

ЗАДАНИЕ ФУНКЦИИ НАТУРАЛЬНОГО АРГУМЕНТА С ЦИКЛИЧЕСКИМ СВОЙСТВОМ

В.Н. Матус , **Р.Т. Рахмаил**

Армавирский государственный педагогический институт, Армавир

С каждым кристаллом можно связать его группу вращений, записываемых подстановками вершин. И вообще, группы подстановок естественно возникают всюду, где изучается симметрия «конечно определенных» объектов. Естественно, что в приложениях на подстановки накладываются некоторые условия. Одному из таких условий и посвящена данная заметка.

Рассмотрим соотношение

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1 = \alpha_2 \alpha_1 \alpha_2 \quad (1)$$

где $\alpha_1 = (1\ 2\ 3\ \dots\ n-1)$ - подстановка n -ой степени, а α_2 - искомая подстановка также n -ой степени, оставляющая на месте только единицу.

Определение. Мы будем говорить, что подстановка n -ой степени

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & n & n-2 & x_4 & \dots & x_{n-2} & x_4+1 & n-1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$n \geq 6$, оставляющая на месте только единицу, имеет циклическое свойство, если выполняется условие:

$$\begin{aligned} n \rightarrow (n-1) \rightarrow (x_4+1) \rightarrow (x_5+1) \rightarrow \dots \rightarrow (x_{n-2}+1) \rightarrow \\ \rightarrow (x_4+2) \rightarrow 2 \rightarrow n \end{aligned} \quad (3)$$

Теорема. Существует алгоритм построения подстановки n -ой степени α_2 , $n \geq 6$, с циклическим свойством, удовлетворяющей соотношению (1) при $\alpha_1 = (1, 2, 3, \dots, n-1)$.

Доказательство. Опишем алгоритм A задающий искомую подстановку α_2 n -ой степени при n нечетном, $n \geq 7$.

Нечетные натуральные числа (при $n \geq 7$) распадаются на 3 класса: числа вида $7+6k$, числа вида $9+6k$ и вида $11+6k$, $k \in \mathbb{N} \cup 0$. Для каждого класса алгоритм A имеет свое правило выполнения. Поэтому A_7 будет означать алгоритм, соответствующий классу чисел $\{7+6k\}$, A_9 - соответствующий классу $\{9+6k\}$, A_{11} - классу $\{11+6k\}$.

Опишем алгоритм A_7 . Положим $7+6k-4=3l$ и натуральные числа от 1 до n разобьем на четыре множества:

$$\begin{aligned} &1, n, n-1, n-2 - \text{фиксированные числа;} \\ &n-4, n-6, \dots, n-2(l+1)=l+2 - \text{нечетные числа;} \\ &n-3, n-5, \dots, n-(2l+1)=l+3 - \text{четные числа;} \\ &2, 3, \dots, l+1 - \text{номерные числа;} \end{aligned} \quad (4)$$

Построение алгоритма в общем случае весьма громоздко, поэтому для иллюстрации этого процесса предположим вначале, что $n=13, 19$. Тогда

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 4 & 6 & 3 & 8 & 2 & 10 & 12 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 1 & 19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 6 & 8 & 5 & 10 & 4 & 12 & 3 & 14 & 2 & 16 & 18 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Подстановки (5), (6) удовлетворяют условию (3). Рассмотрим подстановку (5). В ней образы первых трех чисел и последнего числа составляют множество фиксированных чисел. Образы следующих трех чисел – это нечетные числа. Затем, начиная справа от 12 до 7 образы чередуются: четное число, номерное число. При этом четные числа убывают (каждая на две меньше прообраза), а номерные числа возрастают по порядку. Данный алгоритм, как увидим в дальнейшем справедлив для любого числа вида $7+6k$ и при этом получается подстановка для которой выполняется условие (3).

Можно сказать, что подстановка (5) в соответствии с (4) характеризуется набором (4; 3, 3, 3), а подстановка (6) набором (4; 5, 5, 5). Еще одно полезное наблюдение, которое оказывается справедливым и в общем случае. При переходе от подстановки (5) к подстановке (6):

- α) нечетные (четные) числа получили три дополнительных числа, а «потеряли» наименьшее;
- β) номерные числа получили “потерянные” четное и нечетное число

Пусть теперь $n=7+6k, k \in \mathbb{N}$. Алгоритм A_7 задает подстановку α_2 следующим образом. Образы первых трех чисел и последнего числа являются, соответственно числами 1, $n, n-2, n-1$ (фиксированные числа). Нечетные числа являются образами чисел 4, 5, ..., $3+s, \dots, 3+l$ и равны, соответственно числам $n-4, n-6, n-8, \dots, n-2(s+1), \dots, n-2(l+1)$. Затем, начиная справа от $n-1$ до $l+4$ образы чередуются: четное число, номерное число. При этом четные числа убывают (каждое на два меньше прообраза) от $n-3$ до $n-(2l+1)=l+3$, а номерные возрастают по порядку от 2 до $l+1$.

Получаем:

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 3+(s-2) & 3+(s-1) & 3+s & \dots \\ 1 & n & n-2 & n-4 & n-6 & \dots & n-2(s-1) & n-2s & n-2(s+1) & \dots \\ \\ 3+(l-3) & 3+(l-2) & 3+(l-1) & l+3 & l+4 & l+5 & l+6 \\ n-2(l-2) & n-2(l-1) & n-2l & n-2(l+1) & l+1 & n-(2l+1) & l \\ \\ l+7 & l+8 & l+9 & \dots & n-(s+1)+2 & n-2(s+1)+3 \\ n-(2l-1) & l-1 & n-(2l-3) & \dots & s+1 & n-2(s+1)+1 \\ \\ n-2(s+1)+4 & n-2(s+1)+5 & \dots & n-6 & n-5 & n-4 & n-3 & n-2 \\ s & n-2(s+1)+3 & \dots & 4 & n-7 & 3 & n-5 & 2 \\ \\ n-1 & n \\ n-3 & n-1 \end{pmatrix}$$

Проверим, что условие (3) при этом выполнено. Действительно из рассмотрения элементов подстановки с четными образами имеем

$$(n-1) \rightarrow (n-3) \rightarrow (n-5) \rightarrow \dots \rightarrow n-2(s-1)+1 \rightarrow n-2s+1 \rightarrow n-2(s+1)+1 \rightarrow \dots \rightarrow n-2(l-2)+1 = l+9 \rightarrow n-2(l-1)+1 = l+7 \rightarrow n-2l+1 = l+5 \rightarrow n-2(l+1)+1 = l+3.$$

Два элемента $\begin{pmatrix} l+3 \\ n-2(l+1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+(l-1) \\ n-2l \end{pmatrix}$ обеспечивают переход: $l+3 \rightarrow l+2 \rightarrow n-(2l+1)+1 = l+4$. Начиная с $l+4$ и до $n-2$ мы должны обеспечить $2l-2$ отображения системы (3). Будем использовать для этого $l-1$ элементов подстановки α_2 с образами из номерных чисел ($\neq 2$), $l-2$

элемента с нечетными образами и элемент $\begin{pmatrix} 3 \\ m-2 \end{pmatrix}$ в такой последовательности: вначале учитываем

$$\begin{pmatrix} l+4 \\ l+1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 3+(l-2) \\ n-2(l-1) \end{pmatrix}, \text{ затем } \begin{pmatrix} l+6 \\ l \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 3+(l-3) \\ n-2(l-2) \end{pmatrix} \text{ и т. д. до пары } \begin{pmatrix} n-6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ n-4 \end{pmatrix}.$$

Тем самым обеспечили $2l-4$ отображения:

$$(l+4) \rightarrow (l+1) \rightarrow (n-2(l-1)+1) \rightarrow \dots \rightarrow 5 \rightarrow \dots \rightarrow (n-6) \rightarrow 4 \rightarrow (n-4).$$

Учитывая $\begin{pmatrix} n-4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ n-2 \end{pmatrix}$ получим $(n-4) \rightarrow 3 \rightarrow (n-2)$. Продолжение $(n-2) \rightarrow 2 \rightarrow n$

очевидно.

Таким образом, описан алгоритм A_7 , задающий подстановку α_2 , для которой условие (3) выполнено.

Итак, при $n=7+6k, k \in \mathbf{N} \cup 0$, подстановка α_2 имеет характеристику, которую в соответствии с (4) можно записать в виде $\rho = (4; 2k+1, 2k+1, 2k+1)$, (7)

где каждая позиция равна, соответственно, количеству фиксированных чисел, нечетных чисел, четных чисел и номерных чисел.

При $n=9+6k, k \in \mathbf{N} \cup 0$, подстановка α_2 имеет характеристику $\rho = (4; 2(k+1), 2(k+1), 2k+1)$.

Алгоритм задания A_9 в этом случае строится аналогично заданию A_7 .

Пусть теперь $n=11+6k, k \in \mathbf{N} \cup 0$. В этом случае характеристика ρ несколько другая. Рассмотрим пример. Пусть $k=2$. Тогда

$$\alpha_2 = \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 1 & 23 & 21 & 19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 8 & 7 & 10 & 9 & 6 & 12 & 5 & 14 & 4 & 16 & 3 & 18 \\ 21 & 22 & 23 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ 2 & 20 & 22 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \end{array} \right)$$

Алгоритм A_{11} совпадает с A_7 при нахождении нечетных образов. При этом $l = \frac{11+6k-8}{3} = 2k+1$. A_{11} совпадает с A_7 на номерных числах. Что касается четных чисел – они убывают от $n-3$ до $n-(2l+1)=l+7$.

В средней части подстановки α_2 есть блок из четырех столбцов вида (отмечен точками)

$$\left(\begin{array}{cccccc} 2k+4 & 2k+5 & 2k+6 & 2k+7 & 2k+8 & 2k+9 \\ \dots & 2k+7 & 2k+4 & 2k+3 & 2k+6 & 2k+5 & 2k+9 & \dots \end{array} \right)$$

В рассматриваемом случае подстановка α_2 имеет характеристику

$$\rho = (4, 4; 2k+1, 2k+1, 2k+1) \quad (8)$$

Аналогично определяется алгоритм A построения подстановки n -ой степени α_2 для четного n . Все четные числа $n \geq 6$ разбиваем на классы видов $\{6+6k\}, \{8+6k\}, \{10+6k\}, k \in \mathbf{N} \cup 0$.

Тогда подстановка α_2 класса $\{6+6k\}$ имеет характеристику типа (7) в виде $\rho = (4; 2k+1, 2k+1, 2k)$.

Подстановка α_2 для чисел класса $\{8+6k\}$ имеет характеристику аналогичную (8) в виде $\rho = (4, 4; 2k, 2k, 2k)$. Для класса $\{10+6k\}$ характеристика ρ имеет вид $\rho = (4; 2(k+1), 2(k+1), 2(k+1))$.

Л и т е р а т у р а

1. Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. – М.: Наука, 1974
2. Пизо Ш., Заманский М. Курс математики (алгебра и анализ). – М.: Наука, 1971

The function of natural argument with circular property

V.N. Matus, **R.T. Rahmail**

With each crystal can be connect rotation group, that recording permutation vertex. The article considers the condition put on the permutation group.