1 9 9 8 г. **№ 3**

Т р у д ы Ф О Р А

СУЖЕНИЕ ОБРАЗУЮЩИХ КОЛЕЦ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГРУПП НА ПОДГРУППЫ

В.А. Козлов

Армавирский государственный педагогический институт, Армавир

Решена задача о суждениях образующих элементов в кольцах представлений (а, следовательно, и любого представления) групп Ли $SL(N,C)$ на подгруппы $SL(n,C)$, при $N = 4, 8, 15$ и $n = 2, 3, 4$ соответственно. Вложения обусловлены присоединенными представлениями.

Задача о сужении представления группы на подгруппу является одной из составляющих основной задачи теории представлений о разложении представлений в сумму неприводимых компонент, т.е. в их "спектральном синтезе". Поэтому задача о сужении относится к числу классических задач теории представлений групп. Сформулируем ее.

Пусть G - группа, H - ее подгруппа, $\hat{O}$ - неприводимое представление группы G. Сужение $\hat{O}$ на подгруппу H является, вообще говоря, приводимым представлением. Более того, оно вполне приводимо, т.е. разлагается в прямую сумму неприводимых компонент. Требуется найти это разложение.

В таком общем виде задача о сужении трудна и, по-видимому, далека от полного решения. Поэтому решение ее в отдельных случаях представляет интерес. Мы рассматриваем случай, когда G и H - специальные линейные группы Ли, $\hat{O}$ - линейное представление. Точнее, если $H = SL(n,C)$, а φ - присоединенное представление $SL(n,C)$, то φ задает вложение - $\varphi: SL(n,C) \to SL(N,C)$. При этом группа $SL(N,C)$ реализована своим простейшим представлением $\hat{O}$, где $\dim \hat{O} = N = \dim \varphi$.

Известно, что комплексные предствления группы Ли $SL(N,C)$ порождают кольцо относительно операций прямой суммы и тензорного произведения представлений. Это кольцо называют кольцом представлений и обозначают $RSL(N,C)$. Обозначим через $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_{N-1}$ - линейные представления $SL(N,C)$, отвечающие $1, 2, \ldots N-1$ внешним степеням группы $SL(N,C)$. Они имеют схемы Дынкина $\overset{1}{\circ}-\circ-\circ\ldots\circ-\circ$, $\circ-\overset{1}{\circ}-\circ\ldots\circ-\circ$, ..., $\circ-\circ-\circ\ldots\circ-\overset{1}{\circ}$ соответственно. Можно показать, что всякое линейное представление $SL(N,C)$ есть многочлен от переменных $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_{N-1}$ относительно операций прямой суммы и тензорного произведения в кольце $RSL(N,C)$. Λ_0 - одномерное тривиальное представление со схемой $\circ-\circ-\circ\ldots\circ-\circ$. Таким образом, в качестве образующих элементов кольца $RSL(N,C)$ можно выбрать $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_{N-1}$. Следовательно, решение задачи о сужении произвольного неприводимого представления группы на подгруппу сводится к нахождению сужений образующих элементов кольца представлений этой группы.

Значительное упрощение в решении поставленной задачи дает использование когомологических операций Адамса Ψ_k [2], рассматриваемых как виртуальные представления, т.е. элементы кольца представлений. Дадим их определение.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_r$ - r формальных переменных. Сумма $\sum_{i=1}^{r} x_i^k$ является симметрической функцией, называемой полиномом Ньютона и, как известно, может быть записана в виде $Q_r^k\left(\sigma_1^{(r)}, \ldots, \sigma_r^{(r)}\right)$ с целыми коэффициентами, где $\sigma_j^{(r)}$ есть $j-$ ÿ элементарная симметрическая функция от r переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Положим $\Psi_k^r = Q_r^k(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r)$. Здесь под суммой и произведением понимается прямая сумма и тензорное произведение представлений. Таким образом, Ψ_k^r - виртуальное представление, называемое операцией Адамса.

Как известно, присоединенное представление φ группы Ли $SL(n,C)$ с точностью до эквивалентности определяется схемами Дынкина $\overset{2}{\circ}$ - при $n=2$, $\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}$ - при $n=3$, $\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}$ - $n=4$ и т.д. В случае $SL(2,C)$ представление φ индуцирует вложение $\varphi : SL(2,C) \to SL(3,C)$, где $SL(3,C)$ задана простейшим представлением Λ_1 со схемой $\overset{1}{\circ}-\circ$.

Справедлива следующая очевидная лемма (здесь и в дальнейшем сужение представления Φ на φ обозначается $\Phi(\varphi)$).

Лемма 1. $\Lambda_1\left(\overset{2}{\circ}\right) = \overset{2}{\circ}$, $\Lambda_2\left(\overset{2}{\circ}\right) = \overset{2}{\circ}$.

В доказательстве следующих двух лемм использован прием, который продемонстрируем на примере $RLS(8,C)$.

По определению $\Psi_1 = \Lambda_1$, $\Psi_2 = \Lambda_1^{\otimes 2} - 2\Lambda_2$. Очевидно, $\Lambda_1\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right) = \overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}$, найдем $\Lambda_2\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right)$.

Представим Λ_2 в виде

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\Lambda_1^{\otimes 2} - \Psi_2\right) = \frac{1}{2}\left(\Psi_1^{\otimes 2} - \Psi_2\right), \qquad (1)$$

$$\Psi_1\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right) = \Lambda_1\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right) = \overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}. \qquad (2)$$

В силу свойств операций Ψ_k:

$$\Psi_2\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right) = \Psi_2\left(\overset{1}{\circ}-\circ \otimes \circ-\overset{1}{\circ} \;-\; \circ-\circ\right) = \Psi_2\left(\overset{1}{\circ}-\circ\right) \otimes \Psi_2\left(\circ-\overset{1}{\circ}\right) - \Psi_2(\circ-\circ), \qquad (3)$$

С другой стороны

$$\Psi_2\left(\overset{1}{\circ}-\circ\right) = \Lambda_1^{\otimes 2}\left(\overset{1}{\circ}-\circ\right) - 2\Lambda_2\left(\overset{1}{\circ}-\circ\right),$$

$$\Psi_2\left(\circ-\overset{1}{\circ}\right) = \Lambda_1^{\otimes 2}\left(\circ-\overset{1}{\circ}\right) - 2\Lambda_2\left(\circ-\overset{1}{\circ}\right).$$

Таким образом можно найти $\Psi_2\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right)$. Тогда $\Lambda_2\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right)$ вычисляется по формуле

$$\Lambda_2\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right) = \frac{1}{2}\left(\Psi_1^{\otimes 2}\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right)\right) - \Psi_2\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right).$$

Лемма 2. $\Lambda_1\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right) = \overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}$, $\Lambda_2\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right) = \overset{3}{\circ}-\circ + \circ-\overset{3}{\circ} + \overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}$,

$\Lambda_3\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right) = \overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ} + \overset{3}{\circ}-\circ + \circ-\overset{3}{\circ} + \overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}$, $\Lambda_4\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right) = 2\,\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ} + 2\,\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}$,

$\Lambda_5 = \left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right) = \overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ} + \overset{3}{\circ}-\circ + \circ-\overset{3}{\circ} + \overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}$, $\Lambda_6\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right) = \circ-\overset{3}{\circ} + \overset{3}{\circ}-\circ + \overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}$, $\Lambda_7\left(\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}\right) = \overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}$.

Лемма 3. $\Lambda_1\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right)=\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}$, $\Lambda_2\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right)=\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\circ+\circ-\overset{1}{\circ}-\overset{2}{\circ}+\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}$,

$$\Lambda_3\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right)=\overset{1}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}+\overset{2}{\circ}-\circ-\overset{2}{\circ}+\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\circ+\circ-\overset{1}{\circ}-\overset{2}{\circ}+\overset{4}{\circ}-\circ-\circ+\circ-\circ-\overset{4}{\circ}+\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}+$$
$$+\circ-\overset{2}{\circ}-\circ+\circ-\circ-\circ,$$

$$\Lambda_4\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right)=\overset{3}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}+\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\overset{3}{\circ}+2\,\overset{1}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}+2\,\overset{2}{\circ}-\circ-\overset{2}{\circ}+\circ-\overset{4}{\circ}-\circ+\circ-\overset{1}{\circ}-\overset{2}{\circ}+$$
$$+\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\circ+\circ-\circ-\overset{4}{\circ}+\overset{4}{\circ}-\circ-\circ+2\,\circ-\overset{2}{\circ}-\circ+2\,\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ},$$

$$\Lambda_5\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right)=\overset{3}{\circ}-\circ-\overset{3}{\circ}+\circ-\overset{4}{\circ}-\circ+2\,\overset{3}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}+2\,\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\overset{3}{\circ}+\overset{2}{\circ}-\overset{3}{\circ}-\circ+\circ-\overset{3}{\circ}-\overset{2}{\circ}+$$
$$+2\,\overset{2}{\circ}-\circ-\overset{2}{\circ}+3\,\overset{1}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}+3\,\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\circ+3\,\circ-\overset{1}{\circ}-\overset{2}{\circ}+\circ-\overset{2}{\circ}-\circ+2\,\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}+\circ-\circ-\circ,$$

$$\Lambda_6\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right)=\overset{4}{\circ}-\circ-\circ+\circ-\circ-\overset{4}{\circ}+2\,\overset{3}{\circ}-\circ-\overset{3}{\circ}+2\,\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\overset{3}{\circ}+2\,\overset{3}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}+2\,\overset{2}{\circ}-\overset{3}{\circ}-\circ+$$
$$+2\,\circ-\overset{3}{\circ}-\overset{2}{\circ}+\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}+3\,\overset{2}{\circ}-\circ-\overset{2}{\circ}+5\,\overset{1}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}+3\,\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\circ+3\,\circ-\overset{1}{\circ}-\overset{2}{\circ}+\circ-\overset{2}{\circ}-\circ+$$
$$+3\,\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ},$$

$$\Lambda_7\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right)=\overset{4}{\circ}-\circ-\circ+\circ-\circ-\overset{4}{\circ}+2\,\circ-\overset{4}{\circ}-\circ+\overset{3}{\circ}-\circ-\overset{3}{\circ}+3\,\overset{3}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}+3\,\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\overset{3}{\circ}+$$
$$+\overset{2}{\circ}-\overset{3}{\circ}-\circ+\circ-\overset{3}{\circ}-\overset{2}{\circ}+3\,\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}+3\,\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\circ+3\,\circ-\overset{1}{\circ}-\overset{2}{\circ}+4\,\overset{2}{\circ}-\circ-\overset{2}{\circ}+5\,\overset{1}{\circ}-\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}+$$
$$+2\,\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}+3\,\circ-\overset{2}{\circ}-\circ+\circ-\circ-\circ,$$

$$\Lambda_8\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right)=\Lambda_7\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right),\ \Lambda_9\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right)=\Lambda_6\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right),\ \Lambda_{10}\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right)=\Lambda_5\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right),\ldots\ldots$$
$$\ldots,\ \Lambda_{14}\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right)=\Lambda_1\left(\overset{1}{\circ}-\circ-\overset{1}{\circ}\right).$$

Отметим, что при получении результатов были использованы различные методы: теорема о части, о цепочке, правило Юнга.

Литература.

1. *Адамс Дж.* Лекции по группам Ли. М., Наука, (1979), 144 с.
2. *Атья М.* Лекции по К-теории. М., Мир, (1967), 260 с.
3. *Желобенко Д.П.* Компактные группы Ли и их представления. М., (1979), 664 с.

The narrowing of the generatrix rings of representations some groups in to subgroups

V.A. Kozlov

The problem is solved about the generatrix elements in rings of representations Lie groups $SL(N,C)$ in to subgroup $SL(n,C)$ for $N=4,8,15$ and $n=2,3,4$ accordingly.

