1 9 9 8 г. **№ 3**

Труды ФОРА

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ, ПОЛИНОМИАЛЬНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Л. Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический институт, Майкоп

С помощью мультипликативного интегрирования по частям и соответствующего калибровочного преобразования решается задача о нахождении матричных функций, коммутирующих с подинтегральной матричной функцией, полиномиально зависящей от параметра.

Рассмотрим мультипликативный интеграл [1,2]

$$\overset{\frown}{\int} E + U(x,\lambda)dx, \qquad (1)$$

где $U = U(x,\lambda)$-полиномиальная по λ матричная функция второго порядка от вещественной переменной x; λ -некоторый параметр.

Калибровочное преобразование функции $U(x,\lambda)$ с помощью неособой матричной функции G имеет вид:

$$\tilde{U} = GUG^{-1} + G'G^{-1}, \qquad (2)$$

и приводит интеграл (1) к виду

$$\overset{\frown}{\int} E + U(x,\lambda)dx = G^{-1}\overset{\frown}{\int} E + \tilde{U}(x,\lambda)dx$$

Обозначим через $C(U)$ множество всех матричных функций, коммутирующихся с u, т.е.

$$C(U) = \{z : [z,U] = 0\}$$

Возникает задача о нахождении калибровочных преобразований (2), при которых $\tilde{U} \in C(U)$.

Эта задача была сформулирована Д. Лебедевым и А. Радулом на семинаре профессора О. В. Мантурова и излагалась с точки зрения калибровочных преобразований и алгебр Каца-Муди. В данной статье эта задача решается без привлечения алгебр Каца-Муди и для произвольной степени λ. Основная идея решения задачи такова.

Представим подынтегральную функцию U в виде суммы двух слагаемых: $U = A + B$.

Тогда формула мультипликативного интегрирования по частям примет вид:

$$\overset{\frown}{\int} E + (A+B)dx = \overset{\frown}{\int} E + Adx \cdot \overset{\frown}{\int} E + Ad(\overset{\frown}{\int} E + Adx)\{B\}dx,$$

где $Ad(g)\{f\} = g^{-1}fg$.

В качестве функции G возьмем функцию $G = E + X(x,\lambda)$, где $X = X(x,\lambda)$ -неизвестная функция. Тогда $G^{-1} = E - X(x,\lambda) + \ldots$

При этом условие (2) примет вид:

$$\tilde{U} = (E+X)U(E+X)^{-1} + (E+X)'(E+X)^{-1} =$$
$$A + B + [X,A] + X' + [X,B] - XAX - X'X - XBX.$$

Пусть $A \in C(U)$. Тогда функцию $X(x,\lambda)$ можно найти из условия $B + [X,A] \in C(U)$.

I. Пусть $U_1(x,\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda-u & 0\end{pmatrix}$, где $u=u(x)$-некоторая гладкая функция.

Представим U_1 в виде суммы двух слагаемых следующим образом:

$$U_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ -u & 0\end{pmatrix}=U_1^{-1}+U_1^{1}.$$

Тогда $C(U_1^{-1})=\left\{z:\left[z;U_1^{-1}\right]=0\right\}$.

Матричная функция $G=E+X$, где последовательно нужно выбрать либо $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & -a\end{pmatrix}$, либо $X=\begin{pmatrix}0 & \lambda^{-1}c\\ d & 0\end{pmatrix}$, где $a,\ c,\ d$ - некоторые неизвестные функции.

1) Пусть $G_2=E+X_2=E+\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & -a\end{pmatrix}, a=a(x,\lambda)$.

Тогда условие (2) примет вид:

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_1&=U_1^{-1}+(U_1^{1}+[X_2,U_1^{-1}])+X_2'+([X_2,U_1^{1}]-X_2U_1^{-1}X_2)-\\&-X_2X_2'-X_2U_1^{1}X_2\end{aligned}\tag{3}$$

В разложении $\widetilde{U}_1$ установим некоторый порядок, а именно, будем группировать члены разложения по сумме верхних индексов для U_k^i и нижних индексов для X_k. Заметим, что данный выбор слагаемых U_1 обеспечивает в разложении $\widetilde{U}_1$ коэффициенты, рациональные по λ_1. Из условия

$$U_1^{1}+[X_2,U_1^{-1}])=\begin{pmatrix}0 & 2a\lambda^{-1}\\ -u-2a & 0\end{pmatrix}\in C(U_1^{-1}),$$

следует, что $a=-\dfrac{u}{4\lambda}$.

Подставляя значение $a=-\dfrac{u}{4\lambda}$ в равенство (3), получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_1&=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda & 0\end{pmatrix}-\frac{u}{2}\lambda^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda & 0\end{pmatrix}+\frac{u'}{4}\lambda^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{u^2}{16}\lambda^{-2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3\lambda & 0\end{pmatrix}-\\&-\frac{uu'}{16}\lambda^{-2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{u^3}{16}\lambda^{-2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

где первые два члена принадлежат $C\,(U_1^{-1})$.

2) Пусть $\widetilde{U}_1=U_2, G_2=E+X_3$, где

$$X_3=\begin{pmatrix}0 & \lambda^{-1}c\\ d & 0\end{pmatrix},\ c=c(x,\lambda), d=d(x,\lambda).$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\widetilde{U}_2=(E+X_3)U_2(E-X_3)+X_3'(E-X_3)=\\&(E+X_3)\big((E+X_2)(U_1^{-1}+U_1^{1})(E-X_2)+X_2'-X_2'X_2\big)(E-X_3)+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+X_3' - X_3'X_3 = U_1^{-1} + \left(U_1^{1} + [X_2, U_1^{-1}]\right) + \left(X_2' + [X_3, U_1^{-1}]\right) + \\
&+\left([X_2, U_1^{1}] - X_2U_1^{-1}X_2 + X_3'\right) + \left(-X_2'X_2 + [X_3, U_1^{1}] + [X_3, [X_2, U_1^{-1}]]\right) + \\
&\quad +\left(-X_2U_1^{1}X_2 - X_3U_1^{-1}X_3\right) + [X_3, X_2'] + \left([X_3, [X_2, U_1^{1}]] - X_3'X_3 - \right. \\
&\quad \left. - [X_3, X_2U_1^{-1}X_2]\right) - [X_3, X_2'X_2] - X_3U_1^{1}X_3 - X_3, [X_2, U_1^{-1}]X_3 - \\
&-\left([X_3, X_2U_1^{1}X_2] - X_3X_2'X_3\right) + \left(-X_3[X_2, U_1^{1}]X_3 - X_3X_2U_1^{-1}X_2X_3\right) + \\
&+\left(X_3X_2'X_2X_3\right) + \left(X_3X_2U_1^{1}X_2X_3\right)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Из условия

$$
X_2' + [X_3, U_1^{-1}] = \begin{pmatrix} -\dfrac{u'}{4\lambda} + \dfrac{c-d}{\lambda} & 0 \\ 0 & \dfrac{u'}{4\lambda} + \dfrac{d-c}{\lambda} \end{pmatrix} \in C(U_1^{-1})
$$

следует, что $c = d + \dfrac{u'}{4}$.

При этом $X_2' + [X_3, U_1^{-1}] \equiv 0$.

Следовательно, $G = E + \lambda^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \left(d + \dfrac{u'}{4}\right) \\ d & 0 \end{pmatrix}$.

Подставляя значение $c = d + \dfrac{u'}{4}$ в равенство (4), получаем значение $\tilde{U}_2$, где первые три члена разложения принадлежат $C(U_1^{-1})$ (третий член тождественно равен нулю).

Продолжая этот процесс, через k шагов получаем:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{U}_k = \left(E + X_{k+2}\right)\left(\left(E + X_{k+1}\right)U_k\left(E - X_{k-1}\right) + X_{k+1}' - X_{k+1}'X_{k+1}\right)\left(E - X_{k+2}\right) + \\
&X_{k+2}' - X_{k+2}'X_{k+2} = U_k + \left[X_{k+1}, U_k\right] - X_{k+1}U_kX_{k+1} + X_{k+1}' - X_{k+1}'X_{k+1} + \\
&+\left[X_{k+2}, U_k\right] + \left[X_{k+2}, \left[X_{k+1}, U_k\right]\right] - \left[X_{k+2}, X_{k+1}U_kX_{k+1}\right] + \left[X_{k+2}, X_{k+1}'\right] - \\
&\qquad -\left[X_{k+2}, X_{k+1}'X_{k+1}\right] - X_{k+2}U_kX_{k+2} - X_{k+2}\left[X_{k+1}, U_k\right]X_{k+2} + \\
&\qquad + X_{k+2}X_{k+1}U_kX_{k+1}X_{k+2} - X_{k+2}X_{k+1}'X_{k+2} + X_{k+2}X_{k+1}'X_{k+1}X_{k+2},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где уже имеется k членов, принадлежащих $C(U_1^{-1})$.

II. Пусть. $U_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - u & 0 \end{pmatrix}$.

Представим U_1 в виде суммы двух слагаемых следующим образом:

$$
U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} = U_1^{-1} + U_1^{1}.
$$

Покажем, что такое разложение U_1 на слагаемые приводит к разложению $\tilde{U}_1$ на члены, полиномиальные по λ.

Пусть $C(U_1^{-1}) = \left\{z : \left[z, U_1^{-1}\right] = 0\right\}$.

1) Пусть $G_2 = E + X_2 = E + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, где $a = a(x, \lambda)$.

Сгруппируем члены разложения $\widetilde{U}_1$ аналогично в случае I. Тогда

$$\widetilde{U}_1 = U_1^{-1} + (U_1^1 + [X_2, U_1^{-1}]) + X_2' + ([X_2, U_1^1] - X_2 U_1^{-1} X_2) - \\ - X_2' X_2 - X_2 U_1^1 X_2. \tag{6}$$

Из условия

$U_1^1 + [X_2, U_1^{-1}]) = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ \lambda + 2a & 0 \end{pmatrix} \in C(U_1^{-1})$ следует, что $a = -\dfrac{\lambda}{4u}$. Подставив это значение в равенство (6), получаем:

$$\widetilde{U}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u & 0 \end{pmatrix} - \frac{\lambda}{2u}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u & 0 \end{pmatrix} - \frac{\lambda}{4}\left(\frac{1}{u}\right)'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda^2}{16u^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} + \\ + \frac{\lambda^2}{16}\left(\left(\frac{1}{u}\right)'\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\lambda}{16}\left(\left(\frac{1}{u}\right)'\right)^2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где первые два члена принадлежат $C(U_1^{-1})$.

2) Пусть $G_3 = E + X_3 = E + \begin{pmatrix} 0 & -u^{-1}c \\ d & 0 \end{pmatrix}$,

где $c = c(x,\lambda), d = d(x,\lambda)$.

Имеет место равенство типа (4).

Из условия

$$X_2' + [X_3, U_1^{-1}] = -\frac{\lambda}{4}\left(\frac{1}{u}\right)'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c-d & 0 \\ 0 & d-c \end{pmatrix} \in C(U_1^{-1})$$

следует, что $c = d + \dfrac{\lambda}{4}\left(\dfrac{1}{u}\right)'$.

При этом $X_2' + [X_3, U_1^{-1}] \equiv 0$.

Подставив значение $c = d + \dfrac{\lambda}{4}\left(\dfrac{1}{u}\right)'$ в равенство типа (4), получаем значение $\widetilde{U}_2$, где первые три члена принадлежат $C(U_1^{-1})$. (Третий член нулевой).

Продолжая этот процесс, через k шагов получим равенство типа (5), где имеется k членов, принадлежащих $C(U_1^{-1})$.

Интересно описать множество $C(U)$ в случае матричных функций произвольного порядка.

Литература

1. *Паланджянц Л. Ж.* Геометрия мультипликативного интеграла. Майкоп: МП "Качество", 1997.-92 с.
2. *Мантуров О. В.* Мультипликативный интеграл. //Проблемы геометрии , т.22, 1990, с.167-215.

About multiplicative integration of matrices functions, polinomiality depending from parameter

L.Zh. Palandzhants

With the help of multiplicative piecemeal integration and appropriate calibration transformation the problem is solved about finding the matrices functions, commutating with underintegral matrices function, polinomiality depending from the parameter.

