О НОВОМ ПРИЗНАКЕ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВОГО РЯДА

Э.О. Хазириши

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Доказывается теорема о признаке сходимости положительного числового ряда. Указывается, что данный признак сильнее, чем широко известный признак Раабе.

Теорема. *Пусть дан положительный числовой ряд* $\sum a_n$ (1).

1° Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n > e$ *, то ряд* (1) *сходится.*

2° Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n \le e$ *, то ряд* (1) *расходится.*

Доказательство. Признак Гаусса гласит: допустим, что для ряда (1) отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ может быть представлено в виде: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, (2)

где λ и μ – постоянные, а θ_n – ограниченная величина $\left|\theta_n\right| \le L < 1$, то а) при $\lambda>1$ ряд (1) сходится; б) при $\lambda<1$ ряд (1) расходится; в) при $\lambda=1$ ряд (1) сходится, если $\mu>1$ и расходится, если $\mu\le1$.

Учитывая вышеприведенный признак Гаусса рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}\right)^n = \begin{cases}\infty > e, \lambda > 1; \text{ñõîäèòñÿðÿä(1)},\\ 0 < e, \lambda < 1; \text{ðàñõîäèòñÿ ðÿä(1)}\end{cases}$$

Если $\lambda=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}\right)n} = e^{\mu}$, которое больше $e \approx 2{,}7$ при $\mu>1$, по признаку Гаусса ряд (1) сходится.

Если $\mu\le1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n \le e$ и в силу того же признака, ряд (1) расходится.

Заметим, что этот признак сильнее признака Раабе.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}$. Этот ряд сходится при $a>e$, и расходится при $a\le e$. Признак Раабе при $a=e$ не применим.

On new test of convergence of a number series

E.O. Hazirishi

The theorem of convergence of a positive number series is given. This test is stronger as Raabe test.