1999 г. **№ 4**

Труды ФОРА

ОБ АЛГЕБРАХ КОГОМОЛОГИЙ НЕКОТОРЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В.А.Козлов

Армавирский государственный педагогический институт. Армавир.

С помощью теоремы А.Картана вычислены полиномы Пуанкаре вещественных римановых однородных пространств *SU(N)/SU(3)*, где вложение *SU*(3)→ *SU(N)* задано произвольным неприводимым представлением.

1.Напомним, что всякое риманово однородное пространство M с заданным транзитивным действием группы G отождествляется с множеством классов смежности G/H группы G по подгруппе H, являющейся стабилизатором фиксированной точки $x\in M$, с помощью биекции $y\leftrightarrow gH$, $gH\in G/H$, $y\in M$, где g – произвольный элемент из G:gx=y. Группа G называется группой движений, H – стационарная подгруппа. Мы рассматриваем случай связных компактных групп Ли G и H: стационарная подгруппа H=SU(3) реализована неприводимым представлением наименьшей размерности φ со схемой Дынкина $\overset{p}{\circ}\!-\!\overset{l}{\circ}$, группа движений является линейной группой G=SU(N), действующей в пространстве представления φ, N=dimφ, т.е. SU(N) задана представлением наименьшей размерности /нетривиальным/.

В работе О.В.Мантурова [1] изучались римановы однородные пространста, у которых стационарная подгруппа SU(n) действует в пространстве симметрических или кососимметрических тензоров, а группой движений является линейная группа SU(N), действующая соответственно в указанных пространствах тензоров. Для этих однородных пространств найдены полиномы Пуанкаре /полиномом Пуанкаре многообразием M называется сумма $P(M,t)=\sum_{\lambda} b_{\lambda}t^{\lambda}$, где $\lambda\geq 0$, t – формальная переменная, b_λ – числа Бетти/. Результаты О.В.Мантурова будут нами использоваться.

Основной результат статьи состоит в следующем утверждении.

Теорема 1. *Полином Пуанкаре однородного пространства* G/H , *где* G=SU(N), H=SU(3*), группа* SU(3) *вложена в* SU(N) *с помощью линейного неприводимого представления φ, равен частному от деления полинома Пуанкаре группы* SU(N) *на полином Пуанкаре подгруппы* SU(3)*, если представление φ стационарной подгруппы не является самоконтраградиентным; в противном случае он имеет вид*

$$P(G/H)=\frac{P(SU(N),t)(1+t^5)(1+t^6)}{P(SU(3),t)(1+t^{11})}.$$

Доказательство теоремы 1 состоит из двух частей: в п.3 доказывается первая часть – рассматривается случай, когда представление φ не является самоконтраградиентным /p ≠ l/, в п.4 – вторая часть – рассматривается случай самоконтрагредиентного φ /p=l/. В п.2 подготавливается аппарат.

2. Основным методом вычисления вещественных когомологий однородных пространств G/H связных компактных групп Ли G и H является замечательная теорема А.Картана, к формулировке которой мы сейчас приступим.

Пусть$T_1,T_2,...,T_N$ – координаты картановской подалгебры группы Ли U(N), $t_1,t_2,...,t_N$ – то же для группы Un). В группе U(N) естественно лежит G=SU(N) – группа движений, а в U(n) – стационарная подгруппа G=SU(3) наших однородных пространств. Через H*(G) обозначим алгебру когомологий с вещественными коэффициентами группы Ли G; через S_H – алгебру симметрических полиномов от переменных $t_1,t_2,...,t_N$. При любом вложении Ф подгруппы U(n) в группу U(N), Ф задает выражение весов T_i представления Ф, i=1,2,...,N в виде линейных функций от t_j, j=1,2,...,n:

$$T_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}t_j, \tag{1}$$

так как максимальный тор группы U(n) вкладывается в максимальный тор группы U(N). При вложениях группы SU(n) в группу SU(N) формулу (1) и последующие вычисления будем рассматривать с учетом того, что $\sum_i T_i = 0, \sum_j t_j = 0.$

Каждому образующему элементу $X \in H^*(U(N))$ соответствует определенный симметрический многочлен R(X) от переменных $T_1, T_2, ..., T_N$, инвариантный относительно группы Вейля группы U(N). Через $\Phi^*R(X)$ обозначим от переменных $t_1, t_2, ..., t_N$, полученный из R(X), подстановкой (1), инвариантный относительно группы Вейля группы U(n).

Рассмотрим тензорное произведение $S_H \otimes H^*(G) = C$ над полем вещественных чисел. Введем в него градуировку, положив

$$D(\rho \otimes X) = 2\dim\rho + \dim X\,, \tag{2}$$

где $\dim\rho$ – степень однородного симметрического многочлена ρ, dimX – размерность однородного класса когомологий X. Действие дифференциала d в алгебре C определим условием

$$d(\rho \otimes 1) = 0,\ d(1 \otimes X) = \Phi^*R(X) \otimes 1. \tag{3}$$

Тогда алгебра C является дифференциальной, градуированной и называется алгеброй А.Картана.

Теорема /А.Картан/. Алгебра когомологий H*(G/H) однородного пространства G/H компактных групп G и H изоморфна алгебре когомологий алгебры C.

Хорошо известно, что алгебра когомологий H*(SU(N)) является внешней алгеброй $\Lambda\{X_3, X_5, ..., X_{2N-1}\}$от образующих $X_3, X_5, ..., X_{2N-1}$ степеней 3,5,...2N-1 соответственно. Каждому элементу X_{2s-1}, s=2,3,...,N соответствует симметрический полином степени s:

$$R(X_{2s-1}) = \sum_{i=1}^{N} T_i^s. \tag{4}$$

Для применения теоремы А.Картана надо уметь описывать действие дифференциала d в алгебре А.Картана C. Такое описание удобно делать в терминах коэффициентов Дынкина. Напомним их определения.

Пусть φ – произвольной вложение группы H=SU(n) в группу G=SU(N). В алгебре S_H вместо элементарных симметрических полиномов примем за образующие полиномы Ньютона

$$\rho_s(t_1, t_2, ..., t_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i^s,\ s = 2,3,...,n$$

и рассмотрим вторую из формул (3) на элементе $1 \otimes X_{2s-1}$:

$$d(1 \otimes X_{2s-1}) = \varphi^*R(X_{2s-1}) \otimes 1,\ s=2,3,...,n.$$

Обозначим через I_k идеал, натянутый на $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$. Имеем

$$\varphi^*R(X_{2s-1}) \equiv C_s(\varphi)\rho_s \bmod I_{s-1},\ s=2,3,...,n. \tag{5}$$

Формула (5) выделяет $\varphi^*R(X_{2s-1})$ неразложимую часть – член $C_s\rho_s$. Коэффициенты $C_s(\varphi)$, s=2,3,...,n называют коэффициентами Дынкина представления φ.

Из теоремы А.Картана вытекает, что, если коэффициенты Дынкина не равны нулю, то отображение $\varphi^*: H^*(SU(N)) \to H^*(SU(n))$ есть эпиморфизм, т.е. группа H=SU(n) вполне негомологична нулю в группе G=SU(N), степени образующих элементов в алгебре H*(C) нетрудно отыскать, и полином Пуанкаре однородного пространства G/H получается делением полинома Пуанкаре группы G на полином Пуанкаре подгруппы H.

Коэффициенты Дынкина удовлетворяют соотношениям

$$C_s(\Phi+\Psi) = C_s(\Phi) + C_s(\Psi), \tag{6}$$

$$C_s(\Phi \otimes \Psi) = C_s(\Phi)\dim\Psi \otimes C_s(\Psi)\dim\Phi, \tag{7}$$

и могут быть найдены в явном виде.

Нам понадобится вспомогательный факт из теории представлений, следующий из разложения тензорных произведений представлений простых групп Ли типа A_2 в сумму неприводимых компонент:

$$\overset{P}{\circ}-\circ \otimes \circ-\overset{l}{\circ} = \overset{P}{\circ}-\overset{l}{\circ} + \overset{P-1}{\circ}-\overset{l-1}{\circ} + \overset{P-2}{\circ}-\overset{l-2}{\circ} + \ldots + \overset{P-l}{\circ}-\circ,$$

при p>l. Тогда тензорное произведение $\overset{P}{\circ}-\circ \;\otimes\; \circ-\overset{l}{\circ}$ представлений группы Ли SU(3) со схемами Дынкина $\overset{P}{\circ}-\circ$ и $\circ-\overset{l}{\circ}$ можно записать в виде

$$\overset{P}{\circ}-\circ \;\otimes\; \circ-\overset{l}{\circ} \;=\; \overset{P}{\circ}-\overset{l}{\circ} \;+\; \overset{P-1}{\circ}-\circ \;\otimes\; \circ-\overset{l-1}{\circ}. \tag{8}$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы I .

2. Пусть представление φ подгруппы SU (3) не является самоконтрагредиентным. Известна формула [1] для подсчета коэффициентов Дынкина представления φ в пространстве симметрических p – валентных тензоров; представим ее в удобном нам виде:

$$C_S(Y)=\sum_{k=0}^{n} C_{n+k-1}^{k}(p-k)^{S-1}, \quad S=2,3,\cdots,n, \tag{9}$$

где C_{n+k-1}^{k} - коэффициенты бинома Ньютона. Применительно к нашему случаю (9) примет вид

$$C_S(Y)=\sum_{k=0}^{3} C_{k+2}^{k}(p-k)^{S-1}, \quad S=2,3. \tag{10}$$

Формулы (9), (10) справедливы при $p \geq n$ и $p \geq 3$ соответственно. Вычисления будем проводить, учитывая это замечание.

Условимся обозначать, где потребуется, представление соответствующей ей схемой Дынкина и отметим, что коэффициенты Дынкина контрагредиентного φ представления $\tilde{\varphi}$ нетрудно сосчитать, если известны коэффициенты C_S (φ):

$$\begin{aligned} C_S(\tilde{\varphi}) &= C_S(\varphi), && \textit{при } s-\textit{четном и} \\ C_S(\tilde{\varphi}) &= -C_S(\varphi), && \textit{при } s-\textit{нечетном.} \end{aligned} \tag{11}$$

Это утверждение следует из определения (5), линейности функций (I) и известного факта из теории представлений: если вместо φ рассматривать контрагредиентное ему представление $\tilde{\varphi}$, то весами представления $\tilde{\varphi}$ будут представления φ, взятые с противоположным знаком.

Предположим, что $p \geq 4, l \geq 4, \; p \neq l.$ Прямыми вычислениями найдем $C_2\left(\overset{p}{\circ}-\overset{l}{\circ}\right)$ *и* $C_3\left(\overset{p}{\circ}-\overset{l}{\circ}\right)$ / см. (6), (8), (10), (11) / :

$$C_2\left(\overset{p}{\circ}-\circ\right)=\sum_{k=0}^{3} C_{k+2}^{k}(p-k)=20p-45;$$

$$C_3\left(\overset{p}{\circ}-\circ\right)=\sum_{k=0}^{3} C_{k+2}^{k}(p-k)^2=20p^2-90p+117.$$

Далее

$$\begin{aligned} C_2\left(\overset{p}{\circ}-\overset{l}{\circ}\right) &= C_2\left(\overset{p}{\circ}-\circ\right) dim\left(\circ-\overset{l}{\circ}\right)+C_2\left(\circ-\overset{l}{\circ}\right) dim\left(\overset{p}{\circ}-\circ\right)- \\ &-C_2\left(\overset{p-1}{\circ}-\circ\right) dim\left(\circ-\overset{l-1}{\circ}\right)-C_2\left(\circ-\overset{l-1}{\circ}\right) dim\left(\overset{p-1}{\circ}-\circ\right)= \\ &=\frac{(20p-45)(l+1)(l+2)}{2}+\frac{(20l-45)(p+1)(p+2)}{2}- \\ &-\frac{(20p-65)l(l+1)}{2}-\frac{(20l-65)p(p+1)}{2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$C_2\begin{pmatrix}\overset{P}{\circ}-\overset{l}{\circ}\end{pmatrix}=10p^2+40pl+10l^2-15p-15l-90. \tag{12}$$

$$\begin{aligned}C_3\begin{pmatrix}\overset{p}{\circ}-\overset{l}{\circ}\end{pmatrix}&=C_3\begin{pmatrix}\overset{p}{\circ}-\circ\end{pmatrix}dim\begin{pmatrix}\circ-\overset{l}{\circ}\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}\circ-\overset{l}{\circ}\end{pmatrix}dim\begin{pmatrix}\overset{p}{\circ}-\circ\end{pmatrix}-\\&-C_3\begin{pmatrix}\overset{p-1}{\circ}-\circ\end{pmatrix}dim\begin{pmatrix}\circ-\overset{l-1}{\circ}\end{pmatrix}-C_3\begin{pmatrix}\circ-\overset{l-1}{\circ}\end{pmatrix}dim\begin{pmatrix}\overset{p-1}{\circ}-\circ\end{pmatrix}=\\&=\frac{(20p^2-90p+117)(l+1)(l+2)}{2}+\frac{(90l-20l^2-117)(p+1)(p+2)}{2}-\\&-\frac{(20p^2-130p+227)l(l+1)}{2}-\frac{(130l-20l^2-227)(p+1)p}{2},\end{aligned}$$

поэтому

$$C_3\begin{pmatrix}\overset{P}{\circ}-\overset{l}{\circ}\end{pmatrix}=75p^2-75l^2-152p+152l. \tag{13}$$

Здесь имеется ввиду, что представление со схемой $\overset{P}{\circ}-\overset{l}{\circ}$, как следует из (8), можно разложить в кольце представлений RSU(3) по формуле

$$\overset{P}{\circ}-\overset{l}{\circ}\;=\;\overset{P}{\circ}-\circ\;\otimes\;\circ-\overset{l}{\circ}\;+\;\overset{P-1}{\circ}-\circ\;\otimes\;\circ-\overset{l-1}{\circ}. \tag{14}$$

а также, что размеренность $\dim\begin{pmatrix}\overset{P}{\circ}-\overset{l}{\circ}\end{pmatrix}$ представления со схемой $\overset{P}{\circ}-\overset{l}{\circ}$

равна $\dfrac{(p+1)(l+1)(p+l+2)}{2}$.

Проверка показывает: $C_2\begin{pmatrix}\overset{P}{\circ}-\overset{l}{\circ}\end{pmatrix}\neq 0$ и $C_3\begin{pmatrix}\overset{P}{\circ}-\overset{l}{\circ}\end{pmatrix}\neq 0$ при $p,l\geq 4,\ p\neq l.$

Снимем ограничения $p,l\geq 4,$ оставив только $p\neq l.$ Нетрудно подсчитать /с помощью результатов, полученных в [1] или по определению (5)/, что

$$\begin{aligned}&C_2\begin{pmatrix}\overset{1}{\circ}-\circ\end{pmatrix}=1, && C_2\begin{pmatrix}\overset{2}{\circ}-\circ\end{pmatrix}=5, && C_2\begin{pmatrix}\overset{3}{\circ}-\circ\end{pmatrix}=15,\\&C_3\begin{pmatrix}\overset{1}{\circ}-\circ\end{pmatrix}=1, && C_3\begin{pmatrix}\overset{2}{\circ}-\circ\end{pmatrix}=7, && C_3\begin{pmatrix}\overset{3}{\circ}-\circ\end{pmatrix}=27.\end{aligned} \tag{15}$$

Тогда, с учетом (11) и (15), находим

$$\begin{aligned}C_2\begin{pmatrix}\overset{P}{\circ}-\overset{3}{\circ}\end{pmatrix}&=C_2\begin{pmatrix}\overset{p}{\circ}-\circ\end{pmatrix}\dim\begin{pmatrix}\circ-\overset{3}{\circ}\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\circ-\overset{3}{\circ}\end{pmatrix}\dim\begin{pmatrix}\overset{p}{\circ}-\circ\end{pmatrix}-\\&-C_2\begin{pmatrix}\overset{p-1}{\circ}-\circ\end{pmatrix}\dim\begin{pmatrix}\circ-\overset{2}{\circ}\end{pmatrix}-C_2\begin{pmatrix}\circ-\overset{2}{\circ}\end{pmatrix}\dim\begin{pmatrix}\circ-\overset{p-1}{\circ}\end{pmatrix}=5p^2+100-45;\end{aligned}$$

$$C_3=\begin{pmatrix}\overset{p}{\circ}-\overset{3}{\circ}\end{pmatrix}=10p^2-157p-219;$$

В оставшихся случаях, из (15) вытекает

$$C_2\left(\overset{3\quad 3}{\circ-\circ}\right)=240,\qquad C_2\left(\overset{3\quad 1}{\circ-\circ}\right)=50\qquad C_2\left(\overset{2\quad 1}{\circ-\circ}\right)=20,$$

$$C_3\left(\overset{3\quad 3}{\circ-\circ}\right)=0,\qquad C_3\left(\overset{3\quad 1}{\circ-\circ}\right)=64,\qquad C_3\left(\overset{2\quad 1}{\circ-\circ}\right)=14,$$

$$C_2\left(\overset{3\quad 2}{\circ-\circ}\right)=119,\qquad C_2\left(\overset{2\quad 2}{\circ-\circ}\right)=0,\qquad C_2\left(\overset{1\quad 1}{\circ-\circ}\right)=6,$$

$$C_3\left(\overset{3\quad 3}{\circ-\circ}\right)=77,\qquad C_3\left(\overset{2\quad 2}{\circ-\circ}\right)=0,\qquad C_3\left(\overset{1\quad 1}{\circ-\circ}\right)=0.$$

Как видно, для перебранных представлений φ, значение 0 принимает только коэффициент $C_3(\varphi)$, при условии, что φ – самоконтрагредиентное представление. Из (13) нетрудно заметить, что у всякого /из рассматриваемых нами самоконтрагредиентного φ/ со схемой Дынкина $\overset{p\quad p}{\circ-\circ}$ $/\,C_3(\varphi)=0$. В остальных случаях $C_2(\varphi)\neq 0,\quad C_3(\varphi)\neq 0.$

Таким образом, если φ не является самоконтрагредиентным, то подгруппа SU(3) вполне негомологична нулю в группе SU(N) /отсюда следует, что SU(3) находится в нормальном положении в SU(N)/ и первое из утверждений теоремы 1 доказано.

3. Рассмотрим теперь ненормальные случаи, т.е. случаи, в которых представление φ имеет схему Дынкина $\overset{p\quad p}{\circ-\circ}$. Как было отмечено, при этом $C_3(\varphi)=0$, и отображение φ^*: $H^*(SU(N)\to H^*(SU(3)$ не является эпиморфизмом: элемент $\rho_3\otimes 1$ алгебры А.Картана С не имеет прообраза и становится поэтому коциклом; коциклом будет и элемент $1\otimes X_5$. В соответствии с теоремой А.Картана, чтобы описать алгебру $H^*(G/H)$ построим алгебру А.Картана С и найдем ее когомологии.

Напомним, что в алгебре S_H образующими элементами можно выбрать полиномы Ньютона $\rho_1=0$, $\rho_2(t_1,t_2,t_3)$, $\rho_3(t_1,t_2,t_3)$, а в $H^*(SU(N)$ – базис образут элементы $X_3, X5,\dots,X_{2N-1}$ степеней 3,5,..., 2N-1 соответственно. В алгебре А.Картана $C=S_H\otimes H^*(SU(N))$ образующими являются элементы $\rho_s\otimes 1$, $1\otimes X_{2N-1}$, s=2,3; k=2,3,...,N. По определению $d(\rho_s\otimes 1)=0$, s=2,3; подсчет показывает, что

$d(1\otimes X_3)=\varphi^*R(X_3)\otimes 1=C_2(\overset{p\quad p}{\circ-\circ})\rho_2\otimes 1;$

$d(1\otimes X_5)=\varphi^*R(X_5)\otimes 1=C_3(\overset{p\quad p}{\circ-\circ})\rho_3\otimes 1=0;$

$d(1\otimes X_7)=\varphi^*R(X_7)\otimes 1=A_4\rho_2^2\otimes 1;$

$d(1\otimes X_9)=\varphi^*R(X_9)\otimes 1=A_5\rho_2\rho_3\otimes 1;$

$d(1\otimes X_{11})=\varphi^*R(X_{11})\otimes 1=(A_6\rho_2^3+B_6\rho_3^2)\otimes 1;$

и так далее до элемента $d(1\otimes X_{2N-1})$. Здесь учтено, что $\rho_1=0$, $\rho_4=0{,}5\rho_2^2$, ρ_5 выражаются через $\rho_2\rho_3$, ρ_6 – линейная комбинация ρ_2^3 и ρ_3^2; A_4, A_5, A_6, B_6 – некоторые числовые коэффициенты, соответствующие перечисленным разложениям. Коэффициенты Дынкина $C_2(\overset{p\quad p}{\circ-\circ})$ и $C_3(\overset{p\quad p}{\circ-\circ})$ вычисляются по формулам (12), (13): $C_2(\overset{p\quad p}{\circ-\circ})\neq 0$, $C_3(\overset{p\quad p}{\circ-\circ})=0$. Это означает, что $d(1\otimes X_5)=0$ и элемент $1\otimes X_5$ является коциклом, тогда $\rho_3\otimes 1$ тоже коцикл в алгебре А.Картана С.

Точные числовые значения коэффициентов A_4 и A_5 нетрудно найти, но в этом нет необходимости, так как, если $A_4=0$ и $A_5=0$, то имеем еще два замкнутых элемента – $1\otimes X_7$ и $1\otimes X_9$ степеней 7 и 9 соответственно. В противном случае $1\otimes X_7$ можно “поправить”: вместо элемента $1\otimes X_7$ рассмотреть другой элемент α_7 степени 7:

$$\alpha_7=1\otimes X_7-\frac{A_4}{C_2(\overset{p\quad p}{\circ-\circ})}\rho_2\otimes X_3.$$

Тогда $d(\alpha_7)=d(1\otimes X_7-\dfrac{A_4}{C_2(\overset{p\quad p}{\circ-\circ})}\rho_2\otimes X_3)=A_4\rho_2^2\otimes 1-\dfrac{A_4}{C_2(\overset{p\quad p}{\circ-\circ})}C(\overset{p\quad p}{\circ-\circ})\rho_2^2\otimes 1=0$

и $1\otimes X_7$ преобразуется в коцикл α_7. Аналогично поступим, если $A_5\neq 0$:

$$\alpha_9 = 1\otimes X_9 - \frac{A_5}{C_2\left(\overset{p}{\circ}\!-\!\overset{p}{\circ}\right)}\rho_3\otimes X_3;$$

$$d(\alpha_9) = d\left(1\otimes x_9 - \frac{A_5}{C_2\left(\overset{P}{\circ}\!-\!\overset{P}{\circ}\right)}\rho_3\otimes X_3\right) = A_5\rho_2\rho_3\otimes 1 - \frac{A_5}{C_2\left(\overset{P}{\circ}\!-\!\overset{P}{\circ}\right)}C_2\left(\overset{P}{\circ}\!-\!\overset{P}{\circ}\right)\rho_2\rho_3\otimes 1 = 0.$$

Таким образом, в H*(C) найдены ненулевые линейно независимые элементы $\alpha_5 = 1\otimes X_5, \alpha_7, \alpha_9, \beta_6 = \rho_3\otimes 1$ степеней 5,7,9,6.

Преобразовать в коцикл $1\otimes X_{11}$ несколько сложнее. Учитывая, что образующими в кольце S_H являются полиномы ρ_2,ρ_3, положим $\alpha_{11} = 1\otimes X_{11} - \mu_6\rho_2^2\otimes X_3 - \nu_6\rho_3\otimes X_5$ где числа μ_6 и ν_6 предстоит вычислить. Но $d(1\otimes X_5)=0$, поэтому

$$d(\alpha_{11}) = d\left(1\otimes X_{11} - \mu_6\rho_2^2\otimes X_3 - \nu_6\rho_3\otimes X_5\right) =$$

$$A_6\rho_2^3\otimes 1 + B_6\rho_3^2\otimes 1 - \mu_6 C_2\left(\overset{P}{\circ}\!-\!\overset{P}{\circ}\right)\rho_2^3\otimes 1 =$$

$$\left(A_6 - \mu_6 C_2\left(\overset{P}{\circ}\!-\!\overset{P}{\circ}\right)\right)\rho_2^3\otimes 1 - B_6\rho_3^2\otimes 1;$$

очевидно, если $B_6 = 0$, то положив $\mu_6 = \dfrac{A_6}{C_2\left(\overset{P}{\circ}\!-\!\overset{P}{\circ}\right)}$ будем иметь коцикл степени II. Вычислим B_6 в явном виде и сравним его с нулем.

Из (14) найдем разложение представления φ со схемой Дынкина $\overset{p}{\circ}\!-\!\overset{p}{\circ}$

В кольце представлений RSU(3) :

$$\overset{P}{\circ}\!-\!\overset{P}{\circ} \;=\; \overset{P}{\circ}\!-\!\circ \;\otimes\; \circ\!-\!\overset{P}{\circ} \;-\; \overset{P-1}{\circ}\!-\!\circ \;\otimes\; \circ\!-\!\overset{P-1}{\circ}. \qquad (16)$$

Пусть u_i – вес представления $\overset{p}{\circ}\!-\!\circ$, а v_j – $\overset{p-1}{\circ}\!-\!\circ$. Тогда соответствующие контрагредиентные представления $\circ\!-\!\overset{p}{\circ}$ и $\circ\!-\!\overset{p-1}{\circ}$ имеют веса $-u_i$ и $-v_j$. По определению, $Y*R(X_{11}) = \sum_i T_i^6$, где T_i – вес представления φ со схемой Дынкина $\overset{p}{\circ}\!-\!\overset{p}{\circ}$. В соответствии с формулой (I) требуется разложить полином $\varphi^k R(x_{11})$ по производящим образующим ρ_2 и ρ_3. Из (16) вытекает

$$\sum_i T_i^6 = \sum_{i,j}(u_i - u_j)^6 - \sum_{i,j}(v_i - v_j)^6,$$

$$\sum_{i,j}(u_i - u_j)^6 = \sum_{i,j}\left(u_i^6 - 6u_i^5u_j + 15u_i^4u_j^2 - 20u_i^3u_j^3 + 15u_i^2u_j^4 - 6u_iu_j^5 + u_j^6\right) =$$

$$= 6\sum_i u_i^6 + 30\sum_i u_i^2\sum_j u_j^4 - 20\sum_i u_i^3\sum_j u_j^3; \qquad \sum_i u_i = 0.$$

Для $\sum(v_i - v_j)^6$ справедлива аналогичная формула, поэтому

$$\sum_i \varphi_i^6 = 6\left(\sum_i u_i^6 - \sum_j v_j^6\right) - 20\left[\left(\sum_i u_i^3\right)^2 - \left(\sum_j v_j^3\right)^2\right] + 30\left(\sum_i u_i^2\sum_j u_j^4 + \sum_i v_i^2\sum_j v_j^4\right) =$$

$$= A_6\rho_2^3 + B_6\rho_3^2.$$

Заметим, что $\rho_6=\frac{1}{4}\rho_2^3+\frac{1}{3}\rho_3^2$ и $\left(\sum_i u_i^3\right)^2=C_3^2\left(\overset{p}{\circ-\circ}\right)\rho_3^2$, $\left(\sum_j v_j^3\right)^2=C_3^2\left(\overset{p-1}{\circ-\circ}\right)\rho_3^2$.

Тогда

$$\sum_i T_i^6=6C\rho_6-20\left(C_3^2\left(\overset{p}{\circ-\circ}\right)-C_3^2\left(\overset{p-1}{\circ-\circ}\right)\right)\rho_3^2+30D\rho_2\rho_4=$$
$$=\left[2C-20\left(C_3^2\left(\overset{p}{\circ-\circ}\right)-C_3^2\left(\overset{p-1}{\circ-\circ}\right)\right)\right]\rho_3^2+\left(\frac{3}{2}C\rho_2^3+30D\rho_2\rho_4\right). \tag{18}$$

где C–некоторый коэффициент. B_6, таким образом, определяется формулой

$$B_6=2C-20\left(C_3^2\left(\overset{p}{\circ-\circ}\right)-C_3^2\left(\overset{p-1}{\circ-\circ}\right)\right),$$

и нужно найти число C. Из сравнения формул (17) и (18), положив $t_1=1$, $t_2=\varepsilon$, $t_3=\varepsilon^2$ / 1, ε, ε^2 –корни третьей степени из I/, получаем $\rho_1=0$, $\rho_2=0$, $\rho_3=3$ при указанных значениях t_1, t_2, t_3 и

$$\sum_i u_i^6-\sum_j v_j^6=C\cdot 3.$$

Средствами теории представлений нетрудно подсчитать, что произвольный вес u_i представления со схемой $\overset{p}{\circ-\circ}$ представляется в виде $u_i=(p-s)t_1+(s-l)t_2+lt_3$, $l\le s\le p$, поэтому

$$\sum_i u_i^6=\sum_{l=0}^{P}\sum_{S=l}^{P}\left((p-s)t_1+(s-l)t_2+lt_3\right)^6.$$

Аналогично $\sum_j v_j^6=\sum_{l=0}^{P-1}\sum_{S=l}^{P-1}\left((p-s-1)t_1+(s-l)t_2+lt_3\right)^6.$

Дальнейшие преобразования достаточно громоздки и мы их опустим. Отметим лишь, что после составления разности $\sum_i u_i^6-\sum_j v_j^6$ и вычисления коэффициента C найти B_6 уже несложно:

$$B_6=\frac{8}{63}p^7+13\frac{8}{9}p^6-98\frac{1}{9}p^5+283\frac{11}{18}p^4-32360\frac{1}{9}p^3+264176\frac{5}{6}p^2-$$
$$-759187\frac{4}{7}p+756773\frac{1}{3},p\ge 4.$$

Данный многочлен целых корней не имеет, что проверяется непосредственно. При p<4 находим

$$B_6\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right)=-18,B_6\left(\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}\right)=-832,B_6=\left(\overset{3}{\circ}-\overset{3}{\circ}\right)=-1243\frac{2}{3}.$$

Значит, $B_6\neq 0$ ни при каком целом положительном p и элемент $1\otimes X_{11}$, таким образом, нельзя преобразовать в коцикл. Другие элементы $1\otimes X_{2s-1}$, S = 4,5,...N " превращаются " в коциклы указанным в начале этого пункта способом6 так как $C_2\neq 0$. Если же в разложении $\varphi^*R(X_{2s-1})$ через ρ_2 и ρ_3 имеется слагаемое ρ_3^m, m > 2 /так бывает когда S делится на 3/, то при конструировании коцикла кроме $1\otimes X_3$, $1\otimes X_s$ надо использовать еще и элемент $1\otimes X_{11}$, так как доказано, что $B_6\neq 0$.

Подсчет показывает, что базисные когомологий характеризуются представителями α_s, β_6, α_7, α_9, α_{13}, ..., α_{2n-1} степеней s, 6, 7, 9, 13, ..., 2 N – 1 соответственно. Таким образом

$$H^*(C)=\Lambda\{\alpha_s,\alpha_7,\beta_6,\alpha_9,\alpha_{13},\alpha_{1s},...,\alpha_{2N-1}\}.$$

Откуда следует второе утверждение теоремы I.

Литература

1. *Мантуров О.В.* О полиномах Пуанкаре некоторых однородных пространств // Тр. Семинара по вект. и тенз. анализу / МГУ им. М.В. Ломоносова. – М., 1968. – вып. XIV. с. 20-32.

2. *Рашевский П.К.* О вещественных когомологиях однородных пространств // Успехи математических наук. – М., 1969. – Т. XXIV, вып. 3 (147). – с. 23-90.

The algebra's of cohomology of some homogeneous spaces

V.A. Koslov

With A. Cartan's theorem the Poincare multinomial real of riemannian homogeneous spaces SU(N)/SU(3) are determinated.

