1 9 9 8 г. № 3
Труды ФОРА

# НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ СУММ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПО ПРОСТЫМ ЧИСЛАМ С РАСТУЩИМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ СТЕПЕНЕЙ

**Ш.Х. Тутушев**

*Адыгейский государственный университет, Майкоп*

В различных вопросах аналитической теории чисел встречаются задачи, связанные с оценками сумм и произведений по простым числам при различных ограничениях. В данной заметке даются оценки сверху для некоторых сумм и соответствующих им произведений по простым числам в случае растущих показателей степеней. Приведен пример на приложение полученного результата.

В различных вопросах аналитической теории чисел встречаются задачи, связанные с вычислением или оценкой значений сумм либо произведений по простым числам при различных дополнительных условиях, налагаемых на простые числа. С такими задачами мы сталкиваемся, например, при вычислении константы Э. Ландау в формуле о количестве натуральных чисел, представимых суммой двух целых чисел, в теории дзета-функции Римана, в теории $L$ -функций Дирихле и т.д.

В данной заметке даются оценки сверху для некоторых сумм и соответствующих им произведений по простым числам в случае растущих показателей степеней.

**Теорема.** *Пусть* $\tau = \tau(x)$ *и* $y = y(x)$ *- некоторые функции от* $x$ *с условиями:* $0 < \tau < 1$, $\tau \to 1$ *при* $x \to \infty$; $y \geq 2$, $y \to \infty$ *при* $x \to \infty$. *Тогда при* $x \to \infty$ *имеют место оценки:*

$$1)\ \sum_{\rho \leq y} \frac{1}{\rho^{\tau}} = O\left(\frac{1}{\beta} + \frac{y^{\beta}}{\beta\sqrt{\ln y}}\right);$$

$$2)\ \prod_{\rho \leq y}\left(1 + \frac{1}{\rho^{\tau}}\right) = \exp\left(O\left(\frac{1}{\beta} + \frac{y^{\beta}}{\beta\sqrt{\ln y}}\right)\right),$$

*где* $\beta = 1 - \tau > 0$, $\beta \to 0$ *при* $x \to \infty$, $\rho$ *- простые числа.*

**Доказательство.** Начиная с достаточно больших $x$ получим

$$\ln\prod_{\rho \leq y}\left(1 + \frac{1}{\rho^{\tau}}\right) = \sum_{\rho \leq y} \ln\left(1 + \frac{1}{\rho^{\tau}}\right) = \sum_{\rho \leq y} \frac{1}{\rho^{\tau}} + O\left(\sum_{\rho \leq y} \frac{1}{\rho^{2\tau}}\right) =$$
$$= \sum_{\rho \leq y} \frac{1}{\rho^{\tau}} + O\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2\tau}}\right) = \sum_{\rho \leq y} \frac{1}{\rho^{\tau}} + O(1). \quad (1)$$

Применяем теперь известную лемму (интегральное преобразование Абеля): пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ - последовательность действительных чисел, $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$ и $g(\xi)$ - непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\lambda_1, x]$ (действительная или комплекснозначная) функция. Тогда

$$\sum_{\lambda_1 \leq \lambda_n \leq x} a_n g(\lambda_n) = A(x) g(x) - \int_{\lambda_1}^{x} A(\xi) g'(\xi) d\xi, \quad (2)$$

где $A(\xi) = \sum\limits_{\lambda_1 \leq \lambda_n \leq \xi} a_n$ и $a_n$ - любые действительные или комплексные числа. Если в (2) $\lim\limits_{x \to \infty} A(x) g(x) = 0$ и либо ряд, либо интеграл сходятся, то $\sum\limits_{\lambda_1 \leq \lambda_n < \infty} a_n g(\lambda_n) = -\int\limits_{\lambda_1}^{\infty} A(\xi) g'(\xi) d\xi$. (См. [1], Приложение).

Полагая в этой лемме $g(\xi)=\frac{1}{\xi^{\tau}}$, $A(\xi)=\sum_{\rho\le\xi}1=\frac{\xi}{\ln\xi}+O\left(\frac{\xi}{\ln^2\xi}\right)$, вычисляем сумму $\sum_{\rho\le y}\rho^{-\tau}$.

$$\sum_{\rho\le y}\rho^{-\tau}=A(y)g(y)-\int_2^y A(\xi)g'(\xi)d\xi=$$

$$=\left(\frac{y}{\ln y}+O\left(\frac{y}{\ln^2 y}\right)\right)\frac{1}{y^{\tau}}+\tau\int_2^y\left(\frac{\xi}{\ln\xi}+O\left(\frac{\xi}{\ln^2\xi}\right)\right)\frac{d\xi}{\xi^{1+\tau}}\le \tag{3}$$

$$\le C\frac{y^{\beta}}{\ln y}+C_1\int_2^y\frac{d\xi}{\xi^{\tau}\ln\xi}$$

при некоторых константах $C$ и $C_1$.

Интегрируя по частям интеграл в (3) и учитывая, что $\tau<1$, найдем

$$C_1\int_2^y\frac{d\xi}{\xi^{\tau}\ln\xi}=\frac{C_1}{\beta}\left(\frac{y^{\beta}}{\ln y}-\frac{2^{\beta}}{\ln 2}+\int_2^y\frac{d\xi}{\xi^{\tau}\ln^2\xi}\right). \tag{4}$$

Оценим теперь интеграл в правой части (4).

$$\int_2^y\frac{d\xi}{\xi^{\tau}\ln^2\xi}=\int_2^y\frac{\xi^{\beta}d\xi}{\xi\ln^2\xi}<\frac{y^{\beta}}{\sqrt{\ln y}}\int_2^y\frac{d\xi}{\xi\ln^{3/2}\xi}<\frac{C_2 y}{\sqrt{\ln y}}, \tag{5}$$

где $C_2$ - некоторая постоянная.

Из равенств (1-5) теперь следует

$$\sum_{\rho\le y}\frac{1}{\rho^{\tau}}=O\left(\frac{1}{\beta}+\frac{y^{\beta}}{\beta\sqrt{\ln y}}\right). \tag{6}$$

Ввиду того, что $\ln\prod_{\rho\le y}\left(1+\frac{1}{\rho^{\tau}}\right)$ отличается от ряда $\sum_{\rho\le y}\frac{1}{\rho^{\tau}}$ только на константу (при $x\to\infty$), то и для логарифма от указанного произведения выполняется оценка (6).

Следовательно, $\prod_{\rho\le y}\left(1+\frac{1}{\rho^{\tau}}\right)=\exp O\left(\frac{1}{\rho}+\frac{y^{\beta}}{\beta\sqrt{\ln y}}\right)$ и теорема доказана.

В качестве простейшего примера на применение этой теоремы рассмотрим оценку суммы $\sum_{\rho\le x}\rho^{-\frac{\ln x}{\ln x+k}}$, $x\to\infty$, где $k$ - произвольная постоянная.

Принимая в формуле (6) $\tau=\frac{\ln x}{\ln x+k}$, $y=x$, получим:

$$\sum_{\rho\le x}\rho^{-\frac{\ln x}{\ln x+k}}\ll\ln x+k+\frac{x^{\frac{1}{\ln x+k}}(\ln x+k)}{\sqrt{\ln x}}\ll\ln x.$$

($\ll$ - символ И.М. Виноградова, употребляется в том же смысле, что и символ Э. Ландау $O$ - большое).

**Литература**

1. *Прахар К.* Распределение простых чисел. – М.: Мир, 1967.

 

# Some appraisals of sums and products of simple figures with growing indicators of power

**Sh. Kh. Tutushev**

In different questions of analytical theory of figures there are problems, connecting with appraisals of sums and products of simple figures with different limitations. In this article the appraisals from above are given for some sums and corresponding them the products of simple figures in the case of growing indicators of degrees. Here is given an example on application of the result.

 