1998 г. № 3
Труды ФОРА

ЯВЛЕНИЕ ЗАХВАТЫВАНИЯ В СИСТЕМАХ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

В.А. Тешев, А.И. Шепелявый, М.М. Шумафов

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

Получен частотный критерий гармонической стабилизации систем с гистерезисной нелинейностью. В качестве примера рассмотрен автогенератор с гистерезисным элементом.

1. Проблемы захватывания частоты автоколебаний внешним гармоническим воздействием являются классическими в нелинейной теории колебаний и теории управления автогенераторами. Одним из важнейших свойств вынужденных периодических процессов является их устойчивость "в целом", когда явление захватывания наблюдается в любом режиме работы автогенератора. Кроме того, в последнее время получен ряд результатов, показывающих, что различные нелинейные системы, допускающие хаотические режимы, могут быть стабилизированы гармоническим внешним воздействием.
2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Px + q[\xi + \alpha \sin \omega_0 t], \sigma = r^* x \\ \xi = \varphi[\sigma(t), \varphi_0]_t, \left(x \in R^n\right) \end{cases}, \tag{1}$$

где P - постоянная гурвицева $n \times n$ матрица, q, r - постоянные векторы, σ, ω_0 - положительные числа, $\varphi[\sigma(t), \varphi_0]_t$ - гистерезисная функция (точнее, значение (ветвь) гистерезисной функции).

Система (1) с дифференцируемой функцией $\xi = \varphi(\sigma)$ рассматривалась в работе [1], где изучено явление захвата под частоту внешнего гармонического воздействия.

Позднее, в [5], [6], [7], результаты работы [1] были обобщены в различных направлениях, но при этом, основным предположением в этих работах была дифференцируемость нелинейной функции $\varphi(\sigma)$.

В настоящей статье рассматривается система с одним нелинейным элементом, описываемым гистерезисной функцией. Такие системы широко распространены в различных областях техники и их исследованию посвящено немало работ.

В настоящей работе для класса систем с гистерезисной нелинейностью специального вида получен частотный критерий гармонической стабилизации. Доказательство этого критерия основано на некотором развитии прямого метода Ляпунова и применении частотной теоремы Якубовича-Калмана. Представленные результаты получены при помощи идей и методов работы [1] и являются их распространением на нелинейности гистерезисного типа.

Пусть гистерезисная функция $\varphi[\sigma(t), \varphi_0]_t$ является непрерывной [2] и удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют такие константы $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{R}$, что

$$0 \le \frac{d\varphi[\sigma, \varphi_0]_t}{dt} \cdot \frac{d\sigma}{dt} \le \mu\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2, \tag{2}$$

для всех t, для которых $\sigma(t) \notin [\sigma_1, \sigma_2]$;

2)

$$\left|\frac{d\varphi[\sigma, \varphi_0]_t}{dt} \cdot \frac{d\sigma}{dt}\right| \le k\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2, \tag{3}$$

для всех t, для которых $\sigma(t) \in \mathbf{R}$;

3)

$$\left|\varphi\left(\sigma,\varphi_0\right)_t\right| \le l, \tag{4}$$

для всех $\sigma(t)$ и t.

Здесь μ, k, l - некоторые числа.

Введем передаточную функцию системы (1):

$$\chi(p) = r^*(P - pI)^{-1} q$$

и следующие обозначения:

$$\gamma(t) = r^* e^{Pt} q,\ \nu = \int_0^{+\infty} |\gamma(t)| dt;\ \rho = \lim_{p\to+\infty} p\chi(p) = -r^* q;$$

$$T = \frac{1}{\omega_0}\left[\arcsin\frac{\sigma_2 + \nu l}{\alpha|\chi(i\omega_0)|} - \arcsin\frac{\sigma_1 - \nu l}{\alpha|\chi(i\omega_0)|}\right].$$

Здесь предполагается, что

$$\frac{|\sigma_1 - \nu l|}{\alpha|\chi(i\omega_0)|} < 1,\quad \frac{|\sigma_2 + \nu l|}{\alpha|\chi(i\omega_0)|} < 1.$$

Ясно, что $\nu < +\infty$, так как P - гурвицева.

Замечание 1. *T является оценкой сверху наибольшего возможного времени пребывания решения $x(t)$ системы (1) в полосе $\left\{x / r^* x \in (\sigma_1, \sigma_2)\right\}$ при достаточно больших t.*

Замечание 2. *При любых начальных данных $t_0, x_0, \xi_0 \in E\left[r^* x_0\right]$ ($E\left[r^* x_0\right]$ - множество начальных значений гистерезисной функции $\varphi\left[\sigma,\varphi_0\right]_t$) решение системы (1) существует и продолжимо на $\left[t_0, +\infty\right)$ [3].*

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть в системе (1) гистерезисная функция $\varphi\left[\sigma,\varphi_0\right]_t$ непрерывна и удовлетворяет условиям (2) – (4). Пусть, далее, для некоторых чисел $\lambda > 0, \delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0$ выполнены следующие условия:*

1. *Все полюсы передаточной функции $\chi(p - \lambda)$ имеют отрицательные вещественные части;*
2. *При всех $\omega \ge 0$ выполнено неравенство:*

$$\frac{1}{\mu} + \operatorname{Re}\chi(i\omega - \lambda) - \delta_1|\chi(i\omega - \lambda)|^2 - \delta_2|\chi(i\omega - \lambda)(i\omega - \lambda) - \rho|^2 \ge 0; \tag{5}$$

3.

$$\frac{|\sigma_1 - \nu l|}{\alpha|\chi(i\omega_0)|} < 1,\quad \frac{|\sigma_2 + \nu l|}{\alpha|\chi(i\omega_0)|} < 1; \tag{6}$$

$$\frac{|\sigma_* - \nu l|}{\alpha|\chi(i\omega_0)|} < 1, \frac{|\sigma^* + \nu l|}{\alpha|\chi(i\omega_0)|} < 1;\ \alpha\omega_0|\chi(i\omega_0)| > l|\rho|, \tag{7}$$

где σ_* и σ^* - соответственно левый и правый концы интервала (σ_*, σ^*) оси σ, на который проецируется петля графика гистерезисной функции $\varphi\left[\sigma,\varphi_0\right]_t$.

4.

$$\lambda \frac{2\pi}{\omega_0} > T \frac{\left|k\left(1 + k\mu^{-1}\right) - \delta_1\right|}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}}. \qquad (8)$$

Тогда для любых решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ системы (1) выполнено соотношение

$$\lim_{t \to +\infty} \left| x_1(t) - x_2(t) \right| = 0. \qquad (9)$$

Замечания.

1) *Из гурвицевости матрицы P и ограниченности гистерезисной нелинейности $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ (см. 4) следует, что система (1) диссипативна. Отсюда по теореме Браудера о неподвижной точке получаем существование $\frac{2\pi}{\omega_0}$ - периодического решения $x(t)$ системы (1). В силу соотношения (9) все другие решения системы (1) при $t \to +\infty$ стремятся к этому $\frac{2\pi}{\omega_0}$ - периодическому решению, что адекватно захватыванию под частоту внешнего воздействия.*
2) *Очевидно при достаточно малых μ и достаточно больших α для некоторых $\lambda > 0, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ выполнены все условия теоремы. Следовательно, при малых μ гармоническое воздействие с достаточно большой амплитудой α стабилизирует систему (1).*
3) *При применении теоремы часто оказывается удобным в качестве параметра λ брать половину расстояния от мнимой оси до ближайшего к ней полюса передаточной функции $\chi(p)$.*

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм.

Наряду с системой (1) рассмотрим системы

$$\dot{x} = Px + q\alpha \sin \omega_0 t, \qquad (A)$$

$$\dot{x} = Px + q\alpha \cos \omega_0 t, \qquad (B)$$

$$\dot{x} = Px + q\alpha e^{i\omega_0 t}. \qquad (C)$$

Лемма 1. *Пусть $\chi(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ - решение системы (C). Тогда $\varphi(t)$ - решение системы (B), $\psi(t)$ - решение системы (A).*

Лемма 2. *Существует такой вектор $x_0 \in \mathbf{C}^n$, что функция $x(t) = x_0 e^{i\omega_0 t}$ будет периодическим решением системы (C). При этом, выходом $-\sigma(t) = -r^* x(t)$ системы (C) является периодический сигнал $-\sigma(t) = \chi(i\omega_0)\alpha e^{i\omega_0 t}$.*

Доказательства лемм 1 и 2 элементарны.

Следствие. *Функция $\psi(t) = \operatorname{Im} x_0 e^{i\omega_0 t}$, $x_0 = -(P - i\omega_0 I)^{-1} q\alpha$ является решением (периодическим) системы (A).*

Очевидно,

$$r^* \psi(t) = \operatorname{Im} r^* \chi(t) = \operatorname{Im} \sigma(t). \qquad (10)$$

Обозначим $y(t) = r^* \psi(t)$.

Тогда в силу (10)

$$y(t) = \operatorname{Im}\left[-\chi(i\omega_0)\alpha e^{i\omega_0 t}\right] = -\alpha \left|\chi(i\omega_0)\right| \sin\left[\omega_0 t + \arg \chi(i\omega_0)\right]. \qquad (11)$$

Оценим разность между "выходами" $-r^* x(t)$ и $-y(t)$ систем (1) и (A) соответственно.

Лемма 3. *Для любого решения $x(t)$ системы (1) имеет место следующее соотношение*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup \left| r^* x(t) - y(t) \right| \le \mathrm{lv}. \qquad (12)$$

Доказательство. Так как в силу следствия леммы 2 $\psi(t)$ - решение системы (A), то

$$\psi(t) = e^{Pt}\psi(0) + \int_0^t e^{P(t-\tau)} q\alpha \sin \omega_0 \tau d\tau . \tag{13}$$

Отсюда

$$y(t) = r^* e^{Pt}\psi(0) + \int_0^t \gamma(t-\tau)\alpha \sin \omega_0 \tau d\tau . \tag{14}$$

Аналогично

$$\sigma(t) = r^* x(t) = r^* e^{Pt} x(0) + \int_0^t \gamma(t-\tau)[\xi(\tau) + \alpha \sin \omega_0 \tau] d\tau . \tag{15}$$

Вычитая из (15) равенство (14) и, взяв модуль полученной разности, с учетом (4) будем иметь

$$|\sigma(t) - y(t)| \le \left| r^* e^{Pt}(x_0 - \psi_0) + \int_0^t \gamma(t-\tau)\xi(\tau) d\tau \right| \le C e^{-\beta t} + l\nu,$$

где $C > 0$ и $\beta > 0$ - некоторые константы.

Из последнего неравенства получаем

$$\limsup_{t\to+\infty} |\sigma(t) - y(t)| \le l\nu.$$

Лемма 3 доказана.

Имеет место аналогичная лемме 3

Лемма 4. *Для любого решения* $x(t)$ *системы (1) справедливо соотношение*

$$\limsup_{t\to+\infty} |\dot\sigma(t) - \dot y(t)| \le l|\rho| .$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Замечание 3. *Поскольку функция* $y(t)$ *известна, то леммы 3 и 4 позволяют судить о пределах изменения* $\sigma(t)$ *и* $\dot\sigma(t)$ *соответственно при достаточно больших* t. *В частности, с помощью леммы 4 можно установить, какой знак имеет производная* $\dot\sigma(t)$, *когда движение* $(\sigma(t),\xi(t))$ *происходит на том участке графика Г гистерезисной функции, где расположена петля гистерезиса.*

Рассмотрим ситуацию, когда для любых двух решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ системы (1) соответствующие движения $(\sigma_1(t),\xi_1(t))$ и $(\sigma_2(t),\xi_2(t))$, где $\sigma_i(t) = r^* x_i(t)$, $(i = 1,2)$, $\xi_1(t) = \varphi[\sigma_1(t),\varphi_0]_t$, $\xi_2(t) = \varphi[\sigma_2(t),\varphi_0]_t$, происходят на участке графика Г, где имеется петля гистерезиса. Априори возможен случай, когда $\dot\sigma_1(t)\cdot\dot\sigma_2(t) < 0$, то есть движения $(\sigma_1(t),\xi_1(t))$ и $(\sigma_2(t),\xi_2(t))$ происходят на различных ветвях гистерезиса. Используя лемму 4, покажем, что последний случай невозможен при достаточно большой амплитуде α внешнего гармонического воздействия.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть выполнено условие 3 теоремы, т.е. справедливы неравенства (6), (7). Тогда для любых двух решений* $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ *системы (1)*

$$\dot\sigma_1(t)\cdot\dot\sigma_2(t) > 0 \left(\sigma_i(t) = r^* x_i(t), i = 1,2\right)$$

для достаточно больших t, *где* $\sigma_i(t) \in (S_1, S_2) \supset [\sigma_*, \sigma^*]$ *(*S_1, S_2 *- некоторые константы, достаточно большие по модулю при достаточно большом* α*), т.е. для указанных* t *движения* $(\sigma_1(t),\xi_1(t))$ *и* $(\sigma_2(t),\xi_2(t))$ *происходят монотонно по одной и той же ветви гистерезиса (соответствующего участку* $[S_1, S_2]$ *на оси* σ *).*

При доказательстве леммы 5 используется лемма 4.

3. **Доказательство теоремы.** Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - произвольные решения системы (1). Обозначим:

$$z(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

Тогда функция $z(t)$ удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Pz(t) + q\Im(t) \\ \Im(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t) \ , \\ \eta(t) = r^* z(t) \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

где $\xi_1(t) = \varphi[\sigma_1(t), \varphi_0]_t$, $\xi_2(t) = \varphi[\sigma_2(t), \varphi_0]_t$, $\eta(t) = \sigma_1(t) - \sigma_2(t)$, $\sigma_i(t) = r^* x_i(t)$, $i = 1,2$.

а) Рассматривая функцию $V(z) = z^* H z$ и вычисляя ее производную в силу системы (S), получим

$$\dot{V} = 2z^* H \dot{z} = F(z, \Im) - 2\lambda z^* H z - \Im\left(\eta - \frac{\Im}{\mu}\right) \qquad \text{(E)}$$

где

$$F(z, \Im) = 2z^* H\,(Pz + q\Im) + 2\lambda z^* H z + \Im\left(\eta - \frac{\Im}{\mu}\right).$$

Найдем матрицу $H = H^*$ так, что бы было выполнено неравенство

$$F(z, \Im) \le 0 \quad \left(\forall z \in \mathbf{R}^n, \forall \Im \in \mathbf{R}\right). \qquad (16)$$

Распространяя форму $F(z, \Im)$ до эрмитовой

$$F^*(z, \Im) = 2\,\mathrm{Re}\, z^* H\left[(P + \lambda I)z + q\Im\right] + \mathrm{Re}\,\Im^* r^* z - \mu^{-1}|\xi|^2$$

и требуя, чтобы

$$F^*(z, \Im) \le 0 \quad \left(\forall z \in \mathbf{C}^n, \forall \Im \in \mathbf{C}\right) \qquad (17)$$

в силу леммы Якубовича-Калмана [4] получим необходимое и достаточное условие существования вещественной матрицы $H = H^*$, удовлетворяющей неравенству (17).

Это условие запишется так:

$$G\left[\left(i\omega I - P_\lambda\right)^{-1} q\Im, \Im\right] \le 0 \quad \forall \Im \in \mathbf{C}^1, \quad \forall \omega \in \mathbf{R}^1, \qquad (18)$$

где $P_\lambda = P + \lambda I, G(z, \Im) = \mathrm{Re}\,\Im^* r^* z - \mu^{-1}|\Im|^2$.

Учитывая, что

$$\chi(p - \lambda) = r^*(P_\lambda - pI)q = r^*\left[P - (p - \lambda)I\right]q$$

из (18) получаем частотное условие существования вещественной матрицы $H = H^*$, удовлетворяющей (17):

$$\frac{1}{\mu} + \mathrm{Re}\,\chi(i\omega - \lambda) \ge 0 \quad \forall \in R^1. \qquad (19)$$

Ясно, что при выполнении условия (5) теоремы неравенство (19) будет выполнено. Так как P_λ гурвицева в силу условия 1 теоремы, то $H > 0$.

Рассмотрим два случая:

1) $\sigma_i(t) \notin [\sigma_1, \sigma_2]$, $(i = 1,2)$

2) $\sigma_i(t) \in \mathbf{R}^1, \quad (i=1,2)$.

b) **Первый случай:** $\sigma_i(t) \notin [\sigma_1, \sigma_2], \quad (i=1,2)$. Тогда выполнено неравенство (2). Из неравенства (2) выводим (с учетом леммы 5)

$$0 \le \frac{\Im(t)}{\eta(t)} \equiv \frac{\xi_1(t) - \xi_2(t)}{\sigma_1(t) - \sigma_2(t)} \le \mu .$$

Отсюда

$$\Im\left(\eta - \frac{\Im}{\mu}\right) \ge 0. \tag{20}$$

Из выражения (E) для $\dot V$ с учетом (16) и (20) получаем

$$\dot V(z) \le -2\lambda z^* H z = -2\lambda V(z).$$

Итак, в случае 1) $\sigma_i(t) \notin [\sigma_1, \sigma_2]$ имеем оценку

$$\dot V(z(t)) \le -2\lambda V(z(t)). \tag{21}$$

c) **Второй случай:** $\sigma_i(t) \in \mathbf{R}^1, \quad (i=1,2)$. Из неравенства (3) выводим (на основании леммы 5)

$$\left|\frac{\Im(t)}{\eta(t)}\right| \le k \Rightarrow 0 \le |\Im(t)| \cdot |\eta(t)| \le k(\eta(t))^2 . \tag{22}$$

Из (E) получаем

$$\dot V \le -2\lambda V - \Im\left(\eta - \frac{\Im}{\mu}\right).$$

Используя (22), получим

$$\left|\Im\left(\eta - \frac{\Im}{\mu}\right)\right| = |\Im| \cdot |\eta| \left|1 - \mu^{-1}\frac{\Im}{\eta}\right| \le k\eta^2 (1 + \mu^{-1}k) = k(1 + \mu^{-1}k)\eta^2 . \tag{23}$$

Тогда

$$\dot V \le -2\lambda V + k(1 + \mu^{-1}k)\eta^2 , \eta = r^* z. \tag{24}$$

Следует оценить η^2 сверху через V. Используя лемму Ляпунова [4] и учитывая гурвицевость матрицы P, можно доказать, что

$$H > \sqrt{\delta_1\delta_2}\, rr^* , \tag{25}$$

где δ_1, δ_2 - некоторые положительные числа.

В силу леммы Якубовича-Калмана [4] частотное неравенство (5) является необходимым и достаточным условием для выполнения неравенства

$$\begin{gathered} 2z^* H (Pz + q\Im) + 2\lambda z^* H z + \delta_1 (r^* z) + \delta_2 (r^* P z) + \Im\, (r^* z - \mu^{-1}\Im) \le 0 \\ (\forall z \in \mathbf{R}^n, \forall \Im \in \mathbf{R}). \end{gathered} \tag{26}$$

Представим $\dot V$ в виде

$$\dot V = z^* H \dot z = F_1(z, \Im) - 2\lambda z^* H z - \delta_1 (r^* z)^2 - \delta_2 (r^* P z) - \Im(\eta - \mu^{-1}\Im), \tag{E_1}$$

где

$$F_1(z, \Im) = 2z^* H (Pz + q\Im) + 2\lambda z^* H z + \delta_1 (r^* z) + \delta_2 (r^* P z) + \Im(r^* z - \mu^{-1}\Im).$$

Используя (26) и (25) из (E_1), получим оценку

$$\dot V(z) \le \left[\frac{\left|k\left(1+\mu^{-1}k\right)-\delta_1\right|}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} - 2\lambda\right] V(z).$$

d) Далее оценивается сверху наибольшее возможное время T пребывания любого решения $x(t)$ системы (1) в полосе $\left\{x \middle| r^* x \in (\sigma_1, \sigma_2)\right\}$ при достаточно больших t. Получим

$$T = \frac{1}{\omega_0}\left[\arcsin\frac{\sigma_2 + \lambda v}{\alpha\left|\chi(i\omega_0)\right|} - \arcsin\frac{\sigma_1 - \lambda v}{\alpha\left|\chi(i\omega_0)\right|}\right].$$

Далее доказательство теоремы завершается рассуждениями, аналогичными [1].

Теорема доказана.

Сформулируем следствие из доказанной теоремы, касающееся того случая, когда $\mu = 0$.

Поступая аналогично [1], введем обозначения:

$$A(\lambda) = \max_{\omega \ge 0}\left|\chi(i\omega - \lambda)\right|$$

$$B(\lambda) = \max_{\omega \ge 0}\left|(i\omega - \lambda)\chi(i\omega - \lambda) - \rho\right|^2$$

и устремим к нулю положительный параметр μ в условиях (5) и (7) теоремы. Числа δ_1 и δ_2 при этом будем выбирать так, чтобы были выполнены равенства

$$\mu^{-1} = \delta_1 A(\lambda) + \delta_2 B(\lambda) - \min_{\omega \ge 0} \operatorname{Re}\chi(i\omega - \lambda) \tag{27}$$

$$\delta_1 = \frac{k^2 B(\lambda)}{\left|k^2 A(\lambda) - 1\right|}\delta_2. \tag{28}$$

Тогда частотное условия (5) будет выполнено в силу (27), а условие (7) примет вид

$$\lambda\frac{\pi}{\omega_0} > Tk\sqrt{B(\lambda)\left|k^2 A(\lambda) - 1\right|}.$$

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Следствие. *Пусть в системе (1) гистерезисная функция* $\varphi[\sigma, \varphi_0]$ *непрерывна и удовлетворяет условиям (3) и (4), а в условии (2)* $\mu = 0$. *Пусть выполнено (6) и*

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\left|\operatorname{Re} p_*\right|,$$

где p_* *- ближайший к мнимой оси полюс передаточной функции* $\chi(p)$.

Тогда, если

$$\lambda_0\frac{\pi}{\omega_0} > 2Tk\sqrt{B(\lambda_0)\left|k^2 A(\lambda_0) - 1\right|}, \tag{29}$$

то для любых решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ системы (1) выполнено предельное соотношение (8).

В качестве приложения рассмотрим классическое уравнение автогенератора с гистерезисным элементом, на который действует внешняя периодическая сила:

$$\ddot\sigma + a\dot\sigma + \sigma + \frac{d\varphi[\sigma, \varphi_0]_t}{dt} = \alpha\sin\omega_0 t, \tag{30}$$

где $\varphi[\sigma, \varphi_0]_t$ - гистерезисная функция.

Предположим, что $a > 0$, а гистерезисная функция $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ удовлетворяет условию (3) и (2) с $\mu = 0$.

Интервал $(-\infty,\sigma_1)$ соответствует зоне, где лампа заперта, а $(\sigma_2,+\infty)$ - зоне насыщения.

На основании следствия из теоремы получаем следующее

Утверждение. *Если выполнено неравенство*

$$\frac{a\pi}{8} > \left[\arcsin\frac{\sigma_2 + 8\sqrt{1+a^2}\left(a\sqrt{4-a^2}\right)^{-1} l}{\alpha|\chi(i\omega_0)|} - \arcsin\frac{\sigma_1 - 8\sqrt{1+a^2}\left(a\sqrt{4-a^2}\right)^{-1} l}{\alpha|\chi(i\omega_0)|}\right]\times$$

$$\times\, k\sqrt{B\left(\frac{a}{4}\right)\left|k^2 A\left(\frac{a}{4}\right)-1\right|}$$

в случае $0 < a < 2$, и неравенство

$$\pi\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{8} > \left[\arcsin\frac{\sigma_2 + \sqrt{(1+a^2)(a^2-4)^{-1}}\cdot\left(a+\sqrt{a^2-4}\right)^2 l}{\alpha|\chi(i\omega_0)|} -\right.$$

$$\left. - \arcsin\frac{\sigma_1 - \sqrt{(1+a^2)(a^2-4)^{-1}}\left(a+\sqrt{a^2-4}\right)^2 l}{\alpha|\chi(i\omega_0)|}\right]\times$$

$$\times\, k\sqrt{B\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\left|k^2 A\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)-1\right|}$$

в случае $a > 2$, то в любом режиме работы автогенератора, описываемого уравнением (30), будет наблюдаться явление захватывания в классе всех гистерезисных функций $\varphi[\sigma,\varphi_0]$, удовлетворяющих условию (3) и (2) с $\mu = 0$.

Л и т е р а т у р а

1. Г.А. Леонов. Частотный критерий стабилизации нелинейных систем гармоническим внешним воздействием. //АиТ, 1986, №1.
2. В.А. Якубович. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями. //ДАН СССР, 1963, т. 149, №2.
3. Г.А. Леонов, И.М. Буркин, А.И. Шепелявый. Частотные методы в теории колебаний. В 2-х т. Санкт-Петербург: СПбГУ, 1992.
4. А.Х. Гелиг, Г.А. Леонов, В.А. Якубович. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
5. М.Ю. Чурилова. Условия стабилизации нелинейных систем гармоническим внешним воздействием. // АиТ, 1994, №3.
6. З.У. Блягоз, В.А. Тешев. Частотный критерий устойчивости в целом периодических решений нелинейных неавтономных систем. // ДУ, 1992, т. 28, №6.
7. Koksch N. Verallgemeinerung eines Frequenzkriteriums von G.A. Leonov fur die Stabilisierung nichtlinearer systeme durch auBere Erregung // Wiss. Z. Techn. Univers. Dresden, 1987. Bd 36. №1.

Capture effect in systems with hysteresis element

V.A. Teshev, A.I. Shepelavi, M.M. Shumafov

The frequency condition of harmonic stability for systems with hysteresis nonlinearity is obtained. It was illustrated by on example of a autogenerator with hysteresis element.

