ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ I. KATSUGU

Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический институт, Майкоп

Указан алгоритм нахождения дифференциального уравнения, решением которого является конечная сумма решений уравнения Риккати.

В работе [1] решена следующая задача.

Пусть u_1 *и* u_2 *- решения уравнения Риккати*

$$u' + u^2 + a(x) = 0. \tag{1}$$

Тогда функция $\varphi = u_1 + u_2$ *является решением дифференциального уравнения*

$$\varphi'' + 3\varphi'\varphi + \varphi^2 + 4a\varphi + 2a' = 0. \tag{2}$$

Покажем, что эту задачу удобнее сформулировать в терминах теории представлений групп и алгебр Ли и конструкции мультипликативного интеграла [2]. В самом деле, уравнение (1) преобразованием $u = y'/y$ переводится в линейное уравнение

$$y' + a(x)y = 0. \tag{3}$$

Затем уравнение (3) с помощью представления алгебры Ли A_1 со старшим весом $\overset{2}{0}$ переводится в линейное уравнение

$$\psi''' + 4a\psi' + 2a'\psi = 0, \tag{4}$$

где $\psi = y_1 y_2$. Далее, преобразование $\varphi = \psi'/\psi$ уравнение (4) переводится в уравнение (2).

Таким образом, имеет место следующая диаграмма.

$$\begin{array}{ccc}
(1) & \xrightarrow{u=y'/y} & (3) \\
\downarrow \varphi = u_1 + u_2 & & \downarrow \psi = y_1 y_2 \\
(2) & \xrightarrow{\varphi=\psi'/\psi} & (4)
\end{array}$$

Возникает следующая задача. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_k$ - решение уравнения (1). Решением какого дифференциального уравнения является функция $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i$? Непосредственно найти это уравнение затруднительно из-за трудоемких вычислений. Поэтому воспользуемся построенной диаграммой. В этом случае возьмем представление алгебры Ли A_k со старшим весом $\Phi = \overset{k}{0}$.

Это связано с тем, что имеют место равенства:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} u_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i'}{y_i} = \frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{k} y_i\right)'}{\prod\limits_{i=1}^{k} y_i} = \frac{\psi'}{\psi}.$$

Рассмотрим мультипликативный интеграл, соответствующий уравнению (3)

$$\overset{\frown}{\int} E + A(x)dx,$$

где $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}$.

Представление $\Phi = \overset{k}{0}$ переводит этот интеграл в интеграл

$$\overset{\frown}{\int} E + \Phi(A(x))dx.$$

Имеется алгоритм, позволяющий конструктивно находить элементы матрицы $\Phi(A(x))$ [3]. Далее, необходимо калибровочно преобразовать матричную функцию $\Phi(A(x))$ с помощью неособой матрицы $T = T(x)$ таким образом, чтобы полученная при этом матрица $\tilde{A}$ была сопровождающей, т.е., чтобы все элементы верхней наддиагонали были равны единице и не все элементы последней строки были нулевыми. При этом калибровочное преобразование имеет вид:

$$\tilde{A} = T\Phi(A)T^{-1} + T'T^{-1}.$$

Известно [4], что элементы матрицы $T = \left(T_i^{\,j}\right)$ связаны между собой рекуррентным соотношением:

$$T_i^{\,j} = (j-1)(k-j+2)T_{i-1}^{\,j+1} + \left(T_{i-1}^{\,i}\right)' + aT_{i-1}^{\,j+1},$$

где $T_i^{\,i} = (i-k)!k(k-1)\ldots(k-i+1)$, $T_{i+1}^{\,i} = 0$, $i = 1,2,\ldots,k+1$.

После того, как матрица $\tilde{A}$ найдена, легко составить дифференциальное уравнение, для которого $\prod_{i=1}^{k} y_i$ будет решением.

Элементы последней строки матрицы $\tilde{A}$ будут соответственно коэффициентами при производных этого линейного уравнения.

И, наконец, сделав преобразование $\varphi = \psi'/\psi$ получаем искомое нелинейное уравнение.

Пример. Пусть u_1, u_2, u_3 - решение уравнения (1). Тогда функция $\varphi = u_1 + u_2 + u_3$ является решением уравнения

$$\varphi''' + 4\varphi\varphi'' + 6\varphi^2\varphi' + 3(\varphi')^2 + \varphi^4 + 10a(\varphi' + \varphi^2) + 10a'\varphi + 3(a'' - 3a^2) = 0,$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Заметим, что задачу I. Katsugu можно рассматривать как проективный аналог теоремы Лиувилля о линейных дифференциальных уравнениях [3].

Литература.

1. *I.Katsugu.* Proc. Jap. Acad. A. (1993) 69, v 8, p 327-330.
2. *Паланджянц Л.Ж.* Геометрия мультипликативного интеграла. Майкоп, (1997), 92 с.
3. *Паланджянц Л.Ж.* Дифференциальные уравнения, (1992), т. 28, № 10, с. 1733 – 1736.
4. *Паланджянц Л.Ж.* Труды ФОРА, Майкоп, (1997), № 2, с. 41-43.

About one problem of I. Katsugu

L.Zh. Palandzhyants

The author points out a finding algorithm of differential equation, the solution of which is finite sum of solutions' Riccaty's equation.

