К ВОПРОСУ ОБ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

И.Н. Жукова, В.С. Малых

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Приводится строгое обоснование потенциальности произвольного электростатического поля без применения интегрального исчисления, доступное для учащихся средней школы. Рассматриваются разные способы определения электрической энергии системы точечных зарядов. С подробным обоснованием находится полная энергия двух заряженных сфер. Обращается внимание на возможные противоречия, возникающие у школьников и студентов при изучении вопросов, связанных с потенциалом и энергией электростатического поля, указываются пути из разрешения. Отмечаются ошибки, допускаемые при изложении этих вопросов в учебной литературе. Все ошибки досконально исправляются. Дается оригинальный вывод формулы для плотности энергии гравитационного поля.

В школьных учебниках, даже для классов с углублённым изучением физики [1], потенциальность электростатического поля не доказывается, а лишь иллюстрируется одним-двумя примерами. Предлагаем достаточно строгое и в то же время доступное для школьников доказательство потенциальности произвольного электростатического поля.

Докажем, что работа поля точечного заряда q при перемещении пробного заряда q_0 между двумя точками A и B (рис. 1) не зависит от формы траектории, по которой перемещается пробный заряд. Элементарная работа на участке Δs равна:

$$\Delta A = \overline{F}\Delta S\cos\alpha,$$

где $\overline{F}$ – модуль средней силы, действующей на пробный заряд. Если участок Δs очень мал, то $\overline{F}$ определится как среднее арифметическое значений силы F в начальной и конечной точках или как среднее геометрическое этих же значений (или как любое их среднее). Действительно, для нашего случая (r_1 и r_2 мало отличаются друг от друга):

$$F_{\tilde{n}\eth\grave{a}\eth.} = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{kqq_0}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) = \frac{kqq_0}{2}\cdot\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 r_2^2} = \frac{kqq_0}{2}\cdot\frac{r_1^2 + (r_1 + \Delta r)^2}{r_1^2 r_2^2} =$$

$$= \frac{kqq_0}{2}\cdot\frac{2r_1^2 + 2r_1\Delta r + \Delta r^2}{r_1^2 r_2^2} \approx \frac{kqq_0}{2}\cdot\frac{2r_1(r_1 + \Delta r)}{r_1^2 r_2^2} = kqq_0\cdot\frac{r_1 r_2}{r_1^2 r_2^2} = \sqrt{\frac{kqq_0}{r_1^2}\cdot\frac{kqq_0}{r_2^2}} =$$

$$= \sqrt{F_1 F_2} = F_{\tilde{n}\eth.\tilde{a}\hat{a}\hat{i}\hat{i}.}$$

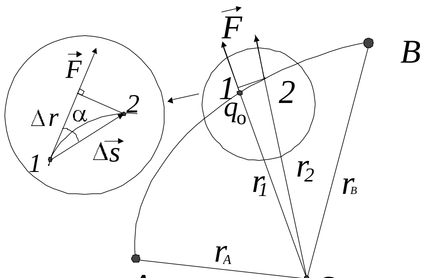


Рис. 1.

Таким образом, $\overline{F} = \dfrac{kqq_0}{r_1 r_2} = F_{\tilde{n}\eth\grave{a}\eth.} = F_{\tilde{n}\eth.\tilde{a}\hat{a}\hat{i}\hat{i}.}$ Учитывая, что $\Delta s\cos\alpha = \Delta r = r_2 - r_1$, получим для элементарной работы выражение:

$$\Delta A = \frac{kqq_0}{r_1 r_2}\left(r_2 - r_1\right) = kqq_0\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Перенумеруем все участки от начального 1 до последнего n. Для любого участка под номером i

$$\Delta A_i = kqq_0\left(\frac{1}{\hat{e}_i} - \frac{1}{\hat{e}_{i+1}}\right).$$

Суммируя все элементарные работы ΔA_i, получим общую работу

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = kqq_0\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right).$$

Таким образом, работа электростатического поля при перемещении заряда q_0 не зависит от формы траектории, а определяется начальным и конечным расположением заряда q_0 в поле заряда q, т.е. электростатическое поле потенциально. Следует заметить, что такое вычисление работы (без интегрирования) приводится в [2, 3], правда, без подробного обоснования. Проведём обобщение полученного вывода о потенциальности электростатического поля на случай произвольного поля. Пусть электростатическое поле образовано произвольной системой точечных зарядов q_1, q_2, ..., q_n (возможно также и непрерывное распределение зарядов dq_1, dq_2, ..., dq_n). Согласно принципу суперпозиции сила, действующая на пробный заряд q_0 со стороны результирующего поля равна геометрической сумме сил со стороны полей каждого из зарядов:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

Умножим это равенство скалярно на произвольный малый вектор перемещения $\Delta\vec{s}_i$:

$$\left(\vec{F}\Delta\vec{s}_i\right) = \left(\vec{F}_1\Delta\vec{s}_i\right) + \ldots + \left(\vec{F}_n\Delta\vec{s}_i\right), \text{ или } \Delta A_i = \Delta A_{1i} + \ldots + \Delta A_{ni}.$$

Просуммируем последнее равенство по i:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_{1i} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} \Delta A_{ni}, \text{ или } A = A_1 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i .$$

Это равенство справедливо для любой кривой, по которой перемещается заряд q_0 из точки A в точку B. Для любой из этих кривых работа A_1 будет одна и та же. Аналогично и работы A_2, A_3, ..., A_n. Следовательно, и работа A будет одной и той же при перемещении заряда q_0 по всем возможным траекториям, т.е. *электростатическое поле произвольной системы зарядов потенциально.*

При рассмотрении этого вопроса в вузе тоже можно уточнить, что при расчёте элементарной работы dA поля заряда q по перемещению заряда q_0 из точки с радиус-вектором $\vec{r}$ в точку с радиус-вектором $\vec{r} + d\vec{s}$ мы должны брать среднюю силу $F_{ñð}$:

$$dA = \left(\vec{F}_{ñð} d\vec{s}\right) = \left(\frac{\vec{F} + \vec{F} + d\vec{F}}{2} \cdot d\vec{s}\right) = \left(\vec{F} d\vec{s}\right) + \frac{1}{2}\left(d\vec{F} d\vec{s}\right).$$

Второе слагаемое имеет более высокий порядок малости и в пределе стремится к нулю быстрее, чем $\vec{F}d\vec{s}$.

Заметим, что когда в школьном учебнике потенциальность электростатического поля обсуждается только на примере однородного поля (например, в [4, 5]), у учащихся может возникнуть недопустимая ассоциация: потенциальность - однородное поле. Поэтому важно, как это сделано в [1], рассматривать наряду с однородным полем также и поле точечного заряда. В классах с углубленным изучением физики важно обобщить вывод о потенциальности на случай произвольного электростатического поля.

Некоторые авторы школьных учебников [1, 5] пытаются обосновать потенциальность электростатического поля без применения закона Кулона путём рассуждений, основанных на законе сохранения энергии и невозможности вечного двигателя. В то же время они нигде не подчёркивают, почему такие же рассуждения нельзя применить к магнитному полю. Этот подход встречается в известном учебнике И.Е. Тамма [6, с. 47-48], где сразу же уточняется разница между электростатическим и магнитным полями (правда, речь об этом идёт в пределах сноски, ибо вопрос этот достаточно серьёзен и при изучении электростатики его обсуждать преждевременно, тем более в школьном курсе).

Как известно, работа сил потенциального поля по перемещению заряда равна убыли потенциальной энергии заряда W, которая зависит от зарядовой конфигурации системы:

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = W_1 - W_2$$

здесь $\vec{F}$ - сила, действующая на заряд в каждой точке со стороны электростатического поля, $d\vec{s}$- дифференциал вектора перемещения вдоль траектории. Очевидно, что физический смысл имеет только разность потенциальных энергий, само же значение W не имеет смысла, пока не выбран нулевой потенциальный уровень. Обычно потенциальная энергия системы принимается равной нулю, когда все заряды находятся очень далеко друг от друга $(W_\infty = 0)$. Поэтому потенциальная энергия системы заряженных тел в состоянии 1 равна работе внешних сил по собиранию этой системы из зарядов, находящихся в бесконечности:

$$A_{\infty\to 1} = -(W_\infty - W_1) \quad \Rightarrow \quad W_1 = \int_\infty^1 \vec{F}' d\vec{s}, \tag{1}$$

где внешняя сила $\vec{F}' = -\vec{F}$. Рассмотрим примеры.

<u>**Задача 1.**</u> Вычислить электрическую энергию двух точечных зарядов Q_1 и Q_2, находящихся на расстоянии r_{12}.

<u>Решение</u>. Рассматриваемая система обладает потенциальной энергией, равной работе внешних сил (против электрических) по сближению зарядов из бесконечности до расстояния r_{12}:

$$A_{\infty\to r_{12}} = -(W_\infty - W_{r_{12}}) = -\int_\infty^{r_{12}} \frac{kQ_1Q_2 dr}{r^2} = \frac{kQ_1Q_2}{r_{12}} \quad \Rightarrow \quad W_{r_{12}} = \frac{kQ_1Q_2}{r_{12}}. \tag{2.1}$$

<u>**Задача 2.**</u> Вычислить электрическую энергию системы n точечных зарядов.

<u>Решение.</u> Первый заряд q_1 приносится из бесконечности без совершения работы. Каждый последующий привносится в систему в результате совершения внешними силами определенной работы:

$$A_1 = 0,$$

$$A_2 = \frac{kq_1q_2}{r_{12}},$$

$$A_3 = \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}},$$

…………………....................

$$A_n = \frac{kq_1q_n}{r_{1n}} + \ldots + \frac{kq_{n-1}q_n}{r_{n-1,n}}.$$

Складывая работы, находим энергию системы:

$$W = A_1 + \ldots + A_n = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i\neq k}\frac{kq_iq_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i, \tag{2.2}$$

где φ_i - потенциал поля, создаваемого всеми зарядами кроме i-го в точке, где находится заряд q_i. Если заряд распределен непрерывно, в выражении (2.2) сумму заменим интегралом:

$$W = \frac{1}{2}\int\frac{k\cdot dq\cdot dq'}{r} = \frac{1}{2}\cdot\int\varphi dq, \tag{2.3}$$

где в зависимости от характера распределения заряда

$$dq=\begin{cases}\rho dV\\ \sigma dS\\ \tau dL\end{cases}$$

(ρ, σ, τ - соответственно объемная, поверхностная, линейная плотности заряда). Интегрирование в (2.3) ведется по всему пространству, занятому зарядами.

Рассматривая энергию заряженного плоского конденсатора через работу внешних сил по его зарядке и вводя характеристику поля $\vec{E}$, получаем известное выражение:

$$W=\frac{CU^2}{2}=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}V=wV,$$

где w - объемная плотность энергии. Так как произвольное электростатическое поле можно разбить на огромное число малых областей, где напряженность постоянна и, следовательно, определена функция w, то полная энергия поля равна:

$$W=\int_V wdV=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V E^2 dV. \qquad (3)$$

Покажем, что уравнения (2.3) и (3) эквивалентны [7, 8]. Запишем терему Гаусса в дифференциальной форме и учтем связь между напряженностью и потенциалом

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\ \vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi \Rightarrow \rho=-\varepsilon_0 \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi.$$

Подставляя это значение ρ в (2.3), получаем:

$$W=\int_V \rho\varphi dV=-\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varphi \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi dV.$$

По свойству дивергенции векторного поля [6, с. 591]:

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi)=\varphi \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\varphi.$$

Выразим из последнего равенства $\varphi \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$ и подставим в выражение для W:

$$W=-\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi)dV+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\varphi dV.$$

Первый интеграл по теореме Гаусса преобразуем в интеграл по замкнутой поверхности:

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi)dV=\oint_S \varphi \operatorname{grad}\varphi dS\vec{n}$$

В качестве замкнутой поверхности возьмем сферу огромного радиуса $(R\to\infty)$. Тогда $\varphi\sim\frac{1}{R}$, $\operatorname{grad}\varphi\sim\frac{1}{R^2}$, $S\sim R^2$, $\Rightarrow \varphi \operatorname{grad}\varphi dS\sim\frac{1}{R}$ и при $R\to\infty$, $\varphi \operatorname{grad}\varphi dS\to 0$. Следовательно, если поле занимает все пространство, а заряды расположены друг от друга на конечном расстоянии, поверхностный интеграл равен нулю, то есть:

$$W=\int_V \rho\varphi dV=\int_V \frac{\varepsilon_0 E^2 dV}{2}.$$

Таким образом, мы можем находить электрическую энергию системы зарядов по формулам (1), (2.1-3), (3). Рассмотрим два конкретных примера [7, с. 119].

<u>**Задача 3.**</u> Вычислить электрическую энергию шара радиуса R в вакууме, если заряд шара Q равномерно распределен по его поверхности.

<u>Решение.</u> Решим задачу тремя способами.

а) Применим формулу (1). Энергия заряженного шара равна работе внешних сил по его зарядке. Первоначальная малая порция заряда dq перемещается на шар из бесконечности без совершения работы. Пусть мгновенный заряд шара q, тогда для перемещения очередной порции dq нужно совершить элементарную работу:

$$dA = \int_{\infty}^{R} \left(d\vec{F}'d\vec{S}\right) = -\int_{\infty}^{R} \frac{kqdq}{r^2} dr = \frac{kqdq}{R}.$$

Полная работа по зарядке шара равна:

$$A = \int_0^Q dA = \int_0^Q \frac{kqdq}{R} = \frac{kQ^2}{2R}.$$

Тогда энергия заряженной сферы, согласно (1), равна

$$W = \frac{kQ^2}{2R}. \qquad (4)$$

б) Применим формулу (2.3). Поскольку заряд равномерно распределен по поверхности шара, потенциал всех точек поверхности одинаков и равен φ. Тогда, согласно (2.3), электрическая энергия шара равна

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi dq = \frac{\varphi}{2}\int dq = \frac{\varphi Q}{2} = \frac{kQ^2}{2R}, \text{ (так как } \varphi = \frac{kQ}{R}\text{)}.$$

в) Найдем энергию шара по формуле (3):

$$W = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_0 E^2 dV}{2} = \int_0^R \frac{\varepsilon_0 E^2 dV}{2} + \int_R^{\infty} \frac{\varepsilon_0 E^2 dV}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^{\infty}\left(\frac{kQ}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{kQ^2}{2R}.$$

Здесь учли, что $E = \begin{cases} 0, r < R; \\ \dfrac{kQ}{r^2}, r \geq R, \left(k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right). \end{cases}$

<u>**Задача 4.**</u> Вычислить электрическую энергию шара радиуса R в вакууме, если заряд шара Q равномерно распределен по его объему.

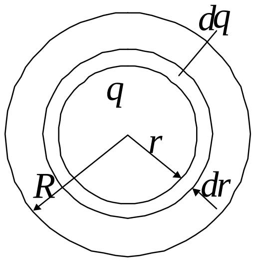


Рис. 2.

<u>Решение</u>. Применим формулы (1), (2.1-3), (3).

а). Будем заряжать шар последовательно сферическими слоями толщиной dr. Работа по образованию очередного сферического слоя радиуса r найдена при решении задачи 3 и равна:

$$dA = \frac{kqdq}{r},\ q = \frac{4}{3}\pi r^3\rho,\ dq = \rho 4\pi r^2 dr,\ dA = \frac{16}{3}\pi^2\rho^2 k r^4 dr.$$

Полная работа по зарядке шара:

$$A = \frac{16}{3}k\pi^2\rho^2\int_0^R r^4 dr = \frac{3kQ^2}{5R},\ \left(Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho\right),$$

а энергия шара, согласно (1), равна:

$$W = \frac{3kQ^2}{5R}. \tag{5}$$

б) Для решения этой задачи с помощью соотношения (2.3) предварительно рассчитаем потенциал электрического поля внутри шара в зависимости от расстояния до центра шара. Применяя теорему Гаусса, находим напряженность электрического поля в точках, отстоящих на расстоянии r от центра шара:

$$E = \frac{k\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{r^2},\ \left(r \le R\right).$$

Так как $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi,\ E_r = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r},\ \Rightarrow\ d\varphi = -Edr$, тогда

$$\int_{\varphi}^{\varphi_R} d\varphi = -\int_r^R \frac{k\frac{4}{3}\pi r^3\rho dr}{r^2} = -\int_r^R \frac{4}{3}k\pi r dr\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = -\frac{kQ}{2R^3}\left(R^2 - r^2\right),$$

$$\varphi_R - \varphi = -\frac{kQ}{2R} + \frac{kQr^2}{2R^3}.$$

Учтем, что на поверхности шара потенциал равен $\varphi_R = \dfrac{kQ}{R}$, тогда:

$$\varphi = \varphi_R + \frac{kQ}{2R} - \frac{kQr^2}{2R^3} = \frac{3kQ}{2R} - \frac{kQr^2}{2R^3}.$$

Подставляя полученное выражение для потенциала в (2.3), получаем энергию электрического поля:

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi dq = \frac{1}{2}\int_0^R \left\{\frac{3kQ}{2R} - \frac{kQr^2}{2R^3}\right\}\rho\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{3kQ^2}{5R}.$$

$$W = \int w dV = \int_0^\infty \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\cdot 4\pi r^2 dr = 2\pi\varepsilon_0\left\{\int_0^R \left(\frac{k\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{r^2}\right)^2 + \int_R^\infty \left(\frac{kQ}{r^2}\right)^2 r^2 dr\right\} =$$

$$= 2\pi\varepsilon_0\left\{\frac{16}{9}\pi^2\rho^2 k^2\int_0^R r^4 dr + k^2Q^2\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}\right\} = \frac{3kQ^2}{5R}.$$

в) Решим эту же задачу, применяя формулу (3).

Пусть теперь у нас имеются два равномерно заряженные по поверхности шара с зарядами Q_1, Q_2 и радиусами R_1, R_2. Расстояние между центрами шаров r_{12}. Найдем энергию такой системы по формуле (2.3). Сначала найдем энергию попарного взаимодействия элементов заряда dq первого шара между собой $\left(W_1\right)$, затем – то же для второго шара $\left(W_2\right)$, затем энергию попарного взаимодействия элементов заряда первого шара с элементами заряда второго шара $\left(W_{\text{ÂÇ}}\right)$. Энергии W_1 и W_2 найдены нами в задаче 3:

$$W_1 = \frac{kQ_1^2}{2R_1},\ W_2 = \frac{kQ_2^2}{2R_2}.$$

Найдем энергию взаимодействия шаров:

$$W_{\text{ÂÇ}} = \frac{1}{2}\int_{1\leftrightarrow 2}\frac{kdqdq'}{r} = \frac{1}{2}\left\{\int_{S_2}\varphi_1 dq + \int_{S_1}\varphi_2 dq\right\} = \int_{S_1}\varphi_2 dq = \int_{S_2}\varphi_1 dq.$$

Потенциал поля первого шара на расстояниях $r > R_1$ от центра этого шара совпадает с потенциалом поля точечного заряда, помещенного в центр первого шара:

$$\varphi_1 = \frac{kQ_1}{r}.$$

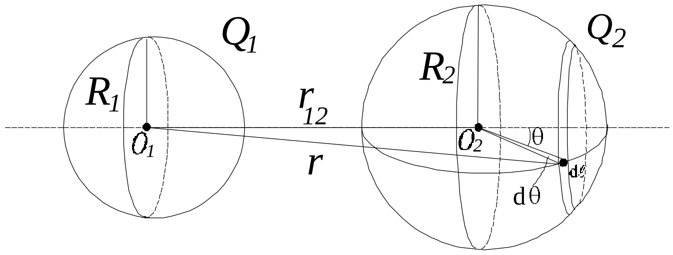


Рис. 3

В качестве элемента заряда возьмем элементарное кольцо на поверхности второго шара толщиной $d\ell = R_2 d\theta$ с поверхностной плотностью заряда $\sigma = \dfrac{Q_2}{4\pi R_2^2}$:

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi R_2^2 \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2} Q_2 \sin\theta\, d\theta,\; W_{\text{ÂÇ}} = \int\limits_{S_2} \varphi_1 dq = \int\limits_0^{\pi} \frac{kQ_1}{r} \frac{1}{2} Q_2 \sin\theta\, d\theta.$$

Расстояние от центра первого шара до элемента заряда dq второго шара найдем по теореме косинусов:

$$r = \sqrt{r_{12}^2 + R_2^2 + 2R_2 r_{12} \cos\theta}.$$

Введем обозначения: $r_{12}^2 + R_2^2 = A$, $2R_2 r_{12} = B$, тогда:

$$W_{\text{ÂÇ}} = \frac{1}{2} kQ_1 Q_2 \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{A + B\cos\theta}} = \frac{1}{2} kQ_1 Q_2 \frac{2}{r_{12}} = \frac{kQ_1 Q_2}{r_{12}}.$$

Таким образом, полная энергия системы двух заряженных шаров равна:

$$W = W_1 + W_2 + W_{\text{ÂÇ}} = \frac{kQ_1^2}{2R_1} + \frac{kQ_2^2}{2R_2} + \frac{kQ_1 Q_2}{r_{12}}. \qquad (6)$$

Теперь мы можем в любой системе заряженных тел выделить "собственную" энергию тел (обусловленную взаимодействием заряженных частей этого тела между собой) и энергию взаимодействия (обусловленную взаимодействием заряженных частей одного тела с заряженными частями другого тела). Разделение энергии на собственную и энергию взаимодействия полезно проводить, чтобы не возникало мнимых парадоксов ([1, с.229], [9, с.268], [10, с.52]).

Заметим, что если в формуле (4) устремить радиус сферы к нулю, то собственная энергия "точечной" сферы устремится в бесконечность. Так как, понятие "точечный заряд" – абстракция, и на самом деле размеры любого тела конечны, собственная энергия всегда конечна. Собственная энергия точечных зарядов не может измениться (заряд не может перераспределиться), а во всех задачах важно именно изменение энергии, поэтому собственную энергию точечных зарядов обычно опускают (именно так мы поступили при решении задачи 1).

Найдем теперь энергию системы двух заряженных шаров по формуле (3) и полученное выражение сравним с (6):

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)^2 dV = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int E_1^2 dV + \frac{\varepsilon_0}{2} \int E_2^2 dV + \varepsilon_0 \int \left(\vec{E}_1 \vec{E}_2\right) dV. \end{aligned} \qquad (7)$$

Первые два слагаемые определяют собственную энергию шаров, последний – энергию взаимодействия. Как видим, энергию взаимодействия двух равномерно заряженных по поверхности шаров, (а значит, и энергию взаимодействия точечных зарядов) можно считать по формулам:

$$W_{ÂÇ} = \frac{kQ_1Q_2}{r_{12}}, \tag{8.1}$$

$$W_{ÂÇ} = \varepsilon_0\int\left(\vec{E}_1\vec{E}_2\right)dV . \tag{8.2}$$

Докажем эквивалентность этих формул [6, с.86, задача 15].

Пусть имеются точечные заряды Q_1 и Q_2, расположенные на расстоянии r_{12}. Выразим напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в некоторой точке A через градиенты соответствующих потенциалов:

$$\vec{E}_1 = -\mathrm{grad}\varphi_1,\ \vec{E}_2 = -\mathrm{grad}\varphi_2 .$$

Перепишем (8.2):

$$W_{ÂÇ} = \varepsilon_0\int\left(\mathrm{grad}\varphi_1\,\mathrm{grad}\varphi_2\right)dV . \tag{9}$$

Применим теорему Грина [6, с.587]:

$$\int\limits_V\left\{\varphi_1\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\varphi_2 + \mathrm{grad}\varphi_1\,\mathrm{grad}\varphi_2\right\}dV = \oint\limits_S\varphi_1\left(\mathrm{grad}\varphi_2 d\vec{S}\right). \tag{10}$$

Интеграл в правой части берется по замкнутой поверхности S, ограничивающей область интегрирования V. Теорема Грина применима к конечным и непрерывным скалярным функциям точки $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$, обладающим в области интегрирования V производными первого и второго порядков. В нашем случае функции $\varphi_1 = \dfrac{kQ_1}{r_1}$ и $\varphi_2 = \dfrac{kQ_2}{r_2}$ удовлетворяют этим условиям во всем пространстве, кроме точек O_1 и O_2, в которых находятся заряды. Поэтому точки O_1 и O_2 нужно исключить из области интегрирования V. Опишем с этой целью (рис. 4) вокруг точки O_1 сферу S_1, а вокруг точки O_2 – сферу S_2 произвольно малого радиуса R_0 и применим формулу (10) к объему V', заключенному между внешней поверхностью S и поверхностями сфер S_1 и S_2:

$$\int\limits_{V'}\varphi_1\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\varphi_2 dV + \int\limits_{V'}\mathrm{grad}\varphi_1\,\mathrm{grad}\varphi_2 dV = \oint\limits_{S+S_1+S_2}\varphi_1\left(\mathrm{grad}\varphi_2 d\vec{S}\right). \tag{11}$$

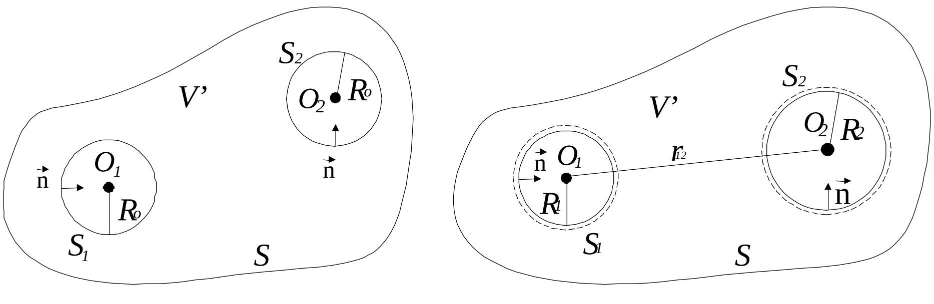


Рис. 4, 5

В силу малости радиуса R_0 можно пренебречь долей энергии, локализованной внутри сфер S_1 и S_2. Перепишем (9) с учетом (11):

$$W_{ÂÇ} = \varepsilon_0\left\{\oint\limits_{S+S_1+S_2}\varphi_1\left(\mathrm{grad}\varphi_2 d\vec{S}\right) - \int\limits_{V'}\varphi_1\,\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\varphi_2\right)dV\right\}. \tag{12}$$

В пространстве V', расположенном вне сферы S_2:

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\varphi_2\right) = -\mathrm{div}\vec{E}_2 = 0,$$

так как источник векторного поля $\vec{E}_2$ находится внутри сферы S_2, поэтому второй интеграл в (12) равен нулю. Рассмотрим поверхностные интегралы:

а) $\oint\limits_S \varphi_1\left(\mathrm{grad}\varphi_2 d\vec{S}\right) = 0$, так как $dS \sim r^2$, $\varphi_1 \sim \frac{1}{r}$, $\mathrm{grad}\varphi_2 \sim \frac{1}{r^2}$ $\Rightarrow$ $\varphi_1\left(\mathrm{grad}\varphi_2 d\vec{S}\right) \sim \frac{1}{r}$.

При удалении граничной поверхности S в бесконечность $(r \to \infty)$, подынтегральное выражение стремится к нулю.

б) $\oint\limits_S \varphi_1\left(\mathrm{grad}\varphi_2 d\vec{S}\right) = \frac{kQ_1}{R_0}\oint\limits_{S_1}\left(-\vec{E}_2 d\vec{S}\right) = 0$,

так как внутри сферы S_1 нет источников поля $\vec{E}_2$ и по теореме Гаусса поток векторного поля $\vec{E}_2$ через поверхность сферы S_1 равен нулю.

в) Рассмотрим интеграл $\oint\limits_{S_2} \varphi_1\left(\mathrm{grad}\varphi_2 d\vec{S}\right)$.

Если заряды Q_1 и Q_2 достаточно удалены друг от друга, радиус сферы S_2 сколь угодно мал, то на поверхности сферы S_2 потенциал φ_1 можно считать постоянным и равным $\varphi_1 = \frac{kQ_1}{r_{12}}$, тогда после вынесения φ_1 за знак интеграла и применения теоремы Гаусса, получаем:

$$\oint\limits_{S_2} \varphi_1\left(\mathrm{grad}\varphi_2 d\vec{S}\right) = -\varphi_1\oint\limits_{S_2}\left(\vec{E}_2 d\vec{S}\right) = -\varphi_1\oint\limits_{S_2} E_2 dS\cos\pi = \varphi_1\frac{Q_2}{\varepsilon_0} = \frac{kQ_1Q_2}{\varepsilon_0 r_{12}},$$

где учли, что внешняя нормаль к поверхности S_2 направлена внутрь сферы S_2. Тогда перепишем (12) окончательно в виде:

$$W_{ÂÇ} = \frac{kQ_1Q_2}{r_{12}},$$

что согласуется с (8.1).

Если имеются два равномерно заряженных по поверхности шара Q_1, R_1 и Q_2, R_2 для доказательства эквивалентности формул (8.1) и (8.2) можно повторить приведенные выше рассуждения (радиусы сфер S_1 и S_2 будут стремиться к радиусам шаров (рис. 5)). Различие возникает только при взятии интеграла по поверхности S_2:

$$W_{ÂÇ} = \varepsilon_0\oint\limits_{S_2}\varphi_1\left(\mathrm{grad}\varphi_2 d\vec{S}\right).$$

Для вычисления этого интеграла вернемся к рисунку 3.

$$\varphi_1 = \frac{kQ_1}{r},\ r = \sqrt{r_{12}^2 + R_2^2 + 2R_2 r_{12}\cos\theta},$$

$$\left(\mathrm{grad}\varphi_2 d\vec{S}\right) = -E_2 dS\cos\pi = E_2 dS = \frac{kQ_2}{R_2^2}2\pi R_2^2\sin\theta d\theta,$$

$$W_{ÂÇ} = \varepsilon_0 k^2 Q_1 Q_2 2\pi\int\limits_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{A + B\cos\varphi}} = \frac{kQ_1Q_2}{r_{12}},\ \text{где}\ A = r_{12}^2 + R^2,\ B = 2R_2 r_{12}.$$

Таким образом, для точечных и сферически-симметричных зарядов формулы (8.1) и (8.2) эквивалентны.

Рассмотрим электрическое поле системы двух точечных зарядов. Любопытно, что точки поля, для которых плотность энергии поля равна сумме плотностей полей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ образуют сферу радиуса $\frac{r}{2}$ с центром в середине отрезка Q_1Q_2, ибо во всех точках этой сферы вектора $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ перпендикулярны:

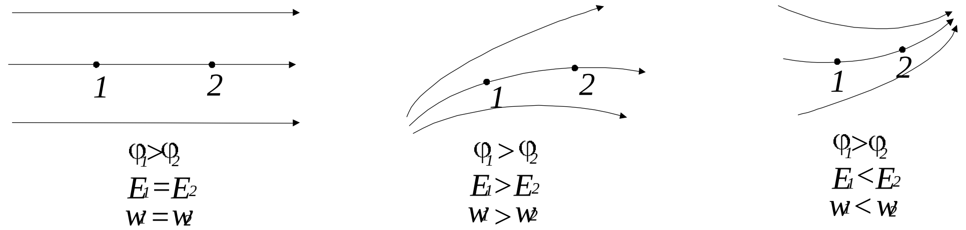
$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha = E_1^2 + E_2^2, \text{ так как } \cos\alpha = 0.$$

	Внутри сферы	вне сферы	на сфере
$Q_1Q_2 > 0$	$w < w_1 + w_2$	$w > w_1 + w_2$	$w = w_1 + w_2$
$Q_1Q_2 < 0$	$w > w_1 + w_2$	$w < w_1 + w_2$	$w = w_1 + w_2$

Рассмотрим еще одну задачу.

__Задача 5.__ Как изменятся потенциал и напряженность поля точечного заряда Q в точке A, если в точку B поместить проводящий шар?

Решение. Учитывая поле наведенных на сфере зарядов, легко показать, что потенциал в точке A уменьшился, а напряженность электрического поля возросла. Это значит, что потенциальная энергия заряда q_0, внесенного в точку A, уменьшилась, а собственная энергия поля в пределах малого объема ΔV, содержащего точку A, возросла. В этом нет противоречия, т.к. речь идет здесь о разных энергиях, между которыми нет никакой определенной связи. Проиллюстрируем это примерами.



Не во всех курсах общей физики [11, 12] проводится четкое разграничение собственной энергии зарядов, энергии взаимодействия, полной энергии системы. Может быть, с этим связаны некоторые ошибки при решении задач. Так, известную задачу о точечном заряде над проводящей бесконечной плоскостью различные авторы решают по разному и получают разные ответы.

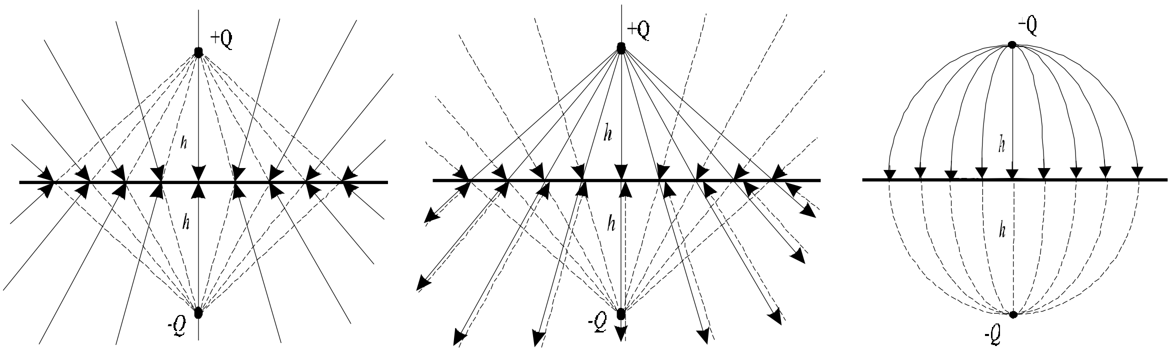


Рис. 6

Рассмотрим точечный заряд над бесконечной плоской поверхностью проводника. Как известно, точечный заряд индуцирует на поверхности проводника заряды, поле которых вне проводника (в верхнем полупространстве) эквивалентно полю заряда-изображения $Q' = -Q$ (рис. 6).

Результирующее поле в верхнем полупространстве эквивалентно полю двух точечных зарядов $+Q$ и $-Q$, а в нижнем полупространстве оно равно нулю. (Пояснение. Сплошными линиями изображены: на левом рисунке – поле наведенных зарядов плоскости, на среднем – поле заряда $+Q$, на правом – результирующее поле.)

Напряженность поля наведенных зарядов в т. A (рис. 7) вблизи проводника, находящейся на расстоянии x от точки O, равна (по модулю):

$$E_{(-)} = k\frac{Q}{x^2 + h^2}.$$

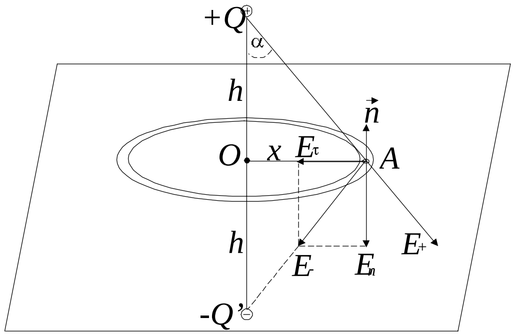


Рис. 7

Нормальная составляющая этой напряженности:

$$E_n = -E_{(-)}\cos\alpha = -\frac{kQh}{\sqrt{\left(x^2+h^2\right)^3}}.$$

Отсюда поверхностная плотность заряда, наведенного во всех точках проводника, отстоящих на расстоянии x от точки O , равна:

$$\sigma = 2\varepsilon_0 E_n = -2\varepsilon_0 kQh\left(x^2+h^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Потенциальная энергия взаимодействия точечного заряда q с наведенными зарядами, находящимися на кольце радиуса x и шириной dx равна по формуле (2.1):

$$dW_{ÂÇ} = \frac{kQ\sigma dS}{\sqrt{x^2+h^2}} = -\frac{kq2\varepsilon_0 kQh\,2\pi x dx}{\left(x^2+h^2\right)^2}.$$

Энергия взаимодействия точечного заряда с наведенными зарядами на всей поверхности проводника:

$$W_{ÂÇ} = -2\pi\varepsilon_0 k^2 Q^2 h\int_0^\infty \frac{2xdx}{\left(x^2+h^2\right)^2} = -2\pi\varepsilon_0 k^2 Q^2\frac{1}{h} = -\frac{kQ^2}{2h}. \qquad (13)$$

Иногда [13-16] энергию взаимодействия заряда Q с наведенными зарядами необоснованно считают равной работе внешних сил по перемещению заряда Q из начальной точки в бесконечность, при этом энергия получается вдвое меньшей по сравнению с (13). Покажем, прежде всего, что расчет по схеме:

$$W_{ÂÇ} = A_{h\to\infty} = Q\left(\varphi_h - \varphi_\infty\right)$$

здесь не может быть проведен, т.к. заряд Q перемещается в переменном электрическом поле наведенных зарядов. Точкам этого поля нельзя приписать никакого определенного потенциала: как только заряд Q окажется от поверхности проводника на расстоянии $h+dh$, потенциал точки, где раньше заряд находился (на расстоянии h) изменится - не останется равным φ_h. Формула $W = Q\left(\varphi_h - \varphi_\infty\right)$ была бы верна, если бы потенциал первоначального местоположения заряда φ_h и потенциалы всех точек поля не изменились бы при перемещении заряда Q . Тем не менее, формулу (13) можно вывести и с использованием понятия работы поля. В нашем случае работа поля наведенных зарядов при перемещении точечного заряда Q в ∞ равна:

$$A = \int_h^\infty F_r dr = -\int_h^\infty \frac{kQ^2 dr}{4r^2} = -\frac{kQ^2}{4h}.$$

Эта работа выражается через изменение потенциальной энергии системы "заряд + наведенные заряды" следующим образом:

$$A = -\left(W_2 - W_1\right) = W_1 - W_2,$$

где $W = W_H + W_q + W_{\text{ÂÇ}}$ (W_H – собственная энергия наведенных зарядов, W_Q – собственная энергия точечного заряда, $W_{\text{ÂÇ}}$ – искомая энергия взаимодействия). Так как при перенесении заряда Q в бесконечность его собственная энергия не изменилась $\left(W_{Q_2} = W_{Q_1}\right)$, а собственная энергия наведенных зарядов и энергия взаимодействий равны нулю $W_{H_2} = 0$ и $W_{\text{ÂÇ}_2} = 0$, то:

$$A = W_{H_1} + W_{\text{ÂÇ}_1} \Leftrightarrow W_{\text{ÂÇ}_1} = A - W_{H_1}.$$

Собственную энергию наведенных зарядов в начальном состоянии системы вычислим непосредственным интегрированием:

$$W_{H_1} = 2\int wdV$$, (интеграл берем по верхнему полупространству).

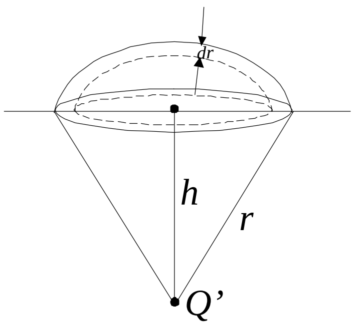


Рис. 8

Элемент объема $dV = Sdr$ (рис. 8), где S – площадь соответствующего шарового сегмента:

$$S = 2\pi r^2\left(1 - \frac{h}{r}\right),$$ равен $$dV = 2\pi r^2\left(1 - \frac{h}{r}\right)dr.$$

Так как

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 k^2 Q^2}{2r^4},$$ то $$W_{H_1} = 2\pi\varepsilon_0 k^2 Q^2 \int_h^\infty \left(\frac{1}{r^2} - \frac{h}{r^3}\right)dr = \frac{kQ^2}{4h}.$$

Тогда энергия взаимодействия заряда Q с плоскостью равна

$$W_{\text{ÂÇ}_1} = -\frac{kQ^2}{4h} - \frac{kQ^2}{4h} = -\frac{kQ^2}{2h},$$

что согласуется с ранее полученным результатом (формула 13).

Обобщая, заметим, что при рассмотрении взаимодействия точечного заряда с проводящей плоскостью у некоторых авторов допущены ошибки: энергия взаимодействия приведена заниженной вдвое [13, с. 278; 14, с. 201; 15, с. 11; 17, с. 58, 61], неверно записан потенциал поля заряженной плоскости [16, с. 387], неправильно найдена работа по удалению точечного заряда в бесконечность [18, задача 18.63]. Эта работа найдена правильно в [13, с. 278; 19, с. 56; 21, задача 22.5]. Из известных нам источников верное значение энергии взаимодействия заряженного тела (диполя) с проводящей плоскостью указано в[20, с. 71].

К электростатике относят также задачи с движением зарядов. При этом предполагается, что скорость движения не настолько велика, чтобы проявлялось действие токов индуцированных зарядов, выражающееся в нагревании проводников и в излучении электрических волн (разумеется, и ускорения не должны быть большими, чтобы пренебречь потерями энергии на излучение). Если пренебречь этими эффектами, то остаются в силе все энергетические соотношения электростатики. Рассмотрим пример [18, задача 18.64]:

Задача 6. Маленький шарик массой m и радиусом r имеет заряд Q . Шарик подвешен на длинной нити над горизонтальной металлической плоскостью. Высота точки подвеса 2ℓ, длина нити $\ell >> r$. Нить отклонили в горизонтальное положение и отпустили. Чему равно максимальное натяжение нити при движении шарика?

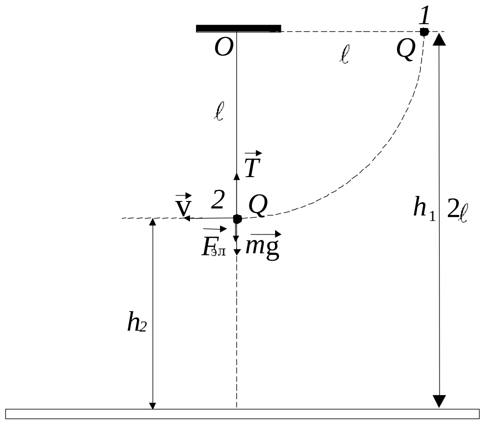


Рис. 9

<u>Решение.</u> В начальном положении 1 нить не натянута, а максимальная сила натяжения возникает при прохождении шариком наинизшего уровня 2. Состояние системы в положении 1 характеризуется энергией:

$$W_1 = W'_H + W'_q + W'_{\text{ÂÇ}} + mgh_1,$$

где $W'_{\text{ÂÇ}} = -\dfrac{kQ^2}{2h_1}$ – энергия взаимодействия заряженного шарика и плоскости; $W'_H = \dfrac{kQ^2}{4h_1}$ – собственная энергия наведенных зарядов плоскости; W'_q – собственная энергия заряда Q. Аналогично для состояния 2:

$$W_2 = W''_H + W''_q + W''_{\text{ÂÇ}} + mgh_2 + \frac{mv^2}{2} = \frac{kQ^2}{4h_2} - \frac{kQ^2}{2h_2} + W''_q + mgh_2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Из равенства $W_1 = W_2$ с учётом: $h_1 = 2\ell$; $h_2 = \ell$; $W''_q = W'_q$ получим:

$$\frac{mv^2}{2} = k\frac{Q^2}{8\ell} + mg\ell.$$

Второй закон Ньютона для шарика, проходящего положение 2, дает

$$m\frac{v^2}{\ell} = T - F_{\text{ÝË}} - mg, \text{ где } F_{\text{ÝË}} = \frac{kQ^2}{(2\ell)^2}.$$

Окончательно имеем: $T = 3mg + \dfrac{1}{2}\dfrac{kQ^2}{\ell^2}$.

В задачнике [18] указан другой ответ: $T = 3mg + \dfrac{3}{4}\dfrac{kQ^2}{\ell^2}$. Сила T оказалась завышенной, т.к. не было учтено изменение собственной энергии наведенных зарядов.

Заметим, в заключение, что плотность энергии гравитационного поля, в отличие от электростатического, является величиной отрицательной. Для доказательства этого рассмотрим уединенную однородную тонкостенную сферическую оболочку массой m и радиусом R (толщина оболочки h). Как известно, напряженность поля тяготения внутри оболочки $r \le R - \dfrac{h}{2}$ равна нулю, вне оболочки она выражается формулой $\Gamma = \dfrac{Gm}{r^2}$, где $r > R - \dfrac{h}{2}$ - расстояние от точки до центра O. Найдем поле внутри оболочки на расстоянии R от ее центра (рис. 10). Согласно теореме Гаусса:

$$\oint \Gamma_r dS = -4\pi GM \;.$$

Взяв в качестве замкнутой поверхности сферу радиуса R (на рис. 10 она изображена пунктиром), получим:

$$\Gamma_r = -\frac{4\pi G\,\frac{m}{2}}{4\pi R^2} = -\frac{Gm}{2R^2}.$$

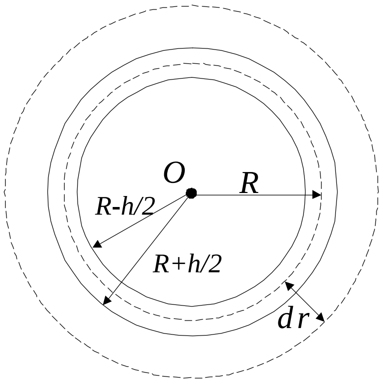


Рис. 10

При этом учли, что внутри пунктирной сферы содержится половина массы всей оболочки (это тем точнее, чем тоньше оболочка). Чтобы увеличить радиус оболочки на очень малую величину dr, надо совершить против сил тяготения работу:

$$dA = \Gamma m dr = \frac{Gm^2}{2R^2}dr.$$

Можно заметить, что при этом в пространстве между старым и новым положениями пунктирной сферы поле тяготения с напряженностью $\Gamma_r = -\frac{Gm}{2R^2}$, обладающее энергией dW_1 будет заменено пространством без поля тяготения ($dW_2 = 0$). Поскольку $dA = dW_2 - dW_1$, то:

$dW_1 = -\frac{Gm^2}{2R^2}dr$. Отсюда $w = \frac{dW_1}{dV} = -\frac{Gm^2 dr}{2R^2 4\pi R^2 dr} = -\frac{G^2m^2}{8\pi GR^4} = -\frac{\Gamma^2}{8\pi G}$.

Этот же вывод можно получить более строго, используя прием, примененный при доказательстве эквивалентности выражений (2.3) и (3) путем замены:

$$\vec{E} \to \vec{\Gamma},\ dq \to dm,\ \varphi \to -\frac{Gdm}{r},\ k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to G.$$

Отметим, что вывод формулы плотности энергии гравитационного поля, приведенный в [22, с. 287-288], не имеет доказательной силы, так как не обосновывается, почему «в поле шара энергия пропорциональна $\frac{1}{r}$».

Литература

1. Физика: Учебное пособие для 10 класса школ и классов с углублённым изучением физики / *Ю. И.Дик, О.Ф. Кабардин, В.А. Орлов и другие.*; Под редакцией *А.А. Пинского* – М.: Просвещение, 1993.
2. *Иванов Б.Н.* Законы физики – М.: Высшая школа, 1986.
3. *Кикоин А.* Вторая космическая скорость. Школа в "Кванте": Физика 9-11, Выпуск 2 / Под редакцией *А.А. Варламова, А.Л. Стасенко и А.И. Черноуцана*, - М.: Бюро квантум, 1995, (Приложение к Журналу "Квант" №5/95)
4. *Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б.* Физика: Учебник для 10 класса средней школы – М.:Просвещение, 1994.
5. *Шахмаев Н.М., Шахмаев С.Н., Шоднев Д.Ш.* Физика: Учебник для 10 класса Средней школы. – М.: Просвещение, 1991.
6. *Тамм И.Е.* Основы Теории Электричества. – М.: Наука, 1976.
7. *Сивухин Д.В.* Электричество: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1977 (Общий курс физики, т3)

8. *Фейнман Р. Лейтон Р. Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм т.5, М.: - Мир. 1977.
9. *Бутиков Е.И., Бычков Л.А., Кондратьев А.С.* Физика в примерах и задачах. - М.: Наука, 1979.
10. *Боровой А.А., Финкельштейн О.Б., Херувимов А.Н.* Законы электромагнетизма. -М.: Наука, 1970.
11. *Калашников Э.Г.* Электричество.- М.: Наука, 1977.
12. *Савельев И.В.* Курс общей физики, т.2.- М.: Наука, 1978.
13. *Иоффе А.Ф.* Курс физики. т.1.- ГИТТЛ, 1940.
14. *Кабардин О.Ф., Кабардина С.И., Орлов В.А.* Задания для итогового контроля знаний учащихся по физике в 7-11 классах средней школы: Дидактический материал. - М.: Просвещение, 1994.
15. Учебные задания по курсу физики повышенного уровня. Электродинамика. (подготовлены *Макаровым Д.Е., Орловым В.А.*), М.: Академия педагогических наук СССР, НИИ содержания и методов обучения, 1989.
16. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. – М.: Мир, 1978.
17. *Антонов Л.И., Деденко Л.Г., Матвеев А.Н.* Методика решения задач по электричеству. - М.: Изд-во МГУ, 1982
18. *Балаш В.А.* Сборник задач по курсу общей физики.- М.: Просвещение, 1978
19. *Иродов И.Е.* Основные законы электромагнетизма. – М.: Высшая школа, 1983.
20. *Жирнов Н.И.* Задачник-практикум по электродинамике. – М.: Просвещение, 1964.
21. *Сахаров Д.И.* Сборник задач по физике. М.: Просвещение, 1973.
22. *Гершензон Е.М., Малов Н.Н.* Курс общей физики: Механика. – М.: Просвещение, 1987.

About energy of electrostatic field

I.N. Zhukova, V.S. Malykh

A strict substantiation of optional electrostatic field potentiality is given without using the integral calculation, understandable for secondary school students. The different ways are examined for defining the electric power of fixed point charges system. Here is given the full power of two charged spheres. The author pays attention on possible contradictions, which arise when pupils and students study subjects connecting with potential and power of electrostatic field, here also pointed the ways of their solving.

