1 9 9 8 г. **№ 3**

Т р у д ы   Ф О Р А

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Дж. Д. Мирзов

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Даются асимптотические формулы для колеблющихся решений одного уравнения Эмдена-Фаулера.

Рассмотрим уравнение

$$u'' + t^{-(n+3)/2}|u|^n \operatorname{sign} u = 0\,, \tag{1}$$

где $t > 0, n > 0$. В заметке даются асимптотические формулы для колеблющихся решений уравнения (1), несколько отличающиеся от тех, что приведены в [1].

Теорема. *Пусть* $0 < n < 1$. *Тогда для любого нетривиального колеблющегося решения* $u(t)$ *уравнения (1) справедливы равенства*

$$u(t) = t^{1/2} f^{-1}\left[\sqrt{c}\sin\left((c_0 + o(1))\ln t\right)\right],\ t \to +\infty\,,$$

$$u'(t) = (1/2)t^{-1/2} f^{-1}\left[\sqrt{c}\sin\left((c_0 + o(1))\ln t\right)\right] + \sqrt{c}t^{-1/2}\cos\left((c_0 + o(1))\ln t\right),\ t \to +\infty\,,$$

где $c_0 > 0$, f^{-1}*-функция обратная для*

$$f(z) = \operatorname{sign} z\sqrt{2|z|^{1+n}/(1+n) - z^2/4} \text{ при } |z| < 2^{2/(1-n)} \text{ и } 0 < c < ((1-n)/(1+n))2^{2(1+n)/(1-n)}.$$

Доказательство. С помощью преобразования

$$x(s) = t^{1/2}u'(t),\ y(s) = t^{-1/2}u(t),\ s = \ln t$$

уравнение (1) перепишем в виде системы

$$x' = x/2 - |y|^n \operatorname{sign} y, \quad y' = x - y/2\,. \tag{2}$$

Нетривиальное колеблющееся решение системы (2), определяемое начальными условиями $x(0) = \sqrt{c}, \quad y(0) = 0$, удовлетворяет тождеству

$$x^2(s) - x(s)y(s) + 2|y(s)|^{1+n}/(1+n) \equiv c\,,$$

причем

$$|x(s)| < 2^{(1+n)/(1-n)},\ |y(s)| < 2^{2/(1-n)} \text{ при } -\infty < s < +\infty\,.$$

Введем функции

$$\omega_1(\tau) = \operatorname{sign} y(s)\sqrt{2|y(s)|^{1+n}/(1+n) - y^2(s)/4}\,,$$

$$\omega_2(\tau) = x(s) - y(s)/2\,,$$

где

$$\tau = \int_0^s \frac{|y(\vartheta)|^n - |y(\vartheta)|/4}{\sqrt{2|y(\vartheta)|^{1+n}/(1+n) - y^2(\vartheta)/4}}\,d\vartheta\,. \tag{3}$$

Если числа s_n таковы, что $y(s_n) = 0$, то из (2) имеем

$$y'(s_n) = x(s_n) = \pm\sqrt{c} \neq 0 .$$

Следовательно, найдутся $\varepsilon_n > 0$ и $\delta_n > 0$, что

$$|y(s)| \geq \varepsilon_n |s - s_n| \text{ при } s \in [s_n - \delta_n, s_n + \delta_n],$$

поэтому интегралы $\int_{s_n}^{s} |y(\vartheta)|^{(n-1)/2} d\vartheta$ сходятся. Последнее означает, что несобственный интеграл (3) при любом конечном s сходится.

Легко проверяется, например, с учетом [2, с.235], что $\omega_1(\tau), \omega_2(\tau)$ является решением задачи

$$\omega_1' = \omega_2, \omega_2' = -\omega_1, \omega_1(0) = 0, \omega_2(0) = \sqrt{c} .$$

Следовательно,

$$\omega_1(\tau) = \sqrt{c}\sin\tau, \omega_2(\tau) = \sqrt{c}\cos\tau .$$

В силу периодичности $y(s)$ существует конечный предел

$$c_0 = \lim_{s\to+\infty} \frac{\tau(s)}{s}$$

и так как $\tau'(s) > 0$, то $c_0 > 0$. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема остается верной при $t \to 0_+$.

Замечание 2. Асимптотические представления колеблющихся и неколеблющихся решений уравнения (1) при $n > 1$ даются в [3].

Литература

1. *Мирзов Дж.Д* //Дифференциальные уравнения. 1996. Т.32, №11, с.1576.
2. *Филиппов В.В.* Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Издательство МГУ, 1993.
3. *Мирзов Дж.Д* //Труды ФОРА. Майкоп, 1997. №2. С.49-55.

Asymptotic representations of oscillating solutions of one nonlinear equation

J.D. Mirsov

In this article the author gives asymptotic formulas for oscillating solutions of one equation of Amden-Fawler.

