1 9 9 8 г. № 3

Т р у д ы  Ф О Р А

# ВАРИАЦИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА

**Л.Ж. Паланджянц**

*Майкопский государственный технологический институт, Майкоп*

В статье рассматривается вариация обыкновенного мультипликативного интеграла, формулируется задача о нахождении матричных функций, которые обеспечивают конечную вариацию. Для криволинейного мультипликативного интеграла определяется понятие вариационной производной. Найдены аналоги уравнений Эйлера-Лагранжа и Гамильтона в случае переменных $X$ и $\dot{X}$.

***Вариация обыкновенного мультипликативного интеграла***

Рассмотрим интеграл $Y(t) = \overset{t}{\underset{t_0}{\overset{\frown}{\int}}} E + A(\tau)d\tau$ (1), где $A = A(t)$ - гладкая матричная функция $n$ -го порядка.[1]

Воспользуемся дифференциальным представлением мультипликативного интеграла.

$$Y(t) = E + At + \left(A^2 - A'\right)\frac{t^2}{2} + \left(A'' - 2AA' - A'A + A^3\right)\frac{t^3}{3!} + \ldots + P_n(t)\frac{t^n}{n!} + \ldots,$$

где $P_n = AP_{n-1} - P'_{n-1}$, $P_0 = E$.

Соответственно, имеет место равенство

$$Y^{-1}(t) = E - At + \left(A' + A^2\right)\frac{t^2}{2} + \ldots + Q_n(t)\frac{t^n}{n!} + \ldots,$$

где $Q_n = Q_{n-1}A + Q'_{n-1}$, $Q_0 = E$.

Рассмотрим матричную функцию $\tilde{A} = A + \Delta$, где $\Delta = \Delta(t)$ - некоторая гладкая матричная функция. Вычислим мультипликативный интеграл:

$$\tilde{Y}(t) = \overset{t}{\underset{t_0}{\overset{\frown}{\int}}} E + \tilde{A}(\tau)d\tau$$

и рассмотрим выражение $\delta Y = \tilde{Y}(t)y^{-1}(t)$, то есть,

$$\delta Y = E + \Delta t + \left(-\Delta' + [A,\Delta]\right)\frac{t^2}{2} +$$

$$+\left(\Delta'' + 2[A',A] + [\Delta,A'] + [[\Delta,A],A]\frac{t^3}{3!}\right) + \ldots + R_n\frac{t^n}{n!} + \ldots,$$

где $R_n = [A,R_{n-1}] - R'_{n-1}$, $R_1 = \Delta$.

Выражение $\delta Y$ будем называть вариацией обыкновенного мультипликативного интеграла.

Будем говорить, что интеграл (1) имеет конечную вариацию, если выполняется условие $R_n = 0$ для некоторого $n$.

Возникает задача о том, чтобы найти такие функции $\Delta = \Delta(t)$, которые обеспечивают конечную вариацию интеграла (1). В частности, при $n = 2$ получаем уравнение нулевой кривизны относительно неизвестной функции $\Delta = \Delta(t)$:

$$\Delta' = [A, \Delta].$$

Разрешая это уравнение относительно $\Delta$, получаем:

$$\Delta = \overset{\frown}{\int} \mathrm{E} + A(t)dt \Delta_0 \overset{\frown}{\int} \mathrm{E} + A(t)dt,$$

где $\Delta_0$ - постоянная матрица.

***Вариация криволинейного мультипликативного интеграла***

1. Первая вариация.

Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл:

$$S[\gamma] = \overset{\smile}{\int_\gamma} \mathrm{E} + L(x, \dot{x})dt, \tag{2}$$

где $\gamma : x^i = x^i(t)$ - гладкая кривая, $L = L(x, \dot{x})$ - гладкая матричная функция $n$-го порядка.

Пусть $\eta^i = \eta^i(t),\ a \le t \le b$, любая гладкая функция такая, что $\eta^i(a) = \eta^i(b) = 0$.

Пусть $\gamma + \varepsilon\eta$ - это кривая $x^i = x^i(t) + \varepsilon\eta^i(t)$, близкая к кривой $\gamma(t)$ при малом $\varepsilon$.

Выражение $D_\varepsilon S[\gamma + \varepsilon\eta]\big|_{\varepsilon=0} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(S[\gamma + \varepsilon\eta] S^{-1}[\gamma] - \mathrm{E}\right)$ будем называть вариационной производной интеграла (2).

Вычислим вариационную производную.

Имеем:

$$D_\varepsilon S[\gamma + \varepsilon\eta] = D_\varepsilon \overset{\smile}{\int_a^b} \mathrm{E} + L(x + \varepsilon\eta, \dot{x} + \varepsilon\dot{\eta})dt.$$

Применим формулу мультипликативного дифференцирования по параметру под знаком интеграла (формула Шлезингера).

$$D_t \overset{\smile}{\int_a^b} \mathrm{E} + A(t,x)dx = \int_a^b \left( \overset{\smile}{\int_a^x} \mathrm{E} + A dx \right) \frac{\partial A}{\partial t} \left( \overset{\smile}{\int_a^x} \mathrm{E} - A dx \right) dx.$$

Тогда получаем:

$$D_\varepsilon S[\gamma + \varepsilon\eta]\big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b S(a,t)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(t)\right) S^{-1}(a,t)dt,$$

где $S(a,t) = \overset{\smile}{\int_a^t} \mathrm{E} + L(x(t), \dot{x}(t))dt.$

Интегрируя по частям, получаем:

 

$$\int_a^b S(a,t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(t)S^{-1}(a,t)dt = S(a,t)\frac{\partial L(x(t),\dot{x}(t))}{\partial \dot{x}}S^{-1}(a,t)\eta(t)\Big|_a^b -$$

$$-\int_a^b \frac{d}{dt}\left(S(a,t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}S^{-1}(a,t)\right)\eta(t)dt.$$

Следовательно,

$$D_\varepsilon S[\gamma+\varepsilon\eta]\big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b\left(S(a,t)\frac{\partial L}{\partial x}S^{-1}(a,t) - \frac{d}{dt}\left(S(a,t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}S^{-1}(a,t)\right)\right)\eta(t)dt =$$

$$= \int_a^b\left(S(a,t)\frac{\partial L}{\partial x}S^{-1}(a,t) - \frac{dS(a,t)}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}S^{-1}(a,t) -\right.$$

$$\left. - S(a,t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)S^{-1}(a,t) + S(a,t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}S^{-1}(a,t)\frac{dS(a,t)}{dt}S^{-1}(a,t)\right)\eta(t)dt =$$

$$= \int_a^b\left(S\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right)S^{-1} - SS^{-1}\frac{ds}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}S^{-1} + S\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}S^{-1}\frac{ds}{dt}S^{-1}\right)\eta(t)dt =$$

$$= \int_a^b\left(S\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, L\right]\right)S^{-1}\right)\eta(t)dt,$$

поскольку $S^{-1}\dfrac{dS}{dt} = D_t S = L(x(t),\dot{x}(t))$.

Таким образом, условие $D_\varepsilon S[\gamma+\varepsilon\eta]\big|_{\varepsilon=0} = 0$ равносильно уравнению:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, L\right] = 0, \tag{3}$$

которое можно рассматривать как аналог уравнения Эйлера-Лагранжа.

Заметим, что уравнение (3) представляет собой условие нулевой кривизны следующего интеграла:

$$\overset{\cup}{\int} \mathrm{E} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}dx + Ldt = \mathrm{E}.$$

При этом существует потенциальная функция $\Phi(x,t)$, такая, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \Phi^{-1}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \\ L = \Phi^{-1}\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} \end{cases}. \tag{4}$$

Уравнения (4) можно рассматривать как аналог уравнений Гамильтона в случае переменных $x$ и $\dot{x}$.

Пример. Для интеграла $\Phi[\gamma] = \overset{\cap}{\int_\gamma} \mathrm{E} + \mathrm{P}(x,y)dx + Q(x,y)dy$, вариационная производная $D_\varepsilon \Phi$ совпадает с кривизной интеграла $\mathrm{K} = Q_x - \mathrm{P}_y + [Q, \mathrm{P}]$.

2. Вторая вариация.

Рассмотрим интеграл

$$S[\gamma+\lambda\xi+\mu\eta]=\overset{\cup}{\int}\mathrm{E}+L\left(x(t)+\lambda\xi(t)+\mu\eta(t),\dot{x}(t)+\lambda\dot{\xi}(t)+\mu\dot{\eta}(t)\right)dt.$$

Вычислим мультипликативную производную:

$$D_\mu S[\gamma+\lambda\xi+\mu\eta]\big|_{\mu=0}=\int_a^b S(a,t)\mathrm{K}S^{-1}(a,t)\eta(t)dt,$$

где

$$\mathrm{K}=\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)+\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}},L\right],$$

$$S(a,t)=\overset{\cup}{\int_a^t}\mathrm{E}+L\left(x(t)+\lambda\xi(t),\dot{x}(t)+\lambda\dot{\xi}(t)\right)dt.$$

Так как выражение $D_\mu S\big|_{\mu=0}$ представляет собой обычный интеграл, то естественно дифференцирование по $\lambda$ произвести обычным образом.

$$\left(d_\lambda D_\mu S\right)_{\substack{\mu=0\\ \lambda=0}}=\int_a^b\left(S(a,t)\mathrm{K}S^{-1}(a,t)\right)'_\lambda\eta(t)dt=$$

$$=\int_a^b\left(S'_\lambda\mathrm{K}S^{-1}+S\mathrm{K}'_\lambda S^{-1}-S\mathrm{K}S^{-1}S'_\lambda S^{-1}\right)\eta(t)dt\,.$$

Найдем $D_\lambda S=S^{-1}S'_\lambda$.

$$D_\lambda\overset{\cup}{\int_a^t}\mathrm{E}+L\left(x(t)+\lambda\xi(t),\dot{x}(t)+\lambda\dot{\xi}(t)\right)dt=\int_a^b S(a,t)\frac{\partial L}{\partial\lambda}S^{-1}(a,t)dt,$$

где $\dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=\dfrac{\partial L}{\partial x}\xi(t)+\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}\dot{\xi}(t).$

Вычислим по частям интеграл:

$$\int_a^b S(a,t)\left(\frac{\partial L}{\partial x}\xi(t)+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\dot{\xi}(t)\right)S^{-1}(a,t)dt=$$

$$=\int_a^b S(a,t)\frac{\partial L}{\partial x}S^{-1}(a,t)\xi(t)dt+\int_a^b S(a,t)\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}S^{-1}(a,t)\dot{\xi}(t)dt=$$

$$=\int_a^b S(a,t)\frac{\partial L}{\partial x}S^{-1}(a,t)\xi(t)dt+S(a,t)\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}S^{-1}(a,t)\xi(t)dt\Big|_a^b-$$

$$-\int_a^b\frac{d}{dt}\left(S(a,t)\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}S^{-1}(a,t)\right)\xi(t)dt=$$

$$=\int_a^b S(a,t)\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}+\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}},L\right]\right)S^{-1}(a,t)\xi(t)dt=$$

$$=\int_a^b S(a,t)\mathrm{K}S^{-1}(a,t)\xi(t)dt.$$

 

Следовательно, получаем:

$$\left(d_\lambda D_\mu S\right)\Big|_{\substack{\mu=0\\ \lambda=0}} = \int_a^b S(a,t)\left(S^{-1}S_\lambda{}'\mathrm{K} + \mathrm{K}_\lambda{}' - \mathrm{K}S^{-1}S_\lambda{}'\right)S^{-1}(a,t)\eta(t)dt,$$

где $\mathrm{K}_\lambda{}' = \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}\xi(t) + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \dot{x}}\dot{\xi}(t)$.

И окончательно получаем выражение для второй вариации интеграла:

$$\left(d_\lambda D_\mu S\right)\Big|_{\substack{\mu=0\\ \lambda=0}} = \int_a^b S(a,t)\left\{\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}\xi(t) + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \dot{x}}\dot{\xi}(t) + \right.$$

$$\left. + \left[\int_a^b S(a,t)\mathrm{K}S^{-1}(a,t)\xi(t)dt, \mathrm{K}\right]\right\}S^{-1}(a,t)\eta(t)dt,$$

где подынтегральное выражение можно назвать аналогом оператора Якоби, действующего на векторы $\xi$ и $\eta$.

**Литература**

1. *Паланджянц Л.Ж.* Геометрия мультипликативного интеграла. Майкоп: МП «Качество», 1997.

## Variation of product integral

**L.Zh. Palandzhyants**

In this article variation of a product integral is considered. For of curvilinear product integral variational derivation is determined. Analogous of Euler–Lagrange and Hamiltons for variables $x$ and $\dot{x}$ are found.

 