ – некоторое отображение (закон проективного восстановления), Y^A – декартова степень Y. Говорим, что элемент $y \in Y^\#$ *допускает проективное описание*, если имеет место соотношение $y=\mathbf{G}(n_\lambda(b_\lambda) : \lambda\in\Lambda)$, где $b_\lambda=n^{-1}{}_\lambda(y)$ – проективный элемент y в B_λ.

Односторонний двойственный переход. Пусть Λ – множество; X, A_λ, $\lambda\in\Lambda$, – частично упорядоченные множества; m_λ: $A_\lambda \to X$ $\lambda\in\Lambda$, вполне изотонные индуктивные (соответственно проективные) отображения. Выделим в X универсальный объект $x^\#$, связанный со своими индуктивными (соответственно проективными) элементами $a^\#_\lambda=m^{-1}{}_\lambda(x^\#)$ соотношением

$$x^\# =\mathbf{F}(m_\lambda(a^\#_\lambda):\lambda\in\Lambda),$$

где $\mathbf{F}:X^\Lambda \to X$ – некоторый закон индуктивного (соответственно, проективного) восстановления. Этот объект инициирует конкретную задачу индуктивного (соответственно, проективного) описания.

Пусть Y, B_λ, $\lambda\in\Lambda$, – вполне антитонное индуктивное (соответственно, проективное) отображение; η_λ: $A_\lambda \to B_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$, – вполне антитонные проективные (соответственно, индуктивные) отображения. Накладывая ограничения на выбор отображений h и η_λ, $\lambda\in\Lambda$, будем считать, что выполнены следующие условия:

1) универсальный объект $x^\#$ лежит в условном прообразе $h^{-1}(Y)$;

2) $\mathbf{F}((h^{-1}(Y)))^A) \subseteq h^{-1}(Y)$;

3) $m^{-1}{}_\lambda(h^{-1}(Y)) \subseteq \eta^{-1}{}_\lambda(B_\lambda)$.

Композиция $\mathbf{G} = h \circ \mathbf{F}\circ H^{-1}$ осуществляет отображение Y^A в Y. В силу (3), из условия 2) вытекает, что

$$h^{-1} \circ \mathbf{G} = \mathbf{F}\circ H^{-1} \tag{11}$$

на множестве Y^A и

$$h \circ \mathbf{F} = \mathbf{G}\circ H \tag{12}$$

на множестве $(h^{-1}(Y))^A$, где $H : X^\Lambda \to Y^\Lambda$ – отображение, которое произвольному элементу $(x_\lambda)\in X^A$ ставит в соответствие элемент $(y_\lambda)\in Y^A$, $y_\lambda=h(x_\lambda)$, H^{-1}: $Y^A \to (h^{-1}(Y))^A \subseteq X^\Lambda$ – отображение, которое произвольному элементу $(y_\lambda)\in Y^A$ ставит в соответствие элемент $(x_\lambda)\in X^A$, $x_\lambda=h^{-1}(y_\lambda)$.

Положим $y^\#=h^{-1}(x^\#)$, $n_\lambda= h \circ m_\lambda\circ\eta^{-1}{}_\lambda$, $b^\#_\lambda= n^{-1}{}_\lambda(y^\#)$. По предложению 2 отображение n_λ является вполне изотонным (соответственно, проективным).

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ m_\lambda \uparrow & & \uparrow n_\lambda \\ A_\lambda & \xrightarrow[\eta_\lambda]{} & B_\lambda \end{array}$$

Его условно обратное отображение совпадает с композицией $n^{-1}_{\lambda}=\eta\circ m^{-1}_{\lambda}\circ h^{-1}$. При этом $a^{\#}_{\lambda}=m^{1}_{\lambda}(x^{\#})=m^{-1}_{\lambda}\circ(h^{-1}\circ h)(x^{\#})=(\eta^{-1}_{\lambda}\circ\eta_{\lambda})\circ m^{-1}_{\lambda}\circ h^{-1}(y^{\#})=\eta^{-1}_{\lambda}(b^{\#}_{\lambda})$,
$y^{\#}=h(x^{\#})=h\circ \mathbf{F}(m_{\lambda}(a^{\#}_{\lambda}):\lambda\in\Lambda)=\mathbf{G}\circ H(m_{\lambda}(a^{\#}_{\lambda}):\lambda\in\Lambda)=\mathbf{G}(h\circ m_{\lambda}\circ\eta^{-1}_{\lambda}(b^{\#}_{\lambda}):=\lambda\in\Lambda)=\mathbf{G}(n_{\lambda}(b^{\#}_{\lambda}):\lambda\in\Lambda)$.

Таким образом, элемент $y^{\#}$ можно рассматривать как универсальный объект, инициирующий задачу проективного (соответственно индуктивного) описания, с законом восстановления **G**.

Из условия $x^{\#}\in h^{-1}(Y)$ вытекает, что для $y^{\#}=h(x^{\#})$ выполнено $x^{\#}=h^{-1}(y^{\#})$. При этом, отображения h и h^{-1} являются антигонными. Значит включение $x^{\#}\in X^{\#}$ влечет включение $h(x^{\#})\in Y^{\#}$, а включение $y^{\#}\in Y^{\#}$ влечет включение $h^{-1}(y)\in X^{\#}$. Это означает, что имеет место односторонний принцип двойственности:

$$h(X^{\#})\subseteq Y^{\#},\ h^{-1}(Y^{\#})\subseteq X^{\#}.$$

Схема двойственности (односторонняя). *Элемент $x^{\#}\in h^{-1}(Y)\subseteq X^{\#}$ допускает индуктивное (соответственно , проективное) описание тогда и только тогда, когда элемент $y=h(x)\subseteq Y^{\#}$ допускает проективное (соответственно, индуктивное) описание.*

Доказательство. Из соотношений $b_{\lambda}=n^{-1}_{\lambda}(y)=n^{-1}_{\lambda}\circ h(x)=\eta_{\lambda}\circ m^{-1}_{\lambda}\circ(h^{-1}\circ h)(x)=\eta_{\lambda}\circ m^{-1}_{\lambda}(x)$ вытекает, что индуктивный (соответственно, проективный) элемент y в B_{λ} и проективный (соответственно, индуктивный) элемент x в A_{λ} связаны соотношением $b_{\lambda}=\eta_{\lambda}(a_{\lambda})$. Если элемент x допускает индуктивное (соответственно, проективное описание), то в силу (12) имеем $y=h(x)=h\bullet\mathbf{F}(m_{\lambda}(a_{\lambda}):\lambda\in\Lambda)=\mathbf{G}\circ H(m_{\lambda}(a_{\lambda}):\lambda\in\Lambda)=\mathbf{G}(h\circ m_{\lambda}\circ(\eta^{-1}_{\lambda}\circ\eta_{\lambda})(a_{\lambda}):\ \lambda\in\Lambda)=\mathbf{G}(n_{\lambda}\circ\eta_{\lambda}(a_{\lambda}):\lambda\in\Lambda)=\mathbf{G}(n_{\lambda}(b_{\lambda}):\lambda\in\Lambda)$.

Следовательно, элемент y допускает проективное (индуктивное) описание. С другой стороны, если элемент y допускает проективное (индуктивное) описание, то в силу (11) имеем
$x=(h^{-1}\circ h)(x)=h^{-1}(y)=h^{-1}\circ\mathbf{G}(n_{\lambda}(b_{\lambda}):\lambda\in\Lambda)=\mathbf{F}\circ H^{-1}(n_{\lambda}(b_{\lambda}):\lambda\in\Lambda)=\mathbf{F}(h^{-1}\circ n_{\lambda}\circ\eta_{\lambda}(a_{\lambda}):\lambda\in\Lambda)=\mathbf{G}(m_{\lambda}(a_{\lambda}):\lambda\in\Lambda)$.

Значит, элемент x допускает индуктивное (проективное) описание. Предложение доказано.

Двухсторонний двойственный переход. Пусть X, Y, A_{λ}, B_{λ}, $\lambda\in\Lambda$,– частично упорядоченные множества; $m_{\lambda}:A_{\lambda}\to X$, $\lambda\in\Lambda$, – вполне изотонные индуктивные отображения; $n_{\lambda}:Y\to B_{\lambda}$, $\lambda\in\Lambda$, – вполне изотонные проективные отображения; $h:X\to Y$, $\eta_{\lambda}:A_{\lambda}\to B_{\lambda}$, $\lambda\in\Lambda$, – порядковые антиизоморфизмы. Выделим в X универсальный объект $x^{\#}$, инициирующий задачу индуктивного описания, с законом восстановления $\mathbf{F}:X^{\Lambda}\to X$, а в Y выделим универсальный объект $y^{\#}$, инициирующий задачу проективного описания, с законом восстановления $\mathbf{G}:Y^{\Lambda}\to Y$. Считаем, что $x^{\#}$ и $y^{\#}$ связаны условием $y^{\#}=h(x^{\#})$. Это условие гарантирует выполнение *двухстороннего принципа двойственности:*
$h(X^{\#})=Y^{\#},\ h^{-1}(Y^{\#})=X^{\#}$.

Значит, сужение отображения h на множество $X^{\#}$ является порядковым антиизоморфизмом, устанавливающим взаимно однозначное соответствие между элементами, подчиненными $x^{\#}$, и элементами, подчиняющими $y^{\#}$.

Если диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ m_{\lambda}\ \uparrow & & \uparrow\ n_{\lambda} \\ A_{\lambda} & \xrightarrow[\eta_{\lambda}]{} & B_{\lambda} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ F\ \uparrow & & \uparrow\ G \\ X^{\wedge} & \xrightarrow[H]{} & Y^{\wedge} \end{array}$$

коммутативны, то есть отображения h, m_{λ}, n_{λ}, η_{λ} связаны условием $h\circ m_{\lambda}=n_{\lambda}\circ\eta_{\lambda}$, а отображения h, **F**, **G**, H связаны условием $h\circ\mathbf{F}=\mathbf{G}\circ H$, то оказывается справедливым следующее предложение.

Схема двойственности (двухсторонняя). *Элемент $x\in X^{\#}$ допускает индуктивное описание тогда и только тогда, когда элемент $y=h(x)\in Y^{\#}$ допускает проективное описание.*

Доказательство. Коммутативность отмеченных выше диаграмм влечет выполнение следующих соотношений $n_{\lambda}=h_{\lambda}\circ m_{\lambda}\circ\eta_{\lambda}^{-1}$, $\mathbf{G}=h\circ\mathbf{F}\circ H^{-1}$. Действительно,

$$n_{\lambda}=n_{\lambda}\circ(\eta_{\lambda}\circ\eta_{\lambda}^{-1})=h_{\lambda}\circ m_{\lambda}\circ\eta_{\lambda}^{-1},\ \mathbf{G}=\mathbf{G}\circ(H\circ H^{-1})=h\circ\mathbf{F}\circ H^{-1}.$$

Эти соотношения позволяют завершить доказательство ссылкой на одностороннюю схему двойственности, доказанную выше.

Литература

1. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969.
2. *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. – М.: Наука, 1984.
3. *Красичков-Терновский И.Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. 1. Спектральный синтез на выпуклых областях // Мат. сб. 1972. Т. 87(129). С. 459 – 482.
4. *Красичков-Терновский И.Ф.* Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. 1. Теорема двойственности // Мат. сб. 1991. Т. 182. N 11 С. 1559 – 1588.
5. *Шишкин А.Б.* Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // ДАН РАН. 355. N 1. 1997. С. 28 – 30.
6. *Шишкин А.Б.* Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // Мат. сб. 1998. Т. 189. № 9 С. 143 – 160.

Inductive and projective description the pattern of dual

A.B. Shishkin, N.N. Shevcov

In article unified the mathematical base of familiar reciprocal theorems is constructed.

