ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

А.И. Филипьев

Адыгейский государственный университет, Майкоп

В работе предлагается один из вариантов получения функции Лагранжа для электромагнитного поля с использованием формулы Лоренца для силы, действующей на частицу в электромагнитном поле.

В основу одного из вариантов построения электродинамики положен принцип наименьшего действия [1], суть которого сводится к тому, что состояние тела или системы тел описывается некоторой функцией, которую называют функцией Лагранжа, являющуюся функцией координат, скоростей и времени $L = L(V, r, t)$. Интеграл от этой функции по времени $S = \int_{T1}^{T2} L(V, r, t)dt$ называют действием. Утверждается, что для реального движения системы данный интеграл имеет минимум, или, что вариация действия δS равна нулю. Это положение в физике носит название принципа наименьшего действия.

Задача сводится к тому, что необходимо подобрать соответствующим образом функцию Лагранжа. Получив функцию Лагранжа можно построить систему уравнений Максвелла и следовательно, всю электродинамику. Как правило подбор функции Лагранжа основывается на совокупности некоторых общефизических представлений. Однако, при первоначальном знакомстве с таким вариантом получения функции Лагранжа возникает некоторая неудовлетворенность и сомнение.

В то же время знаний курса общей физики и элементов векторного анализа достаточно для непосредственного получения функции Лагранжа. Для этого воспользуемся формулой Лоренца для силы, действующей на частицу в электромагнитном поле

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\left[\vec{V}\vec{B}\right], \tag{1}$$

где $\vec{V}$ - скорость частицы, $\vec{B}$ - вектор индукции магнитного поля.

Заменяя в формуле Лоренца $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$, $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{d\vec{A}}{dt}$ и $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$, где $\vec{P}$ - импульс частицы, а $\vec{A}$ и φ - векторный и скалярный потенциал, получим

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -e\,\mathrm{grad}\varphi - e\frac{d\vec{A}}{dt} + e\left[\vec{V}\ \mathrm{rot}\vec{A}\right]. \tag{2}$$

Подчеркнем, что $\vec{P} = p(\vec{V})$, $\varphi = \varphi(\vec{r})$, $\vec{A} = A(\vec{r})$, где $\vec{r} = \vec{r}(t)$, тогда полная производная от $\vec{A}(\vec{r})$ по времени примет вид:

$$\frac{dA(\vec{r})}{dt} = \frac{\partial A(r)}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\vec{A}}{dr}; \text{ или } \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{A}. \tag{3}$$

Кроме того найдем градиент от величины $(\vec{A}\vec{V})$:

$$\mathrm{grad}(\vec{A}\vec{V}) = (\vec{A}\nabla)\vec{V} + (\vec{V}\nabla)\vec{A} + \left[\vec{A}\ \mathrm{rot}\vec{A}\right] + \left[\vec{V}\ \mathrm{rot}\vec{A}\right],$$

причем дифференцирование по $\vec{r}$ производя при постоянном $\vec{V}$, имеем:

$$\mathrm{grad}(\vec{A}\vec{V}) = (\vec{V}\nabla)\vec{A} + \left[\vec{V}\ \mathrm{rot}\vec{A}\right] \tag{4}$$

Подставляя соотношение (3) и (4) в (2) получим:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -e\,\mathrm{grad}\,\varphi - e\frac{d\vec{A}}{dt} + e\,\mathrm{grad}\left(\vec{A}\vec{V}\right)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P} + e\vec{A}\right) = -e\,\mathrm{grad}\left(e\varphi - e\vec{A}\vec{V}\right). \qquad (5)$$

Справа под знаком градиента стоит энергия, которая определяется положением тела, то есть координатами. Слева в скобках импульс, который является производной от энергии по скорости. В силу этого обозначим $\vec{P} + e\vec{A} = \frac{dL\left(\vec{V}\right)}{dV}$, а $-\left(e\varphi - e\vec{A}\vec{V}\right) = L(r)$, учитывая, что для свободной частицы $\vec{P} = m\vec{V}$ получим:

$$L\left(\vec{V}\right) = \frac{mV^2}{2} + e\vec{A}\vec{V} \text{ и } L\left(\vec{r}\right) = -\left(e\varphi - e\vec{A}\vec{V}\right),$$

тогда:

$$L\left(\vec{V}_{\vec{r}}\right) = \frac{mV^2}{2} + e\vec{A}\vec{V} - e\varphi. \qquad (6)$$

Полученное соотношение носит название функции Лагранжа для заряженной частицы в электромагнитном поле.

Так как $\frac{mV^2}{2}$ является предельным случаем соотношения $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ при $V \to 0$, то в случае релятивистского движения следует функцию Лагранжа предоставить в виде:

$$L\left(\vec{V}\vec{r}\right) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + e\vec{A}\vec{V} - e\varphi \qquad (7)$$

учитывая, что $\frac{dL\left(\vec{V}\vec{r}\right)}{d\vec{V}} = \vec{P} + e\vec{A}$, а $\frac{dL}{d\vec{r}} = -\,\mathrm{grad}\left(e\varphi - e\vec{A}\vec{V}\right)$ соотношение (5) можно представить в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\vec{V}} = \frac{dL}{d\vec{r}}. \qquad (8)$$

Полученное уравнение имеет аналог в механике [2] и носит название уравнения Лагранжа.

Так как функция Лагранжа определяется через энергию свободной частицы и энергию взаимодействия частицы с полем, то при рассмотрении всей системы частица-поле необходимо при построении функции Лагранжа учесть энергию свободной частицы, энергию взаимодействия частицы с полем и энергию поля $\int\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}\right)dV$, тогда функцию Лагранжа можно представить в виде:

$$L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + e\vec{A}\vec{V} - e\varphi + \int\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}\right)dV \qquad (9)$$

А действие следовательно примет вид:

$$S = \int_{n1}^{e2} \left\{ \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + e\vec{A}\vec{V} - e\varphi + \int \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) dV \right\} dt \qquad (10)$$

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.*. Теория поля. М.: Наука, 1973. - 504 с.
2. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.*. Механика. М.: Наука, 1965. - 203 с.

Lagrange function in electrodynamics

A.I. Philipiev

The author suggests one of the variants of receiving the Lagrange function for electromagnetic field with use of Lorentz formula for the force, acting on the particle in the electromagnetic field.

