1 9 9 9 г. № 4
Т р у д ы Ф О Р А

О ЗАДАЧЕ ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МЕМБРАНЫ

А.И. Куев

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

Решается Задача Гурса для уравнения мембраны.

В работе в качестве модельного уравнения с частными производными второго порядка от трех независимых переменных гиперболического типа рассматривается уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{tt} \tag{1}$$

Проведем исследование задачи Гурса для уравнения (1) .

Рассмотрим решение задачи в областях D_1, D_2, D_3, D_4, которые ограничены характеристиками: $x+t=0$, $x-t=0$. D_1 и D_2 – области, задаваемые неравенством: $x^2 - t^2 \le 0$. (См. рис. 1)

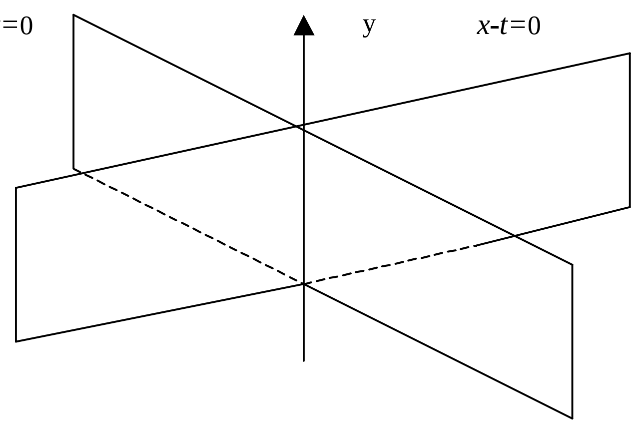

Рис. 1.

Теорема 1. *Если $u(x,y,t)$ регулярное решение уравнения (1) в областях D_1 и D_2 абсолютно интегрируема по y, то задача Гурса поставлена корректно.*

Теорема 2. *Если $u(x,y,t)$ регулярное решение уравнения (1) в областях D_3 и D_4 абсолютно интегрируема по y, то задача Гурса не является корректным.*

Задача Гурса. Найти решение $u(x,y,t)\in C^2(D_1)$, удовлетворяющее условиям

$u(x,y,x)=\varphi(x,y)$, $u(x,y\text{-}x)=\phi(x,y)$, $\varphi(0) = \psi(0)$, $-\infty<y<+\infty$,

где $\varphi(x,y),\phi(x,y)\in C^2(D_1)$, кроме того абсолютно интегрируемы по y в рассматриваемых областях.

Доказательство теоремы 1.

Поскольку $u(x,y,t)$ кусочно гладкая на каждом конечном отрезке числовой оси, абсолютно интегируема на всей оси, то ее можно представить интегралом Фурье.

Осуществим преобразование Фурье по y.

$$\tilde{u}(x,\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,\xi,t) e^{-i\lambda\xi} d\xi \tag{2}$$

Обратное преобразование Фурье по y выглядит следующим образом

$$u(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(x,\lambda,t) e^{i\lambda y} d\lambda \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) сводится к следующему

$$\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{tt} + \lambda\tilde{u} = 0 \tag{4}$$

$\lambda = -y^2$

Условия (2), (3) с помощью преобразования (2) сводятся к следующему:

$$\tilde{u}(x,x) = \tilde{\varphi}(x), \tag{5}$$

$$\tilde{u}(x,-x) = \tilde{\psi}(x), \tag{6}$$

где $-\infty<\lambda<+\infty$.

Запишем рассматриваемое уравнение в характеристических координатах $\xi = x + t,\ \eta = x - t.$

$$v_{\xi\eta} - \lambda v = 0, \tag{7}$$

где $v(\xi,\eta) = \tilde{u}(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}).$

Функции Римана $R(\xi_1, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = 1$, если примем в качестве $v = J_0(\lambda\sqrt{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)}$ - функцию Бесселя нулевого порядка.

Наличие функции Римана позволяет выписать в квадратурах решение Задачи Гурса для уравнения (7). [1]

Решение задачи Гурса

$$\begin{aligned}&\tilde{u}(\xi,\eta_0) = \tilde{\varphi}(\xi), \tilde{u}(\xi_0,\eta) = \tilde{\psi}(\eta),\\ &\varphi(\xi_0) = \tilde{\psi}(\eta_0),\end{aligned} \tag{8}$$

где $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции для уравнения (7) формулой

$$\begin{aligned}&\tilde{u}(\xi,\eta) = R(\xi,\eta_0;\xi,\eta)\tilde{\varphi}(\xi) + R(\xi_0,\eta;\xi,\eta)\tilde{\varphi}(\eta) - R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)\tilde{\varphi}(\xi_0) -\\ &-\int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0,\tau;\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\tau}[R(\xi_0,\tau;\xi,\eta)]\tilde{\psi}(\tau)d\tau - \int_{\xi_0}^{\xi}\frac{\partial}{\partial\tau}[R(\tau,\eta_0;\xi,\eta)]\tilde{\psi}(\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{9}$$

Условия задачи Гурса для $\tilde{u}(x,t)$ порождают условия для $\upsilon(\xi,\eta)$:

$$\upsilon(\xi,\eta) = \tilde{u}\left(\frac{\xi}{2},\frac{\xi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

$$\upsilon(\eta,\eta) = \tilde{u}\left(\frac{\eta}{2},-\frac{\eta}{2}\right) = \psi\left(\frac{\eta}{2}\right).$$

Кроме того, $R(\xi,0;\ \xi,\eta) = 1$, $R(0,\eta;\ \xi,\eta) = 1$, $R(0,0;\ \xi,\eta) = J_0(\lambda\sqrt{x^2-t^2}$.

Поэтому искомое решение в силу (9) и подставляя вместо $R(\xi,\ \eta;\ \xi,\ \eta)$ $J_0(\lambda\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}$ и переходя к прежним переменным получаем решение задачи Гурса для уравнения (4)

$$\begin{aligned}&\tilde{u}(x,t) = \tilde{\varphi}\left(\frac{x+t}{2}\right) + \tilde{\psi}\left(\frac{x-t}{2}\right) - J_0(\lambda\sqrt{x^2-t^2})\varphi(0) -\\ &-\int_0^{x+t}\frac{\partial}{\partial\tau}J_0(\lambda\sqrt{(\tau-x-t)(t-x)}\tilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau) -\\ &-\int_0^{x-t}\frac{\partial}{\partial\tau}J_0(\lambda\sqrt{(x+t)(x-t-\tau)}\tilde{\psi}\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau).\end{aligned} \tag{10}$$

Осуществив обратное преобразование Фурье (3), получим решение задачи Гурса для уравнения (1):

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) = {} & \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - J_0(\lambda\sqrt{x^2-t^2}) - \\
& - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} d\lambda \int_0^{x+t} \frac{\partial}{\partial\tau} J_0(\lambda\sqrt{(\tau-x-t)(t-x)})\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau - \\
& - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} d\lambda \int_0^{x-t} \frac{\partial}{\partial\tau} J_0(\lambda\sqrt{(x+t)(x-t-\tau)})\psi\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Заметим, из общего решения задачи (11) следует, что в областях D_1, D_2 Задача Гурса поставлена корректно.

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим области D_3, D_4. В данном случае в подынтегральном выражении функция Бесселя определяется с комплексным аргументом. Это говорит о том, что на некотором интервале при небольших изменениях переменной функция Бесселя резко изменяется.

Таким образом решение Задачи Гурса в областях D_3, D_4, является неустойчивой, а следовательно задача поставлена некорректно. Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. Изд. АН СССР, 1959.

Goursat problem for membrane equation

A.I. Kuev

The Goursat problem for membrane equation is solved.

