1 9 9 8 г. **№ 3**

Т р у д ы Ф О Р А

НЕКОТОРЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Д.С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Для дифференциальной системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \varphi(x,y)\Phi(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + r(x,y)R(x,y); \end{cases}$ удовлетворяющей условиям существования и единственности решения задачи Коши, методом топографической системы Пуанкаре найдены достаточные условия существования предельных циклов, и указана оценка их местоположения на фазовой плоскости. Результаты, полученные в данной заметке, обобщают некоторые ранее известные результаты.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \varphi(x,y)\Phi(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + r(x,y)R(x,y); \end{cases} \tag{1}$$

в предположении, что в некоторой односвязной открытой области $G \subset \mathbf{R}^2$ выполнены условия:

$$\begin{cases} \varphi(0,y) \equiv 0, \\ r(x,0) \equiv 0, \\ x\varphi(x,y) \geq 0, \\ yr(x,y) \geq 0; \end{cases} \tag{*}$$

и, кроме того, функции φ, Φ, r, R - непрерывны вместе с частными производными первого порядка.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $R(x,y) \equiv \Phi(x,y)$ *и уравнение* $\Phi(x,y) = 0$ *определяет в области* G *конечное (счетное) множество простых замкнутых кривых, окружающих начало координат* $(0;0)$ *и допускающих разделение друг от друга окружностями с центром в начале координат. Если при этом* $\Phi(x,y)$ *меняет знак при переходе через указанные кривые, то система (1) в области* G *имеет конечное (счетное) множество предельных циклов, окружающих единственное состояние равновесия* $(0;0)$.

▲ Справедливость теоремы следует из того, что производная функции

$$F(x,y) = x^2 + y^2 \tag{2}$$

в силу системы (1) меняет знак только при переходе через замкнутые ветви кривой $\Phi(x,y) = 0$ и принципа кольца [1]. ●

Замечание 1. Если замкнутые ветви кривой $\Phi(x,y) = 0$ являются окружностями с центром в точке $(0;0)$, то эти окружности, и только они, будут предельными циклами системы (1). Впрочем, это следует также из [1].

Пусть далее не выполняется тождество $R(x,y) \equiv \Phi(x,y)$. Тогда, вообще говоря, нельзя гарантировать единственность состояния равновесия $(0;0)$ системы (1) в конечной части фазовой плоскости.

Справедлива

Лемма. Пусть в односвязной открытой области $G \subset \mathbf{R}^2$ содержащей точку $(0;0)$, выполнены условия:

$$\varphi(x,y)r(x,y) \equiv xy\, f(x,y), \tag{3}$$

где $f(x,y) \le 1$.

$$\left|\Phi(x,y)R(x,y)\right| < 1. \tag{4}$$

Тогда в области G нет особых точек системы (1), отличных от $(0;0)$.

Доказательство. Допустим, что $(x_0;y_0)$ - состояние равновесия системы (1), отличное от $(0;0)$. Тогда, очевидно, $x_0 y_0 \neq 0$, ибо на осях координат нет состояний равновесия системы (1), кроме начала координат.

Так как $(x_0;y_0)$ - состояние покоя системы (1), то выполнены равенства:

$$y_0 + \varphi(x_0,y_0)\Phi(x_0,y_0) = 0, \tag{5}$$

$$-x_0 + r(x_0,y_0)R(x_0,y_0) = 0, \tag{6}$$

Из (5) и (6) вытекает равенство

$$x_0\varphi(x_0,y_0)\Phi(x_0,y_0) + y_0 r(x_0,y_0)R(x_0,y_0) = 0. \tag{7}$$

С учетом (*) перепишем (7) в виде:

$$x_0^2\overline{\varphi}(x_0,y_0)\Phi(x_0,y_0) + y_0^2\overline{r}(x_0,y_0)R(x_0,y_0) = 0, \tag{8}$$

где $\overline{\varphi}(x_0,y_0) > 0$, $\overline{r}(x_0,y_0) > 0$.

Из (6) следует, что

$$x_0 = y_0\overline{r}(x_0,y_0)R(x_0,y_0). \tag{9}$$

Представим (9) в (8):

$$y_0^2\overline{r}^2(x_0,y_0)\overline{\varphi}(x_0,y_0)R^2(x_0,y_0)\Phi(x_0,y_0) + y_0^2\overline{r}(x_0,y_0)R(x_0,y_0) = 0. \tag{10}$$

Разделим обе части (10) на $y_0^2\overline{r}(x_0,y_0)R(x_0,y_0)$:

$$\overline{r}(x_0,y_0)\overline{\varphi}(x_0,y_0)R(x_0,y_0)\Phi(x_0,y_0) + 1 = 0. \tag{11}$$

Так как $f(x_0,y_0) \equiv \overline{r}(x_0,y_0)\overline{\varphi}(x_0,y_0) \le 1$ и $\left|R(x_0,y_0)\Phi(x_0,y_0)\right| < 1$, то равенство (11) невозможно, и лемма доказана.

Определение. *Простую замкнутую кривую* L *назовем вложенной в простую замкнутую кривую* l, *если* L *расположена в открытой односвязной плоской области, ограниченной кривой* l.

▲ Тот факт, что L *вложена в* l, *будем символически записывать в виде* $L \subset l$.●

Теорема 2. *Пусть дифференциальная система (1) в открытой односвязной области* $G \subset \mathbf{R}^2$ *удовлетворяет условиям леммы и функция* $\Phi(x,y)(R(x,y))$ *обращается в нуль только на простых замкнутых кривых.*

$$l_1 \subset l_2 \subset \ldots \subset l_{n+1}(L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_{n+1}),$$

окружающих точку $(0;0)$, меняя свой знак при переходе через $l_i(L_i)$, $i = \overline{1,n+1}$. Пусть далее выполнены условия:

а) $\Phi(0,0)R(0,0) > 0$;

б) $L_i \subset l_i$ для i - нечетного, $i \le n+1$; $l_j \subset L_j$ для j - четного, $j \le n+1$;

в) пары соседних кривых $(l_{2s-1}; l_{2s})$ и $(l_{2s}; l_{2s+1})$, где $s \in \mathbf{N}$, $s \le \left[\frac{n}{2}\right]$, разделены окружностями с центром в начале координат. Тогда система (1) в области G имеет по крайней мере n-предельных циклов, окружающих $(0;0)$.

Доказательство. Определенности ради положим $\Phi(0,0) < 0$, $R(0,0) < 0$. Тогда производная $\frac{dF}{dt}$ функции (2) в силу системы (1) имеет отрицательный знак внутри L_1.

Кольцевую область, ограниченную парой кривых $(l_{2s-1}; l_{2s})((L_{2s}; L_{2s+1}))$, где $s \in \mathbf{N}$, $s \le \left[\frac{n}{2}\right]$, назовем областью типа I (типа II).

В силу условия б) теоремы каждая область типа I вложена в область типа II, а последняя, в свою очередь, вложена в область типа I.

При этом общее число областей равно n.

В области типа I (типа II) $\frac{dF}{dt} > 0 \left(\frac{dF}{dt} < 0\right)$.

Отсюда по принципу кольца [1] и с учетом леммы следует утверждение теоремы.

Замечание 2. *Если* $\Phi(x,y) = 0$ *и* $R(x,y) = 0$ *обладают счетным множеством замкнутых кривых, удовлетворяющих условиям а) – в) теоремы 2, то система (1) имеет счетное множество предельных циклов, окружающих* $(0;0)$.

Замечание 3. *Все предельные циклы, окружающие* $(0;0)$ *в условиях теоремы 2, лежат внутри окружности наибольшего радиуса с центром в точке* $(0;0)$, *вписанной в наиболее удаленную от* $(0;0)$ *кольцевую область.*

<u>Пример.</u> Система

$$\frac{dx}{dt} = y + x(x^2+y^2-\alpha_1)(x^2+y^2-\alpha_2)\ \ldots(x^2+y^2-\alpha_{n+1}),$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y(x^2+y^2-\overline{\alpha}_1)(x^2+y^2-\overline{\alpha}_2)\ \ldots(x^2+y^2-\overline{\alpha}_{n+1}),$$

где n - четно, имеет n-предельных циклов, окружающих единственную точку покоя $(0;0)$ - простой устойчивый фокус, если $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \alpha_{n+1} \ll 1$, $0 < \overline{\alpha}_{2i-1} < \overline{\alpha}_{2i-1}$, $i = \overline{1,\left[\frac{n+2}{2}\right]}$; $\alpha_{2j} < \overline{\alpha}_{2j} \ll 1$, $j = \overline{1,\left[\frac{n}{2}\right]}$.

Ближайший к началу координат цикл является неустойчивым, далее чередуется устойчивость циклов. Все циклы расположены внутри окружности $x^2 + y^2 - \alpha_{n+1} = 0$.

Замечание 4. *Если выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, все замкнутые ветви кривых* $\Phi(x,y) = 0$ *и* $R(x,y) = 0$ *вложены в окружность с центром в точке* $(0;0)$, *целиком расположенную в области* G, *то система (1) в этой области имеет по крайней мере* $n+1$*-предельных циклов.*

Следует отметить, что вопросами предельных циклов системы (1) в случае $\Phi(x,y) \equiv 0$ занимались авторы работ [2], [3].

Так, в работе [2] для системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x + \Psi(y)F(x,y), \tag{12}$$

доказано, что она имеет по крайней мере конечное (счетное) множество предельных циклов, окружающих единственную точку покоя $(0;0)$, если выполнены условия:

1. $y\Psi(y \geq 0, \Psi(0) = 0$;
2. уравнение $F(x,y) = 0$ определяет конечное (счетное) множество простых замкнутых кривых, окружающих начало координат и допускающих разделение друг от друга окружностями с центром в начале координат;
3. знак функции $F(x,y)$ меняется на противоположный при переходе через каждую ветвь кривой $F(x,y) = 0$.

В работе [3] приводятся достаточные условия разделения эллипсов

$$c_i + 2b_i x + a_i x^2 + d_i y^2 = 0,$$

где $\operatorname{sgn} a_i = \operatorname{sgn} d_i = -\operatorname{sgn} c_i$, $a_i d_i c_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$ окружностями с центром в точке $(0;0)$.

Эти условия позволили сформулировать теорему о том, что система нелинейных колебаний

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x + y\prod_{i=1}^{n}\left(c_i + 2b_i x + a_i x^2 + d_i y^2\right)$$

имеет по крайней мере n-предельных циклов, окружающих точку $(0;0)$.

Таким образом, результаты, полученные нами, являются в некотором смысле обобщением результатов работ [2] и [3].

Литература.

1. *Андронов А.А. и др.* Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966.
2. *Захаров В.П.* // Материалы Всесоюзной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений. – Рязань, 1971.
3. *Атаманов П.С.* // Волжский математический сборник, вып. 16. – Казань, 1973.

Some sufficient conditions of existing of explicit cycles of one differential system on the plane

D.S. Ushkho

For differential system $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \varphi(x,y)\Phi(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + r(x,y)R(x,y); \end{cases}$, meeting the conditions of existing and uniqueness of solving the problem of Cauchy, by the method of topographic system of Poincare the sufficient conditions are found of existing the explicit cycles, and the praisal is pointed of their location on phase plane. The results, getting in the article, generalize some early known results.

