ЗАДАНИЕ ФУНКЦИИ НАТУРАЛЬНОГО АРГУМЕНТА С ЦИКЛИЧЕСКИМ СВОЙСТВОМ

В.Н. Матус, **Р.Т. Рахмаил**

Армавирский государственный педагогический институт, Армавир

С каждым кристаллом можно связать его группу вращений, записываемых подстановками вершин. И вообще, группы подстановок естественно возникают всюду, где изучается симметрия «конечно определенных» объектов. Естественно, что в приложениях на подстановки накладываются некоторые условия. Одному из таких условий и посвящена данная заметка.

Рассмотрим соотношение

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_1 = \alpha_2\alpha_1\alpha_2 \tag{1}$$

где α_1 = (1 2 3 … n - 1) - подстановка n-ой степени, а α_2 - искомая подстановка также n-ой степени, оставляющая на месте только единицу.

Определение. Мы будем говорить, что подстановка n-ой степени

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & n & n-2 & x_4 & \dots & x_{n-2} & x_4+1 & n-1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$n \geq 6$, оставляющая на месте только единицу, имеет циклическое свойство, если выполняется условие:

$$\begin{gathered} n \to (n-1) \to (x_4+1) \to (x_5+1) \to \dots \to (x_{n-2}+1) \to \\ \to (x_4+2) \to 2 \to n \end{gathered} \tag{3}$$

Теорема. *Существует алгоритм построения подстановки n-ой степени* α_2, $n \geq 6$, *с циклическим свойством, удовлетворяющей соотношению* (1) *при* α_1 = (1, 2, 3, …, n - 1).

Доказательство. Опишем алгоритм ***A*** задающий искомую подстановку α_2 n-ой степени при n нечетном, $n \geq 7$.

Нечетные натуральные числа (при $n \geq 7$) распадаются на 3 класса: числа вида 7+6k, числа вида 9+6k и вида 11+6k, $k \in \mathbf{N} \cup 0$. Для каждого класса алгоритм ***A*** имеет свое правило выполнения. Поэтому $\boldsymbol{A}_7$ будет означать алгоритм, соответствующий классу чисел {7+6k}, $\boldsymbol{A}_9$ – соответствующий классу {9+6k}, $\boldsymbol{A}_{11}$ – классу {11+6k}.

Опишем алгоритм $\boldsymbol{A}_7$. Положим 7+6k-4=3l и натуральные числа от 1 до n разобьем на четыре множества:

$$\begin{array}{l} 1,\ n,\ n-1,\ n-2 \text{ – фиксированные числа;} \\ n-4,\ n-6,\ \dots,\ n-2(l+1)=l+2 \text{ - нечетные числа;} \\ n-3,\ n-5,\ \dots,\ n-(2l+1)=l+3 \text{ – четные числа;} \\ 2,\ 3,\ \dots,\ l+1 \text{ – номерные числа;} \end{array} \tag{4}$$

Построение алгоритма в общем случае весьма громоздко, поэтому для иллюстрации этого процесса предположим вначале, что n=13, 19. Тогда

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 4 & 6 & 3 & 8 & 2 & 10 & 12 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 1 & 19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 6 & 8 & 5 & 10 & 4 & 12 & 3 & 14 & 2 & 16 & 18 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Подстановки (5), (6) удовлетворяют условию (3). Рассмотрим подстановку (5). В ней образы первых трех чисел и последнего числа составляют множество фиксированных чисел. Образы следующих трех чисел – это нечетные числа. Затем, начиная справа от 12 до 7 образы чередуются: четное число, номерное число. При этом четные числа убывают (каждая на две меньше прообраза), а номерные числа возрастают по порядку. Данный алгоритм, как увидим в дальнейшем справедлив для любого числа вида $7+6k$ и при этом получается подстановка для которой выполняется условие (3).

Можно сказать, что подстановка (5) в соответствии с (4) характеризуется набором (4; 3, 3, 3), а подстановка (6) набором (4; 5, 5, 5). Еще одно полезное наблюдение, которое оказывается справедливым и в общем случае. При переходе от подстановки (5) к подстановке (6):

α) нечетные (четные) числа получили три дополнительных числа, а «потеряли» наименьшее;

β) номерные числа получили “потерянные” четное и нечетное число

Пусть теперь $n=7+6k$, $k\in\mathbf{N}$. Алгоритм $\boldsymbol{A}_7$ задает подстановку α_2 следующим образом. Образы первых трех чисел и последнего числа являются, соответственно числами 1, n, n-2, n-1 (фиксированные числа). Нечетные числа являются образами чисел 4, 5, …, 3 + s, …, 3 + l и равны, соответственно числам n - 4, n - 6, n - 8, …, n - 2(s + 1), …, n - 2(l+1). Затем, начиная справа от n - 1 до l + 4 образы чередуются: четное число, номерное число. При этом четные числа убывают (каждое на два меньше прообраза) от n-3 до n-(2l+1)=l+3, а номерные возрастают по порядку от 2 до l+1.

Получаем:

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 3+(s-2) & 3+(s-1) & 3+s & \dots \\ 1 & n & n-2 & n-4 & n-6 & \dots & n-2(s-1) & n-2s & n-2(s+1) & \dots\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}3+(l-3) & 3+(l-2) & 3+(l-1) & l+3 & l+4 & l+5 & l+6 \\ n-2(l-2) & n-2(l-1) & n-2l & n-2(l+1) & l+1 & n-(2l+1) & l\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}l+7 & l+8 & l+9 & \dots & n-(s+1)+2 & n-2(s+1)+3 \\ n-(2l-1) & l-1 & n-(2l-3) & \dots & s+1 & n-2(s+1)+1\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}n-2(s+1)+4 & n-2(s+1)+5 & \dots & n-6 & n-5 & n-4 & n-3 & n-2 \\ s & n-2(s+1)+3 & \dots & 4 & n-7 & 3 & n-5 & 2\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}n-1 & n \\ n-3 & n-1\end{matrix}\right)$$

Проверим, что условие (3) при этом выполнено. Действительно из рассмотрения элементов подстановки с четными образами имеем

$(n - 1)\to (n - 3)\to (n - 5)\to\ldots\to n - 2(s - 1) + 1\to n - 2s + 1\to n - 2(s + 1) + 1\to$

$\to \ldots \to n - 2(l - 2) + 1 = l + 9\to n - 2(l - 1) + 1 = l + 7\to n - 2l + 1 = l + 5\to \quad n - 2(l + 1) + 1 = l + 3.$

Два элемента $\begin{pmatrix} l+3 \\ n-2(l+1)\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3+(l-1) \\ n-2l\end{pmatrix}$ обеспечивают переход: $l + 3 \to l + 2 \to n - (2l + 1) + 1 = l + 4$. Начиная с l+ 4 и до n - 2 мы должны обеспечить 2l - 2 отображения системы (3). Будем использовать для этого l - 1 элементов подстановки α_2 с образами из номерных чисел($\neq$ 2), l - 2 элемента с нечетными образами и элемент $\begin{pmatrix} 3 \\ m-2\end{pmatrix}$ в такой последовательности: вначале учитываем $\begin{pmatrix} l+4 \\ l+1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3+(l-2) \\ n-2(l-1)\end{pmatrix}$, затем $\begin{pmatrix} l+6 \\ l\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3+(l-3) \\ n-2(l-2)\end{pmatrix}$ и т. д. до пары $\begin{pmatrix} n-6 \\ 4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ n-4\end{pmatrix}$.

Тем самым обеспечили $2l$-4 отображения:
$(l + 4)\to (l + 1)\to (n - 2(l - 1) + 1)\to \ldots\to 5 \to\to (n - 6)\to 4 \to (n - 4)$.

Учитывая $\begin{pmatrix} n-4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ n-2 \end{pmatrix}$ получим $(n-4) \to 3 \to (n-2)$. Продолжение $(n - 2) \to 2 \to n$ очевидно.

Таким образом, описан алгоритм $\boldsymbol{A}_7$, задающий подстановку α_2, для которой условие (3) выполнено.

Итак, при $n=7+6k$, $k\in \mathrm{N}\cup 0$, подстановка α_2 имеет характеристику, которую в соответствии с (4) можно записать в виде $\rho = (4;\ 2k + 1,\ 2k + 1,\ 2k + 1)$, (7)

где каждая позиция равна, соответственно, количеству фиксированных чисел, нечетных чисел, четных чисел и номерных чисел.

При $n=9+6k$, $k\in \mathrm{N}\cup 0$, подстановка α_2 имеет характеристику $\rho = (4;\ 2(k + 1),\ 2(k + 1),\ 2k + 1)$.

Алгоритм задания $\boldsymbol{A}_9$ в этом случае строится аналогично заданию $\boldsymbol{A}_7$.

Пусть теперь $n=11+6k$, $k\in \mathrm{N}\cup 0$. В этом случае характеристика ρ несколько другая. Рассмотрим пример. Пусть $k=2$. Тогда

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 1 & 23 & 21 & 19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 8 & 7 & 10 & 9 & 6 & 12 & 5 & 14 & 4 & 16 & 3 & 18 & 2 & 20 & 22 \end{pmatrix}$$

Алгоритм $\boldsymbol{A}_{11}$ совпадает с $\boldsymbol{A}_7$ при нахождении нечетных образов. При этом $l = \dfrac{11+6k-8}{3} = 2k+1$. $\boldsymbol{A}_{11}$ совпадает с $\boldsymbol{A}_7$ на номерных числах. Что касается четных чисел – они убывают от n-3 до $n-(2l+1)=l+7$.

В средней части подстановки α_2 есть блок из четырех столбцов вида (отмечен точками)

$$\begin{pmatrix} & 2k+4 & 2k+5 & 2k+6 & 2k+7 & 2k+8 & 2k+9 & \\ \cdots & 2k+7\,. & 2k+4 & 2k+3 & 2k+6 & 2k+5\,. & 2k+9 & \cdots \end{pmatrix}$$

В рассматриваемом случае подстановка α_2 имеет характеристику

$$\rho = (4,\ 4;\ 2k+1,\ 2k+1,\ 2k+1) \tag{8}$$

Аналогично определяется алгоритм $\boldsymbol{A}$ построения подстановки n-ой степени α_2 для четного n. Все четные числа $n \geq 6$ разбиваем на классы видов $\{6+6k\}$, $\{8+6k\}$, $\{10+6k\}$, $k\in \mathrm{N}\cup 0$.

Тогда подстановка α_2 класса $\{6+6k\}$ имеет характеристику типа (7) в виде $\rho = (4;\ 2k+1,\ 2k+1,\ 2k)$.

Подстановка α_2 для чисел класса $\{8+6k\}$ имеет характеристику аналогичную (8) в виде $\rho = (4,\ 4;\ 2k,\ 2k,\ 2k)$. Для класса $\{10+6k\}$ характеристика ρ имеет вид $\rho = (4;\ 2(k+1),\ 2(k+1),\ 2(k+1))$.

Литература

1. *Магнус В., Каррас А., Солитер Д.* Комбинаторная теория групп. – М.: Наука, 1974
2. *Пизо Ш., Заманский М.* Курс математики (алгебра и анализ). – М.: Наука,1971

The function of natural argument with circular property

$\boxed{\textbf{V.N. Matus}}$, **R.T. Rahmail**

With each crystal can be connect rotation group, that recording permutation vertex. The article consideres the condition put on the permutation group.

