1997 г. № 2

Труды ФОРА

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М.М. Шумафов

Адыгейский государственный университет, Майкоп

В статье построены функции Ляпунова для двумерных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито с постоянными коэффициентами. В качестве примера рассматривается линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, один из коэффициентов которого возмущается гауссовским белым шумом.

1.Введение. Хорошо известно, какую важную роль играют функции Ляпунова в теории устойчивости детерминированных систем. Метод функций Ляпунова (называемый еще прямым методом Ляпунова), предложенный в 1892 году русским математиком А.М. Ляпуновым для исследования общей задачи об устойчивости движения, оказался чрезвычайно общим и мощным. Функции Ляпунова позволяют установить не только факт устойчивости или неустойчивости исследуемой системы. С помощью функций Ляпунова можно решать, например, проблему существования или отсутствия периодических решений. Знание функции Ляпунова позволяет оценить также область притяжения в фазовом пространстве. Функции Ляпунова широко используются в теориях автоматического и оптимального управлений. Если подходящая функция Ляпунова найдена, то можно получить достаточно полную информацию о поведении рассматриваемой системы, например, установить ограниченность решений, диссипативность системы, конвергентность решений, различного рода оценки, как оценка времени протекания переходного процесса в системе автоматического управления, оценка изменения регулируемой величины, оценка влияния постоянно действующих возмущений и т.д.

Аппарат функции Ляпунова оказался очень удобным для анализа динамики ряда электротехнических и радиотехнических систем, систем автоматического регулирования при наличии различного рода нечувствительностей, механических систем с кулоновским трением и др. Функции Ляпунова определенного класса нашли широкое применение в теории абсолютной устойчивости. Именно, для построения функций Ляпунова вида "квадратичная форма" и "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности" были получены "частотные" критерии наличия того или иного типа устойчивости, которые в ряде случаев оказались неулучшаемыми в рамках рассматриваемого класса функций Ляпунова. Это направление исследования было наиболее последовательно и систематически развито в школе В.А. Якубовича. Далее, для анализа динамики фазовых систем - систем с цилиндрическим фазовым пространством (такие системы возникают в телевидении, радиолокации, космической радиоэлектронике, электромашиностроении) был разработан метод периодических функций Ляпунова. Изучение фазовых систем на основе метода построения периодических функций Ляпунова проводилось в основном в работах Г.А. Леонова.

Проблема упирается в построении подходящей функции Ляпунова для исследуемой системы в заданной области фазового пространства. До настоящего времени эта проблема построения удачной функции Ляпунова не решена. Имеется лишь некоторый набор приемов построения функций Ляпунова, дающих в ряде случаев положительный результат. Описанию таких приемов и методов построения функций Ляпунова посвящена книга российского математика Е.А. Барбашина "Функции Ляпунова" ("Наука", Москва, 1970). В общем построение подходящей функции Ляпунова остается делом искусства исследователя.

Метод функций Ляпунова нашел также широкое применение в стохастической теории дифференциальных уравнений. Первой монографией в мировой литературе, посвященной задачам исследования стохастических дифференциальных уравнений с применением прямого метода Ляпунова, была книга "Stochastic Stability and Control" (Academic Press, New-York-London,1967) (имеется русский перевод "Стохастическая теория и управление", Изд. "Мир", Москва, 1969) американского ученого Г.Дж. Кушнера (H.J. Kushner), одним из первых начавшего исследования в этом направлении. В своей книге Г.Дж. Кушнер переносит прямой метод Ляпунова на стохастический случай. Тем самым был сделан первый шаг в построении качественной теории стохастических дифференциальных уравнений. Вслед за книгой Г.Дж. Кушнера появилась и фундаментальная монография российского математика Р.З. Хасьминского "Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров" ("Наука", Москва, 1969), в которой рассматриваются задачи стохастической устойчивости с широким применением аппарата функций Ляпунова. Следует отметить также книгу И.И. Гихмана и А.В. Скорохода "Стохастические дифференциальные уравнения" ("Наукова думка", Киев, 1968), в которой рассмотрены также задачи качественной теории таких уравнений. Появление этих трех книг дало мощный толчок развитию теории стохастических систем.

Метод стохастических функций Ляпунова, изложенный в упомянутых выше первых двух книгах применяется к изучению качественных свойств марковских процессов и является своего рода стохастическим аналогом классического метода функций Ляпунова, применяемого к решению аналогичных детерминистических задач. Грубо говоря, стохастическая функция Ляпунова - это подходящим образом выбранная функция состояния случайного процесса, которая обладает в рассматриваемой окрестности определенными свойствами. С помощью таких функций можно обнаружить многие свойства выборочных траекторий. Трудность отыскания "хороших" функций Ляпунова остается и в стохастической теории.

2.Постановка задачи. Будем рассматривать двумерную линейную однородную систему дифференциальных уравнений, коэффициенты которой возмущены гауссовскими белыми шумами:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (a + e\dot{\xi}(t)x(t) + (b + f\dot{\xi}(t))y(t) \\ \dot{y}(t) = (c + g\dot{\xi}(t)x(t) + (d + h\dot{\xi}(t))y(t) \,. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь a,b,c,d,e,f,g,h -константы, $\dot{\xi}(t)$- случайный процесс типа "белого" шума единичной интенсивности, $x(t),y(t)$ -скалярные функции от t .Заметим, что (1)- не система обыкновенных дифференциальных уравнений (сходство тут обманчиво), поскольку $\dot{\xi}(t)$- не обычая функция. Точный смысл системам вида (1) и, вообще, системам общего вида

$$\dot{x} = f(x,t) + \sigma(x,t)\dot{\xi}(t), \quad x \in R^n \tag{2}$$

(f- n-мерный вектор, $\sigma(x,t)$- матрица, $\dot{\xi}(t)$- вектор, координаты. которого являются "белыми" шумами) придал японский математик К. Ито (K. Ito). Об этом будет сказано ниже. Для систем вида (1) мы строим функции Ляпунова в виде квадратичных форм и на основании построенных функций даем алгебраические критерии экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом, а также достаточные условия устойчивости по вероятности и асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (1).

В детерминированном случае, т.е. когда $e=f=g=h=0$, способ построения функций Ляпунова для систем вида (1) описан в [1]. Возможность его перенесения на стохастический случай отмечена в [2], где, в частности, доказана общая теорема о существовании функций Ляпунова для линейных стационарных стохастических систем в виде однородных форм четного порядка. В статье Г.Дж. Кушнера (H.J. Kushner) [3] с помощью стохастического аналога метода частного интегрирования построены функции Ляпунова для линейных и некоторых специальных нелинейных (степенного типа) стохастических дифференциальных уравнений 2-го порядка. В работе [3] конструкция

функций Ляпунова проводится с использованием формулы Дынкина (стохастического аналога формулы Ньютона-Лейбница)

$$V(x) - \boldsymbol{M}_x V(x_\tau) = -\boldsymbol{M}_x \int_0^\tau LV(x_t)dt$$

Здесь $\boldsymbol{M}_x$ - математическое ожидание, x_t - случайный процесс, x - начальное состояние процесса x_t, x_τ-значение x_t в случайный момент времени τ, L-производящий дифференциальный оператор процесса x_t. В [4] были обобщены результаты работы [3] и построены функции Ляпунова для некоторых классов нелинейных стохастических дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Польза от функций Ляпунова для линейных систем состоит в том, что, во-первых, они дают необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом, во-вторых, они являются (как правило) "опорными" при построении функций Ляпунова для весьма широких классов нелинейных систем, в третьих, они служат как бы "эталонными" функциями Ляпунова, позволяющими во многих случаях усмотреть ценность построенной функции Ляпунова для сложной нелинейной системы. Сказанное относится как к детерминистическим функциям Ляпунова, так и к стохастическим.

3. **Определение основных понятий и некоторые предварительные результаты.** Возникает вопрос: как следует понимать систему (1)? Что будем называть решением системы (1)? Чтобы дать ответы на эти вопросы напомним некоторые понятия из стохастического анализа (математического анализа, имеющего дело со случайными последовательностями, рядами, функциями и т.д.).

Определение 1. Случайной (действительной) величиной ξ называется измеримая функция $\xi(\omega)$, определенная в пространстве элементарных событий Ω и принимающая значения из **R,** т.е. это функция, принимающая свои значения в зависимости от "случая" $\omega \in \Omega$.

Определение 2. Математическим ожиданием случайной величины $\xi(\omega)$ называется интеграл

$$\boldsymbol{M}\xi = \int_\Omega \xi(\omega) P(d\omega)$$

при условии интегрируемости $|\xi(\omega)|$. Здесь Ω-пространство элементарных событий, а $P(\omega)$ - вероятностная мера, заданная на некоторой σ - алгебре подмножеств из Ω, называемых событиями. Семейство случайных величин $\xi(t,\omega)$, $\omega \in \Omega$, зависящих от параметра t, образует случайный процесс (случайную функцию).

Определение 3. Случайным процессом (случайной функцией), определенным на промежутке $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$ со значениями из **R,** называется измеримая функция $\xi(t,\omega)$ такая, что при каждом $t \in T$ $\xi(t,\omega)$ -случайная величина.

Функцию $\xi(t,\omega)$ при фиксированном ω называют траекторией случайного процесса.

Определение 4. Случайный процесс $\xi(t,\omega)$, $t \in T$ называется гауссовским, если его значения $\xi(t_1,\omega),\ldots,\xi(t_n,\omega)$ при любых $t_1,\ldots,t_n \in T$ в совокупности являются гауссовскими (нормальными) величинами.

Определение 5. Случайный процессом, белого шума $\xi(t,\omega)$, $t \in T$ будем называть гауссовский процесс, для которого

$$\boldsymbol{M}\xi(t,\omega) = 0, \qquad \forall t \in T \tag{3}$$

$$\boldsymbol{M}\left[\xi(s)\xi(t)\right] = \delta(t-s) \tag{4}$$

(Здесь δ - δ-функция Дирака)

Выражение, стоящее в левой части равенства (4) с учетом (3) называется корреляционной функцией. Равенство (3) означает, что среднее значение процесса $\xi(t)$ равно тождественно нулю. А равенство (4) можно интерпретировать как отсутствие у процесса $\xi(t)$ конечной памяти, т.е. значения шума $\xi(t)$, соответствующие моментам времени t_1 и t_2, таким что $|t_1 - t_2| > \varepsilon, \varepsilon > 0$-произвольно, практически являются некоррелированными, а значит, и (в силу гауссовости $\xi(t)$) независимыми. Строго говоря, процессов белого шума в природе не существует. Белый шум - это математическая идеализация шумов в реальных системах. Последние могут быть хорошо аппроксимированы белыми шумами.

Определение 6. Винеровским или броуновским случайным процессом $w(t) = w(t,\omega)$ называется случайный процесс, у которого

1) $w(0) = 0$;

2) на любом интервале (s,t] приращение $w(t) - w(s)$ является гауссовским с нулевым средним и дисперсией - линейной функцией от (t-s): $\boldsymbol{D} = \sigma^2(t-s), \sigma \in R$ (σ^2 называется коэффициентом диффузии), причем величина $w(t) - w(s)$ имеет такое же распределение вероятностей, что и $w(t-s)$;

3) для любых $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ приращения $w(t_1) - w(0), \ldots, w(t_n) - w(t_{n-1})$ являются независимыми.

Далее можно ввести понятие стохастического интеграла Ито по стохастической мере, порожденной винеровским процессом $w(t,\omega)$, и понятие стохастического дифференциала в смысле Ито. На основании последних даются понятия стохастического дифференциального уравнения и его решения. Наиболее простое и удобное построение теории стохастических дифференциальных уравнений дал К. Ито. Это построение достаточно полно изложено во многих книгах по теории случайных процессов (см., например, [5]). Краткие сведения о стохастических дифференциальных уравнениях содержатся и в [2]. Вернемся к системе (1) или к более общему виду (2). Запишем (2) в дифференциалах

$$dx(t) = f(x,t)dt + \sigma(x,t)d\xi(t) \tag{2'}$$

Определение 7. Стохастическим дифференциальным уравнением (2′) ((2)) называется уравнение, связывающее стохастические дифференциалы процесса $x(t,\omega) \in R^n$ и винеровских процессов $\xi_r(t)$ координат вектора $\xi(t)$.

По самому определению стохастического дифференциала определение 7 означает, что имеет место интегральное равенство

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau + \sum_{r=1}^{k} \int_{t_0}^{t} \sigma_r(\tau, x(\tau))d\xi_r(\tau), \quad t \in [t_0, T], \tag{5}$$

где $\sigma_r(t,x)$ - столбцы матрицы $\sigma(x,t)$.

Дадим теперь понятие решения уравнения (2′). Для этого нам необходимо ввести некоторый поток событий N_t, связанный с винеровским процессом $w(t)$.

Пусть $w(t,\omega)$ винеровский процесс, заданный на отрезке $[t_0, T]$ и определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, U, \boldsymbol{P})$, состоящем из Ω-пространства элементарных событий, $U - \sigma$-алгебры множеств, входящих в Ω, и $\boldsymbol{P}$- вероятностной меры, заданной на элементах U. Пусть N_t-семейство σ-алгебр множеств из U, связанных с винеровским процессом $w(t)$ таким образом, что:

1) $N_{t_1} \subset N_{t_2}$, если $t_1 < t_2; t_1, t_2 \in [t_0, T]$

2) $w(t) - N_t$ -измеримая случайная величина при каждом $t \in [t_0, T]$

3) приращение $w(t+\Delta t) - w(t)$ процесса $w(t)$ не зависит от любого события из N_t .

Определение 8. Решением уравнения (5) (эквивалентного уравнениям $(2')$ и (2)) на отрезке $[t_0, T]$ называется случайный процесс $x(t)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) при каждом фиксированном $t \in [t_0, T]$ случайная величина $x(t)$ N_t -измерима,

2) интегралы (стохастические) в (5) существуют,

3) равенство (5) справедливо при каждом $t \in [t_0, T]$ с вероятностью 1.

При выполнении некоторых условий (ограниченность и условие Липшица относительно вектор- функций $f(t,x)$, $\sigma_r(t,x)$) справедлива теорема существования и единственности (с точностью до эквивалентности) случайного процесса, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения (5) (см. [2],[5])

Определение 9. Производящим дифференциальным оператором процесса $x(t)$ называется оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} S_{ij}(t,x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} ,$$

где $f_i(t,x)$ - координаты вектора $f(t,x)$ в правой части уравнения $(2')$, а ($\sigma_{ik}(t,x)$ - компоненты матрицы $\sigma(t,x)$ в $(2')$)

$$S_{ij}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}(t,x) \sigma_{jk}(t,x),$$

т.е. $S_{ij}(t,x)$ элементы матрицы $S(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^{\mathrm{T}}(t,x)$ (T означает транспонирование; $S(t,x)$ называется матрицей диффузии).

Очевидно, что при $\sigma(t,x) \equiv 0$ (детерминистический случай) для любой функции $V(t,x) \in C^1$

$$LV(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sum_i f_i(t,x) \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i} = \dot{V}(t,x).$$

т.е. значение оператора L в классе функций C^1 совпадает с соответствующим значением оператора "производной в силу системы $(2')$".

Несколько грубо говоря, можно сказать, что стохастическая функция Ляпунова - это непрерывная положительно определенная функция $V(t,x)$, имеющая непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно в некоторой области $D \ni 0$ и удовлетворяющая условию: $LV(t,x) \le 0$ в D. В дальнейшем мы будем рассматривать функции Ляпунова, зависящие только от пространственного аргумента x.

Стохастические функции Ляпунова (как и детерминистические) находят применение в основном при решении проблемы устойчивости. Если подходящая функция Ляпунова построена, то она может дать ответ на вопросы различного рода устойчивости рассматриваемой системы. В этом состоит основная мотивация конструирования стохастических (и детерминистических) функций Ляпунова.

Уже в детерминированном случае имеется большое разнообразие того как понимать устойчивость тривиального решения $x(t) \equiv 0$ системы $(2')$ (так, различают устойчивость локальную и в целом, асимптотическую и не асимптотическую и т.д.). Еще большее разнообразие возникает в стохастической теории в силу наличия фактора "случайности". Из всего существующего многообразия определений стохастической устойчивости нулевого решения системы $(2')$ мы выделим лишь устойчивость по

вероятности, асимптотическую устойчивость в целом и экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом, представляющие наибольший практический интерес.

Пусть в системе $(2')$, записанной в виде,

$$dx(t) = f(x,t)dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(x,t)d\xi_r(t), \qquad (2'')$$

где $x(t)$, $f(x,t)$, $\sigma_r(x,t)$ - векторы из $\boldsymbol{R}^n$, а $\xi_r(t)$ - независимые винеровские процессы, коэффициенты $f(x,t)$, $\sigma_r(x,t)$ непрерывны по t и удовлетворяют условию Липшица по x в каждой ограниченной по x области. Ограничимся условиями устойчивости тривиального решения $x(t) \equiv 0$. Для этого предположим, что

$$f(0,t) \equiv 0, \qquad \sigma_r(0,t) \equiv 0, \quad r = 1,2,\ldots k$$

Решение уравнения $(2')$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ будем обозначать так: $x(t,\omega;t_0,x_0)$. Нижеследующие определения можно найти в [2] (см. также [6]).

Определение 10. Решение $x(t,\omega) = 0$ уравнения $(2')$ называется устойчивым по вероятности (при $t \geq 0$), если для любых t_0 *и* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x_0 \to 0} \mathrm{P}\left\{ \sup_{t > t_0} \left| x(t,\omega;t_0,x_0) \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Определение 10 означает, что траектория процесса $x(t,\omega;t_0,x_0)$, выходящая из точки x_0 в момент t_0, навсегда останется в любой заданной окрестности начала координат с вероятностью, стремящейся к единице, когда $x_0 \to 0$.

Определение 11. Решение $x(t,\omega) = 0$ уравнения $(2')$ называется асимптотически устойчивым по вероятности (при $t \geq 0$), если оно устойчиво по вероятности и, кроме того, справедливо соотношение

$$\lim_{x_0 \to 0} \mathrm{P}\left\{ \lim_{t \to +\infty} x(t,\omega;t_0,x_0) = 0 \right\} = 1.$$

Определение 12. Решение $x(t,\omega) \equiv 0$ уравнения $(2')$ называется (асимптотически) устойчивым в целом, если оно устойчиво по вероятности и, кроме того, для всех t_0 и x_0

$$\mathrm{P}\left\{ \lim_{t \to +\infty} x(t,\omega;t_0,x_0) = 0 \right\} = 1.$$

Определение 13. Решение $x(t,\omega) \equiv 0$ уравнения $(2')$ называется экспоненциально устойчивым в среднем квадратическом, если существуют такие положительные константы A и α, что

$$\boldsymbol{M}\left| x(t,\omega;t_0,x_0 \right|^2 \leq \mathrm{A}\left| x_0 \right|^2 \exp\left\{ -\alpha(t - t_0) \right\}.$$

Приведем некоторые теоремы из теории стохастической устойчивости, мотивирующие необходимость построения стохастических функций Ляпунова.

Теорема A[2]. *Пусть в области U, содержащей начало координат x=0, существует положительно-определенная дважды непрерывно дифференцируемая функция V(x), удовлетворяющая при* $x \neq 0$ *условию*

$$LV(x) \leq 0.$$

Тогда тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ *уравнения* $(2')$ *устойчиво по вероятности.*

Теорема B[6]. *Пусть функция V(x) в области* $U \ni 0$ *является положительно определенной и дважды непрерывно дифференцируемой, и пусть для некоторой непрерывной функции* $W(x) \geq 0$

$$LV(x) = -W(X) \leq 0.$$

Положим

$$Q_m = \{x : V(x) < m\}$$

$$N_m = \{x : W(x) = 0\} \cap Q_m .$$

Пусть $\overline{Q}_m \subset U$. *Тогда для любого* $\lambda \in (0, m]$ *и начального условия* $x_0 \in Q_m$

$$\boldsymbol{P}\left\{ \sup_{0 \le t < +\infty} V(x(t,\omega)) \ge \lambda \right\} \le \frac{V(x_0)}{\lambda}$$

и $x(t,\omega) \to N_m$ *с вероятностью* $1 - \dfrac{V(x_0)}{\lambda}$.

Теорема C[2]. *Для того, чтобы нулевое решение* $x(t) \equiv 0$ *уравнения* $(2')$ *было асимптотически устойчивым в целом, достаточно, чтобы существовала положительно-определенная дважды непрерывно дифференцируемая функция V(x) такая, что функция LV(x) отрицательно определена, причем*

$$\lim_{|x| \to \infty} V(x) \to +\infty .$$

Теорема C обобщает известную теорему Барбашина-Красовского (в ее частном виде) на стохастические уравнения.

Частным случаем системы $(2'')$ является следующая линейная стационарная система

$$dx(t) = Axdt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r x d\xi_r(t), \tag{S}$$

где A и σ_r - постоянные $(n \times n)$-матрицы.

Теорема D[2]. *Для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом системы* (S) *необходимо и достаточно, чтобы для какой-нибудь положительно-определенной квадратичной формы W(x) существовала положительно-определенная квадратичная форма V(x), удовлетворяющая условию*

$$LV(x) = -W(x) .$$

4. Построение стохастических функций Ляпунова для системы (1)

Будем понимать (1) как систему стохастических уравнений в смысле Ито

$$\begin{cases} dx(t) = (ax(t) + by(t))dt + (ex(t) + fy(t))d\xi(t) \\ dy(t) = (cx(t) + dy(t))dt + (gx(t) + hy(t))d\xi(t) \end{cases}, \tag{1'}$$

где a, b, c, d, e, f, g, h -постоянные, а $\xi(t)$ -винеровский процесс, $x(t) = x(t,\omega)$, $y(t) = y(t,\omega)$ - скалярные случайные процессы.

Производящий дифференциальный оператор L процесса $(x(t), y(t))$ для системы $(1')$ имеет следующий вид (см. определение 9)

$$L = (ax + by)\frac{\partial}{\partial x} + (cx + dy)\frac{\partial}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{ (ex + fy)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(ex + fy)(gx + hy)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (gx + hy)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\}$$

Для системы $(1')$ будем строить стохастические функции Ляпунова в виде квадратичных форм. Ограничимся случаями, когда один из элементов матрицы

$$\sigma = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

отличен от нуля, а остальные - нули, и, когда какие-то два элемента матрицы σ не равны нулю, а остальные равны нулю.

4.1. *Один из элементов матрицы σ отличен от нуля, а остальные равны нулю.*

Из всех четырех возможных случаев достаточно рассмотреть случаи $e \neq 0, f = g = h = 0$ и $f \neq 0, e = g = h = 0$. Остальные два случая легко сводятся к ним.

1) *Случай* $e \neq 0, f = g = h = 0$.

Зададимся положительно определенной квадратичной формой

$$W(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2, \quad \alpha, \ \beta, \ \gamma \in \boldsymbol{R}$$

и попытаемся найти такую квадратичную форму

$$V(x,y) = \mu x^2 + 2\omega xy + \nu y^2, \quad \mu, \ \omega, \ \nu \in \boldsymbol{R}$$

чтобы выполнялось равенство

$$LV(x,y) = -W(x,y), \tag{R}$$

где L-производящий дифференциальный оператор процесса $(x(t), y(t))$, определяемого системой (1′) (где $e \neq 0, f = g = h = 0$).

Имеем

$$LV = 2(ax+by)(\mu x + \omega y) + 2(cx+dy)(\omega x + \nu y) + \mu e^2 x^2 =$$
$$= [(2a+e^2)\mu + 2c\omega]x^2 + 2[b\mu + (a+d)\omega + c\nu]xy + [2b\omega + 2d\nu]y^2.$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, xy и y^2 в левой и правой частях равенства (R), получим систему линейных уравнений относительно μ, ω и ν.

$$\begin{cases} (2a+e^2)\mu + 2c\omega = -\alpha \\ b\mu + (a+d)\omega + c\nu = -\beta \\ 2b\omega + 2d\nu = -\gamma. \end{cases} \tag{6}$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a+e^2 & 2c & 0 \\ b & a+d & c \\ 0 & 2b & 2d \end{vmatrix} = 2e^2(d^2 + ad - bc) + 4(a+d)(ad - bc)$$

Полагая $\beta = 0$ и решая систему (6) по правилу Крамера, получим

$$\mu = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad \omega = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \nu = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{Q}$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\alpha & 2c & 0 \\ 0 & a+d & c \\ -\gamma & 2b & 2d \end{vmatrix} = -2[d^2 + (ad - ba)]\alpha - 2c^2\gamma,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^2+2a & -\alpha & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & -\gamma & 2d \end{vmatrix} = 2bd\alpha + c(2a+e^2)\gamma,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} e^2+2a & 2c & -\alpha \\ b & a+d & 0 \\ 0 & 2b & -\gamma \end{vmatrix} = -2b^2\alpha - [(2a+e^2)(a+d)-2bc]\gamma.$$

Выбрав теперь $\alpha = -\Delta$, $\gamma = -\Delta$, получим

$$\begin{aligned} \mu &= 2(d^2+ad-bc)+2c^2 = 2(c^2+d^2)+2(ad-bc); \\ \omega &= -2bd - c(2a+e^2) = -[2(ac+bd)+ce^2]; \\ \nu &= (a+d)(2a+e^2)+2b^2-2bc = 2(a^2+b^2)+e^2(a+d)+2(ad-bc). \end{aligned} \tag{7}$$

Итак, мы нашли форму

$$V(x,y) = \mu x^2 + 2\omega xy + \nu y^2 ,$$

коэффициенты μ, ω и ν которой вычисляются по формулам (7), причем

$$LV(x,y) = \Delta(x^2+y^2), \tag{8}$$

где

$$\Delta = 2e^2[d^2+(ad-bc)]+4(a+d)(ad-bc).$$

Форму $V(x,y)$ можно представить в следующем виде

$$V(x,y) = x^2\begin{vmatrix} 1 & 2c & 0 \\ 0 & a+d & c \\ 1 & 2b & 2d \end{vmatrix} + 2xy\begin{vmatrix} 2a+e^2 & 1 & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & 1 & 2d \end{vmatrix} + y^2\begin{vmatrix} 2a+e^2 & 2c & 1 \\ b & a+d & 0 \\ 0 & 2b & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & x^2 & 2xy & y^2 \\ 1 & 2a+e^2 & 2c & 0 \\ 0 & b & a+d & c \\ 1 & 0 & 2b & 2d \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Форма (9) и есть стохастическая функция Ляпунова для системы (1′), где $e \neq 0, f = g = h = 0$, если параметры a,b,c,d,e удовлетворяют определенным условиям.

Из (8) видно, что если $\Delta < 0$, то $LV(x,y)$ будет отрицательно определенной формой.

В силу теоремы D (см. выше) система (1′), где $e \neq 0, f = g = h = 0$, будет экспоненциально устойчивой в среднем квадратическом тогда и только тогда, когда форма $V(x)$ положительно-определенная.

Воспользовавшись критерием Сильвестра положительной определенности квадратичных форм, получаем, что условия

$$e^2[d^2+(ad-bc)] < 2(a+d)(bc-ad) \tag{10}$$

$$c^2+d^2+(ad-bc) > 0 \tag{11}$$

$$4\left[(c^2+d^2)+(ad-bc)\right]\left[(a^2+b^2)+(ad-bc)+e^2\frac{a+d}{2}\right] > \left[2(ac+bd)+ce^2\right]^2 \tag{12}$$

дают необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом (нулевого решения) системы $(1'_e)$.

Так как при $e=0$ мы имеем детерминированную линейную систему, то условия (10)-(12) должны содержать условия Рауза-Гурвица

$$a+d<0,\ ad-bc>0 \tag{13}$$

являющиеся необходимыми и достаточными для асимптотической устойчивости в целом соответствующей системе $(1')$ детерминированной линейной системы. Таким образом, условия (13) необходимы для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом системы $(1')$. Тогда условие (11) является следствием (13) и его можно опустить. В результате получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом стохастической системы Ито*

$$\begin{cases} dx(t) = (ax(t) + by(t))dt + ex(t)d\xi_t(t) \\ dy(t) = (cx(t) + dy(t))dt \end{cases} \tag{$1'_e$}$$

необходимо и достаточно выполнение условий ((12') равносильно (12)):

$$\begin{aligned} &1)\ a+d<0,\quad ad-bc>0 && (13)\\ &2)\ 2(a+d)(bc-ad) > e^2[d^2+(ad-bc)] && (10)\\ &3)\ 8(ad-bc)^2+4(ad-bc)(a^2+b^2+c^2+d^2) > c^2e^4+2[2c(ac+bd)- \\ &-(a+d)(a^2+d^2+ad-bc)]e^2 && (12') \end{aligned}$$

Замечание. В детерминированном случае ($e=0$) условия (10),(12'),(13) эквивалентны условиям Рауза-Гурвица (13).

Представляет интерес задача нахождения "бифуркационного" значения интенсивности e шума $e\,\dot{\xi}(t)$, т.е. такого значения, при котором система $(1'_e)$ впервые становится неустойчивой в среднем квадратическом. Таким образом, необходимо найти такое значение e_0, что при $e<e_0$ системы $(1'_e)$ устойчива в среднем квадратическом, а при $e>e_0$ неустойчива. Для этого введем следующую функцию

$$F(e) = Ae^4 + 2Be^2 + C,$$

где

$$\left.\begin{aligned} A &= -c^2 \\ B &= (a+d)(c^2+d^2)+(a+d)(ad-bc)-2c(ac+bd) \\ C &= 8(ad-bc)^2+4(ad-bc)(a^2+b^2+c^2+d^2) \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Ясно, что неравенство $F(e)>0$ эквивалентно $(12')$. В силу (13) $F(0)=C>0$. Найдем наименьший положительный корень e_* уравнения $F(e)=0$ (биквадратного относительно e). Простые выкладки показывают, что (при условии, что $c\neq 0$)

$$e_*^2 = \frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{C^2}. \qquad (c\neq 0)$$

С учетом условия (10) получаем следующее бифуркационное значение e_0 шума в случае $c\neq 0$:

$$e_0^2 = \min\left\{\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{C^2},\ \frac{2(a+d)(bc-ad)}{d^2+(ad-bc)}\right\}, \qquad (K_1).$$

где A, B, C выражаются через a, b, c, d по формулам (14).

При $c=0$ имеем

$A=0, \quad B=(a+d)(d^2+ad)<0, \quad C=8(ad)^2+4ad(a^2+b^2+d^2)>0,$

так как $a+d<0$, $ad>0$ (см. (13)). Неравенство (12) принимает вид

$$2Be^2+C>0.$$

Из последнего неравенства и (10) получаем "бифуркационное" значение в случае $c=0$ ($d \neq 0$, так как в противном случае не будет выполнено (12)):

$$e_0^2=\min\left\{\frac{8(ad)^2+4ad(a^2+b^2+d^2)}{-2(a+d)(d^2+ad)}, \quad \frac{-2ad(a+d)}{d^2+ad}\right\}. \qquad (K_2)$$

Теорема С позволяет сформулировать следующее утверждение, касающееся устойчивости в целом.

Теорема 2. *Для асимптотической устойчивости в целом (нулевого решения) системы* $(1'_c)$ *достаточно выполнения неравенств* (10), (12), (13).

Замечание. Выражения (K_1) и (K_2) дают также соответственно для случаев $c \neq 0$ и $c=0$ нижнюю границу "бифуркационного" значения e_0^2 для асимптотической устойчивости в целом системы $(1'_c)$.

Найдем теперь функцию Ляпунова V, удовлетворяющую

или a) условию

$$LV=-\gamma\, y^2, \qquad (15)$$

или b) условию

$$LV=-\alpha\, x^2. \qquad (16)$$

Воспользуемся формулами (Q). Полагая для случая a) $\alpha=0, \gamma=-\Delta$, для случая b) $-\gamma=0, \alpha=-\Delta$, получим соответствующие стохастические функции Ляпунова для системы $(1'_c)$:

$$V(x,y)=2c^2x^2-2c(2a+e^2)xy+[(a+d)(2a+e^2)-2bc]y^2 \qquad (17)$$

$$V(x,y)=2(d^2+ad-bc)x^2-4bdxy+2b^2y^2. \qquad (18)$$

Условия положительной определенности форм (17) и (18) после упрощений принимают соответственно вид

$$4(ad-bc)>e^4+2(a-d)e^2 \qquad (17')$$

$$ad-bc>0 \qquad (18')$$

Как было выше сказано, условия Рауза-Гурвица (13) необходимы для вопросов устойчивости. Поэтому мы будем считать выполненными условия (13). Тогда функция (18) будет положительно определенной. А для (17) требуется еще дополнительное условие $(17')$. Поэтому функция (18) предпочтительнее для использования в вопросах стохастической устойчивости. Используя функцию (18), с помощью теорем А и В мы получим следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть для системы* $(1'_c)$ *выполнены условия Рауза-Гурвица (13) и условие (10). Тогда тривиальное решение* ($x(t)\equiv 0, y(t)\equiv 0$) *системы* $(1'_c)$ *устойчиво по вероятности.*

Кроме того, для любого $0<\lambda\le m$ *и начального условия* $(x_0,y_0)\in\{(x,y):V(x,y)<m\}=Q_m$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\le t<+\infty} V(x(t,\omega),y(t,\omega))\ge\lambda\right\}\le\frac{V(x_0,y_0)}{\lambda},$$

и $(x(t,\omega),y(t,\omega))\to\{(x,y):x=0\}\cap Q_m$ *при* $t\to+\infty$ *с вероятностью не меньшей* $1-\dfrac{V(x_0,y_0)}{\lambda}$.

2) *Случай* $f\ne 0,\quad e=g=h=0$.

Как и в случае 1) задаемся некоторой положительно-определенной квадратичной формой *W(x,y)* и ищем квадратичную форму *V(x,y)*, удовлетворяющую соотношению (R). Имеем

$$LV=2(ax+by)(\mu x+\omega y)+2(cx+dy)(\omega x+\nu y)+\mu f^2y^2=$$
$$=(2a\mu+2c\omega)x^2+2[b\mu+(a+d)\omega+c\nu]xy+(f^2\mu+2b\omega+2d\nu)y^2.$$

Линейная система, определяющая коэффициенты μ,ω *и* ν, выглядит так:

$$\begin{cases}2a\mu+2c\omega=-\alpha\\ b\mu+(a+d)\omega+c\nu=-\beta\\ f^2\mu+2b\omega+2d\nu=-\gamma\end{cases}\tag{19}$$

Положим $\beta=0$. Решая (19), получим формулы (Q), где

$$\Delta=2c^2f^2+4(a+d)(ad-bc)$$
$$\Delta_1=-2[d^2+(ad-bc)]\alpha-2c^2\gamma$$
$$\Delta_2=(2bd-cf^2)\alpha+2ac\gamma$$
$$\Delta_3=-[2b^2-(a+d)f^2]\alpha-2[a^2+(ad-bc)]\gamma.$$

Взяв $\alpha:=-\Delta,\quad\gamma:=-\Delta$, получим

$$\mu=2[d^2+(ad-bc)]+2c^2;$$
$$\omega=-(2bd-cf^2)-2ac;$$
$$\nu=2(a^2+b^2)+2(ad-bc)-f^2(a+d).$$

Найденную функцию *V(x,y)*, как и в случае 1), можно представить в виде

$$V(x,y)=-\begin{vmatrix}0 & x^2 & 2xy & y^2\\ 1 & 2a & 2c & 0\\ 0 & b & a+d & c\\ 1 & f^2 & 2b & 2d\end{vmatrix}.\tag{20}$$

Форма (20) удовлетворяет уравнению

$$LV=\Delta(x^2+y^2),\ \text{где}\ \Delta=2c^2f^2+4(a+d)(ad-bc).$$

Функция (20) есть стохастическая функция Ляпунова для системы (1′), где $f\ne 0,\quad e=g=h=0$.

Требуя, чтобы $\Delta<0$, получаем, что необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом системы (1′) ($f\ne 0,\quad e=g=h=0$) совпадают с условиями положительной -определенности формы V(*x*,y), определяемой (20).

Констатируя так же как и в случае 1) необходимость условий Рауза-Гурвица (13) для устойчивости системы (1′) ($f \neq 0$, $e = g = h = 0$) и используя (20), получаем на основании теоремы D следующее утверждение.

Теорема 4. *Стохастическая система Ито*

$$\begin{cases} dx(t) = (ax(t) + by(t))dt + fy(t)d\xi(t) \\ dy(t) = (cx(t) + dy(t))dt \end{cases} \qquad (1'_f)$$

экспоненциально устойчива в среднем квадратическом тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $a + d < 0, \quad ad - bc > 0;$ (13).

2) $2(a+d)(bc - ad) > c^2 f^2$ (21).

3) $8(ad - bc)^2 + 4(ad - bc)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) > c^2 f^4 - 2[2c(ac + bd) -$ (22).
$-(a+d)(c^2 + d^2 + ad - bc)]f^2$

Замечание. В детерминированном случае (*f=0*) условия (13), (21), (22) эквивалентны условиям Рауза-Гурвица (13).

Найдем "бифуркационное" значение f_0 интенсивности f шума $f\dot{\xi}(t)$ для системы $(1'_f)$. Введя функцию

$\Phi(f) := Af^4 - 2Bf^2 + C$,

где *A, B, C* определяются по формулам (14), убеждаемся, что неравенство $\Phi(f) > 0$ эквивалентно условию (22). Поступая аналогично как и для нахождения "бифуркационного" значения e_0^2, получаем:

$$f_0^2 = \min\left\{\frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{c^2}, \quad \frac{2(a+d)(bc - ad)}{c^2}\right\}, \qquad (K_3)$$

если $c \neq 0$. Если же c=0, то условия (21), (22) справедливы всегда при любом значении f, если выполнены неравенства Рауза-Гурвица (13). Мы получили следующий результат:

Теорема 5. *Стохастическая система* $(1'_f)$ *при c=0 экспоненциально устойчива в среднем квадратическом тогда и только тогда, когда соответствующая детерминированная система* $(1'_0)$ *асимптотически устойчива в целом.*

Используя теорему C и функцию (20), получаем утверждение об устойчивости в целом системы $(1'_f)$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (13), (21), (22). *Тогда нулевое решение системы* $(1'_f)$ *асимптотически устойчиво в целом.*

Замечание. Выражение (K_3) дает также нижнюю границу "бифуркационного" значения f_0^2 для асимптотической устойчивости в целом системы $(1'_f)$.

Теперь посмотрим, как выглядят для $(1'_f)$ стохастические функции Ляпунова, удовлетворяющие условиям (15) или (16). Поступая так же как и для системы $(1'_e)$, получаем соответственно

$$V(x,y) = 2c^2x^2 - 4acxy + 2[a^2 + (ad - bc)]y^2 \qquad (23)$$

$$V(x,y) = 2[d^2 + (ad - bc)]x^2 - 2(2bd - cf^2)xy + [2b^2 - (a+d)f^2]y^2 \qquad (24)$$

Функция Ляпунова (23) предпочтительнее, чем (24). Это становится ясным, если выписать условия положительной определенности форм (23) и (24). Последние имеют соответственно вид:

$$c \neq 0, \quad ad - bc > 0$$

$$4b^2(ad - bc) > c^2 f^4 + [2d^2(a+d) + 2(a+d)(ad - bc) - 4bcd]f^2$$

Используя функцию (23), на основании теорем А и В, получаем следующее предложение.

Теорема 7. *Пусть для стохастической системы* $(1'_f)$ *выполняются условия Рауза-Гурвица* (13) *и условие* (21).

Тогда нулевое решение системы $(1'_f)$ *устойчиво по вероятности.*

Более того, для $\forall \lambda \in (0, m]$ *и любого начального условия* $(x_0, y_0) \in \{(x,y): V(x,y) < m\} = Q_m$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \le t < +\infty} V(x(t,\omega), y(t,\omega)) \ge \lambda\right\} \le \frac{V(x_0, y_0)}{\lambda},$$

и $(x(t,\omega), y(t,\omega)) \to \{(x,y): y = 0\} \cap Q_m$ при $t \to +\infty$ с вероятностью не меньшей $1 - \dfrac{V(x_0, y_0)}{\lambda}$.

3) *Случай* $g \neq 0$, $e = f = h = 0$ (сводится к случаю 2)). Стохастическая функция Ляпунова для соответствующей системы $(1'_g)$ имеет вид

$$V(x,y) = -\begin{vmatrix} 0 & y^2 & 2xy & x^2 \\ 1 & 2d & 2b & 0 \\ 0 & c & a+d & b \\ 1 & g^2 & 2c & 2a \end{vmatrix}, \tag{25}$$

причем (25) удовлетворяет уравнению

$$LV = \Delta(x^2 + y^2), \tag{26}$$

где $\Delta = 4(a+d)(ad - bc) + 2b^2 g^2$.

4) *Случай* $h \neq 0$, $e = f = g = 0$ (сводится к случаю 1)). Соответствующая функция Ляпунова имеет вид:

$$V(x,y) = -\begin{vmatrix} 0 & y^2 & 2xy & x^2 \\ 1 & 2d + h^2 & 2b & 0 \\ 0 & c & a+d & b \\ 1 & 0 & 2c & 2a \end{vmatrix}. \tag{27}$$

Для (27) выполняется равенство (26), где

$$\Delta = 4(a+d)(ad - bc) + 2h^2[a^2 + (ad - bc)].$$

4.2. *Два каких-то элемента матрицы* σ *"случайной" части системы (1') отличны от нуля, а остальные равны нулю.* Из всех шести возможных случаев достаточно рассмотреть четыре случая.

1) $e \neq 0$, $f \neq 0$; $g = h = 0$
2) $e \neq 0$, $g \neq 0$; $f = h = 0$
3) $e \neq 0$, $h \neq 0$; $f = g = 0$
4) $f \neq 0$, $g \neq 0$; $e = h = 0$

Оставшиеся два случая легко сводятся к рассматриваемым.

1) *Случай* $e \neq 0, \quad f \neq 0; \quad g = h = 0$.

Рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{cases} dx(t) = (ax(t) + by(t))dt + ex(t)d\xi(t) + fy(t)d\xi(t) \\ dy(t) = (cx(t) + dy(t))dt \end{cases} . \qquad (1'_{ef})$$

Задаваясь положительно определенной квадратичной формой $W(x,y) = \alpha\, x^2 + 2\beta\, xy + \gamma\, y^2$ ищем квадратичную форму $V(x,y) = \mu\, x^2 + 2\omega\, xy + \nu\, y^2$, удовлетворяющую соотношению (R): $LV = -W$, где L-производящий дифференциальный оператор процесса $\big(x(t), y(t)\big)$, определяемого системой $(1'_{ef})$. Имеем:

$$LV = 2(ax + by)(\mu\, x + \omega\, y) + 2(cx + dy)(\omega\, x + \nu\, y) + \frac{1}{2}[2\mu\,(ex + fy)^2] =$$
$$= [(2a + e^2)\mu + 2c\omega\,]x^2 + 2[(b + ef)\mu + (a + d)\omega + c\nu\,]xy +$$
$$+ [\,f^2\mu + 2b\omega + 2d\nu\,]y^2 .$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, xy и y^2 в левой и правой частях уравнения (R), получаем линейную систему относительно неизвестных коэффициентов μ, ω и ν:

$$\begin{cases} (2a + e^2)\mu + 2c\omega = -\alpha \\ (b + ef)\mu + (a + d)\omega + c\nu = -\beta \\ f^2\mu + 2b\omega + 2d\nu = -\gamma \end{cases} .$$

Положив $\beta = 0$ и решая последнюю систему, получаем:

$$\mu = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ \omega = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \nu = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta = 4(a + d)(ad - bc) + 2c^2 f^2 + 2e^2\big[d^2 + (ad - bc)\big] - 4cdef$$
$$\Delta_1 = -2\big[d^2 + (ad - bc)\big]\alpha - 2c^2\gamma$$
$$\Delta_2 = (2bd + 2def - cf^2)\alpha + c(2a + e^2)\gamma$$
$$\Delta_3 = -\big[2b^2 + f^2(a + d) - 2bef\big]\alpha - \big[2a^2 + 2(ad - bc) + e^2(a + d) - 2cef\big]\gamma .$$

Полагая $\alpha := -\Delta$, $\gamma := -\Delta$, получим

$$\mu = 2(c^2 + d^2) + 2(ad - bc)$$
$$\omega = -(2bd + 2def - cf^2) - c(2a + e^2)$$
$$\nu = 2(a^2 + b^2) + 2(ad - bc) + (a + d)(e^2 + f^2) - 2ef(b + c) .$$

Найденную функцию $V(x,y)$ можно записать в виде

$$V(x,y) = -\begin{vmatrix} 0 & x^2 & 2xy & y^2 \\ 1 & 2a + e^2 & 2c & 0 \\ 0 & b + ef & a + d & c \\ 1 & f^2 & 2b & 2d \end{vmatrix} , \qquad (28)$$

причем функция (28) удовлетворяет уравнению

$$LV = \Delta(x^2 + y^2) .$$

В целях простоты будем дальше считать $f = e$, т.е. что интенсивности "белых" шумов, действующих на коэффициенты a и b, равны. Требуя $\Delta < 0$ и записывая условия положительной определенности формы $V(x,y)$ с помощью критерия Сильвестра с учетом теоремы D получаем утверждение об экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом системы $(1'_{ef})$ при $f = e$.

Теорема 8. *Для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом системы* $(1'_{ef})$ $(f = e)$ *необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:*

1) $a + d < 0$, $ad - bc > 0$ (13)

2) $2(a+d)(bc-ad) > \left[(ad-bc)+(c-d)^2\right]e^2$ (29)

3) $2(ad-bc)^2 + (ad-bc)(a^2+b^2+c^2+d^2) >$

$> d^2e^4 + \left[2d(ac+bd) - (a+d)(c^2+d^2+ad-bc) +\right.$

$\left. + (b+c)(c^2+d^2+ad-bc)\right]e^2$ (30)

Замечание. В детерминированном случае $(e = f = 0)$ условия (13), (29), (30) эквивалентны условиям Рауза-Гурвица (13).

Из (29) и (30) легко выводится выражение для "бифуркационного" значения e_0 интенсивности "белого" шума (при условии, что $d \neq 0$):

$$e_0^2 = \min\left\{\frac{2(a+d)(bc-ad)}{(ad-bc)+(c-d)^2};\quad \frac{-B+\sqrt{B^2+4d^2C}}{2d^2}\right\}, \qquad (K_4)$$

где

$$B = 2d(ac+bd) - (a+d)(c^2+d^2+ad-bc) + (b+c)(c^2+d^2+ad-bc)$$

$$C = 2(ad-bc)^2 + (ad-bc)(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

Если $d = 0$, $a \neq b + c$, то

$$e_0^2 = \min\left\{\frac{2abc}{c^2-bc},\quad \frac{2b^2c^2 - bc(a^2+b^2+c^2)}{(c^2-bc)(b+c-a)}\right\}. \qquad (K_5)$$

Если $d = 0$, $a = b + c$, то $B = 0$ и условие (30) выполняется при любом значении e. Поэтому в этом случае

$$e_0^2 = \frac{2abc}{c^2-bc}. \qquad (K_6)$$

Имеет место аналогичная теоремам 2 и 6.

Теорема 9. *Если выполняются неравенства* (13), (29), (30), *то нулевое решение системы* $(1'_{ee})$ $(f = e)$ *асимптотически устойчиво в целом.*

Замечание. Выражения $(K_4)-(K_6)$ дают соответственно нижние границы "бифуркационного" значения e_0^2 для устойчивости в целом системы $(1'_{ef})$ $(f = e)$.

Далее, стохастические функции Ляпунова для $(1'_{ee})$, удовлетворяющие соотношениям $LV = \Delta y^2$ и $LV = \Delta x^2$ выглядят соответственно так:

$$V(x,y) = 2c^2x^2 - 2c(2a+e^2)xy + \left[2a^2 + 2(ad-bc) + e^2(a+d-2c)\right]y^2 \qquad (31)$$

$$V(x,y) = 2\left[d^2 + (ad-bc)\right]x^2 - 2\left[2bd + (2d-c)e^2\right]xy + \left[2b^2 + e^2(a+d-2b)\right]y^2. \qquad (32)$$

Условия положительной определенности форм (31) и (32) имеют соответственно вид:

$$c \neq 0, \quad 4(ad-bc) > e^4 + (a-d+2c)e^2 \tag{33}$$

$$\begin{aligned} &4b^2(ad-bc) > (2d-c)^2 e^4 + \\ &+\left[12bd^2 - 4bcd - 2d^2(a+d) - 2(a+d)(ad-bc) + 4b(ad-bc)\right]e^2 \end{aligned} \tag{34}$$

Условие (33) проще, чем (34), поэтому воспользуемся функцией Ляпунова (31) для формулировки теоремы об устойчивости по вероятности. С помощью теорем А и В получаем:

Теорема 10. *Пусть для стохастической системы* $(1'_{ef})$ $(f = e)$ *выполнены условия Рауза-Гурвица (13), условия* (29), (33) *и* $c \neq 0$. *Тогда тривиальное решение* $(x(t) \equiv 0, \quad y(t) \equiv 0)$ *системы* $(1'_{ef})$ $(f = e)$ *устойчиво по вероятности.*

Далее, имеет место утверждение аналогичное утверждению второй части теоремы 7.

2) *Случай* $e \neq 0, \quad g \neq 0, \quad f = h = 0$

Система $(1')$ имеет вид:

$$\begin{cases} dx(t) = (ax(t) + by(t))dt + ex(t)d\xi(t) \\ dy(t) = (cx(t) + dy(t))dt + gx(t)d\xi(t) \end{cases} . \tag{$1'_{eg}$}$$

Ищем форму $V(x,y) = \mu x^2 + 2\omega xy + \nu y^2$, удовлетворяющую уравнению

$$LV = -W(x,y) ,$$

где $W(x) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \nu y^2$ - заданная форма.

Имеем

$$\begin{aligned} LV &= (ax+by)(2\mu x + 2\omega y) + (cx+dy)(2\omega x + 2\nu y) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[2\mu e^2 x^2 + 4\omega exgx + 2\nu g^2 x^2\right] = \left[(2a+e^2)\mu + 2(c+eg)\omega + g^2\nu\right]x^2 + \\ &+ 2\left[b\mu + (a+d)\omega + c\nu\right]xy + \left[2b\omega + 2d\nu\right]y^2 . \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, xy, y^2 в равенстве $LV = -W$, получаем:

$$\begin{cases} (2a+e^2)\mu + 2(c+eg)\omega + g^2\nu = -\alpha \\ b\mu + (a+d)\omega + c\nu = -\beta \\ 2b\omega + 2d\nu = -\gamma \end{cases} .$$

Как и в случае 1) полагая $\beta = 0$, имеем:

$$\mu = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \omega = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \nu = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(a+d)(ad-bc) + 2\left[d^2 + (ad-bc)\right]e^2 + 2(bg-2de)bg \\ \Delta_1 &= -2\left[d^2 + (ad-bc)\right]\alpha - \left[2c^2 + 2ceg - (a+d)g^2\right]\gamma \\ \Delta_2 &= 2bd\alpha + (2ac + ce^2 - bg^2)\gamma \quad . \\ \Delta_3 &= -2b^2\alpha - \left[2a^2 + 2(ad-bc) + (a+d)e^2 - 2beg\right]\gamma \end{aligned}$$

Положив $\alpha = \gamma = -\Delta$, получим

$$V(x,y) = -\begin{vmatrix} 0 & x^2 & 2xy & y^2 \\ 1 & 2a+e^2 & 2(c+eg) & g^2 \\ 0 & b & a+d & c \\ 1 & 0 & 2b & 2d \end{vmatrix} . \tag{35}$$

Форма (35) есть стохастическая функция Ляпунова системы $(1'_{eg})$, удовлетворяющая соотношению

$$LV = -\Delta(x^2 + y^2).$$

Как и в случае 1) в целях упрощения будем дальше считать $g = e$. Используя функцию (35), с помощью теоремы D получаем следующее предложение.

Теорема 11. *Стохастическая система* $(1'_{eg})$ $(g = e)$ *экспоненциально устойчива в среднем квадратическом тогда и только тогда, когда выполнены следующие неравенства:*

1) $a + d < 0$, $ad - bc > 0$ (13)

2) $2(a+d)(bc-ad) > \left[d^2 + (ad-bc) + 2b(b-2d)\right]e^2$ (36)

3) $2\left[c^2 + d^2 + (ad-bc)\right] > (a+d-2c)e^2$ (37)

4) $8(ad-bc)^2 + 4(ad-bc)(a^2+b^2+c^2+d^2) > \left[(b+c)-(a+d)\right]^2 e^4 +$
$+ \{4(b-c)(ac+bd) - 4c\left[(a^2+b^2)+(ad-bc)\right] + 4b\left[(c^2+d^2)+(ad-bc)\right] +$
$+ 2(a+d)(a^2+b^2-c^2-d^2)\}e^2$ (38)

Замечание 1. В детерминированном случае $(e = g = 0)$ условия (13), (36)-(38) превращаются в условия Рауза-Гурвица (13).

Замечание 2. Таким же способом как и выше можно найти "бифуркационное" значение e_0 интенсивности "белого" шума, действующего на коэффициенты a и c.

Замечание 3. Условия (13), (36)-(38) также достаточны для асимптотической устойчивости в целом системы $(1'_{eg})$ $(g = e)$.

Построим теперь стохастические функции Ляпунова для $(1'_{eg})$ $(g = e)$, удовлетворяющие условиям $LV = \Delta\, y^2$ и $LV = \Delta\, x^2$. После элементарных выкладок получаем соответственно:

$$\begin{aligned} V(x,y) = &\left[2c^2 + (2c-a-d)e^2\right]x^2 - 2\left[2ac + (c-b)e^2\right]xy + \\ &+ [2a^2 + 2(ad-bc) + (a+d-2b)e^2]y^2 \end{aligned} \tag{39}$$

$$V(x,y) = 2(d^2 + ad - bc)x^2 - 4bdxy + 2b^2y^2 \quad . \tag{40}$$

Заметим, что функция Ляпунова (40) в точности совпадает с ранее построенной функцией Ляпунова (18). Используем функцию (40) для получения достаточных условий устойчивости по вероятности системы $(1'_{eg})$ $(g = e)$. Условия Рауза-Гурвица (13) обеспечивают положительную определенность формы (40).

Теорема 12. *Если для стохастической системы* $(1'_{eg})$ $(g = e)$ *выполнены условия* (13) *и* (36), *то тривиальное решение системы* $(1'_{eg})$ *устойчиво по вероятности.*

Кроме того, для системы $(1'_{eg})$ $(g = e)$ *имеет место утверждение аналогичное второй части теоремы 3.*

3) *Случай* $e \neq 0$, $h \neq 0$, $f = g = 0$.

Рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{cases} dx(t) = (ax(t) + by(t))dt + ex(t)d\xi(t) \\ dy(t) = (cx(t) + dy(t))dt + hy(t)d\xi(t) \end{cases} . \qquad (1'_{eh})$$

Аналогично предыдущим случаям

$$LV = (ax + by)(2\mu\, x + 2\omega\, y) + (cx + dy)(2\omega\, x + 2\nu\, y) +$$

$$+ \frac{1}{2}\{2\mu\, e^2x^2 + 4\omega\, exhy + 2\nu\, h^2y^2\} = \left[(2a + e^2)\mu + 2c\omega\right]x^2 +$$

$$+ 2\left[b\mu + (a + d + eh)\omega + c\nu\right]xy + \left[2b\omega + (2d + h^2)\nu\right]y^2 \quad .$$

Искомые коэффициенты μ, ω, ν квадратичной формы $V(x,y)$ находим из линейной системы

$$\begin{cases} (2a + e^2)\mu + 2c\omega = -\alpha \\ b\mu + (a + d + eh)\omega + c\nu = -\beta \\ 2b\omega + (2d + h^2)\nu = -\gamma \end{cases} .$$

Здесь α, β, γ - коэффициенты заданной формы $W(x,y)$. Полагая $\beta = 0$, находим

$$\mu = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ \omega = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \nu = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta = 4(a + d)(ad - bc) + 2e^2\left[d^2 + (ad - bc) + deh\right] + 2h^2\left[a^2 + (ad - bc) + aeh\right] +$$

$$+ e^2h^2(a + d + eh) + 4adeh \ ,$$

$$\Delta_1 = -\left[2d^2 + 2(ad - bc) + eh^3 + (a + d)h^2 + 2deh\right]\alpha - 2c^2\gamma \quad ,$$

$$\Delta_2 = b(2d + h^2)\alpha + c(2a + e^2)\gamma \quad ,$$

$$\Delta_3 = -2b^2\alpha - \left[2(a^2 + ad - bc) + e^2(a + d) + e^3h + 2aeh\right]\gamma \quad .$$

Считая $\alpha = \Delta$, $\gamma = -\Delta$, получаем для системы $(1'_{eh})$ стохастическую функцию Ляпунова

$$V(x,y) = -\begin{vmatrix} 0 & x^2 & 2xy & y^2 \\ 1 & 2a + e^2 & 2c & 0 \\ 0 & b & a + d + eh & c \\ 1 & 0 & 2b & 2d + h^2 \end{vmatrix} , \qquad (41)$$

удовлетворяющую уравнению $LV = \Delta(x^2 + y^2)$.

Как и в предыдущих случаях для упрощения выкладок будем считать, что интенсивности e и h "белых" шумов, действующих на коэффициенты a и d, совпадают, т.е. что $h = e$. Тогда

$$\mu = 2(c^2 + d^2) + 2(ad - bc) + e^4 + e^2(a + 3d)$$

$$\omega = -2(ac + bd) - e^2(b + c)$$

$$\nu = 2(a^2 + b^2) + 2(ad - bc) + e^4 + e^2(d + 3a)$$

$$\Delta = 4(a + d)(ad - bc) + 2e^2\left[(a + d)^2 + 2(ad - bc)\right] + 3e^4(a + d) + e^6$$

С помощью функции (41) на основании теоремы D получаем следующее утверждение.

Теорема 13. *Для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом стохастической системы* $(1'_{eh})$ $(h = e)$ *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) $a+d<0$, $ad-bc>0$ (13)

2) $4(a+d)(bc-ad)>e^6+3e^4(a+d)+2e^2\left[(a+d)^2+2(ad-bc)\right]$ (42)

3) $2(c^2+d^2)+2(ad-bc)>-e^4-e^2(a+3d)$ (43)

4) $8(ad-bc)^2+4(ad-bc)(a^2+b^2+c^2+d^2)>-e^8-4e^6(a+d)+$
$+e^4\left[(b+c)^2-2(ad-bc)-2(a^2+b^2+c^2+d^2)-(a+3d)(d+3a)\right]+$
$+e^2\left[4(b+c)(ac+bd)-8(a+d)(ad-bc)-2(a+3d)(a^2+b^2)-\right.$ (44)
$\left.-2(d+3a)(c^2+d^2)\right]$

1)

Замечание 1. В детерминированном случае, т.е. при $e=h=0$, условия (13), (42)-(44) эквивалентны условиям Рауза-Гурвица (13).

Замечание 2. "Бифуркационное" значение e_0^2 интенсивности "белого" шума можно найти так: записать неравенства (42)-(44) в виде $F_i(e^2)>0$, $i=1,2,3$ соответственно, где $F_i(e^2)$ -полиномы относительно e^2, причем в силу (13) $F_i(0)>0$ $(i=1,2,3)$; затем взять минимум из трех наименьших положительных корней уравнений $F_i(\xi)=0$ $(i=1,2,3)$.

Замечание 3. Условия (13), (42)-(44) являются также достаточными условиями для асимптотической устойчивости в целом системы $(1'_{eh})$ $(h=e)$.

Стохастические функции Ляпунова для $(1'_{eh})$ $(h=e)$, удовлетворяющие неравенствам $LV=\Delta y^2$ и $LV=\Delta x^2$, имеют соответственно вид:

$$V(x,y)=2c^2x^2-2c(2a+e^2)xy+\left[2(a^2+ad-bc)+e^4+e^2(d+3a)\right]y^2, \tag{45}$$

$$V(x,y)=\left[2(d^2+ad-bc)+e^4+e^2(a+3d)\right]x^2-2b(2d+e^2)xy+2b^2y^2. \tag{46}$$

Используя функцию (45), сформулируем теорему об устойчивости по вероятности нулевого решения системы $(1'_{eh})$ $(h=e)$.

Теорема 14. *Пусть для стохастической системы* $(1'_{eh})$ $(h=e)$ *выполняются условия* (13), (42) *и* $c\neq 0$, $4(ad-bc)>-e^4-2e^2(a+d)$.

Тогда нулевое решение системы $(1'_{eh})$ $(h=e)$ *устойчиво по вероятности.*

Кроме этого, имеет место утверждение аналогичное второй части теоремы 7.

4) *Случай* $f\neq 0$, $g\neq 0$; $e=h=0$.

Система $(1')$ принимает вид:

$$\begin{cases} dx(t)=(ax(t)+by(t))dt+fy(t)d\xi(t) \\ dy(t)=(cx(t)+dy(t))dt+gx(t)d\xi(t) \end{cases} \tag{$1'_{fg}$}$$

Имеем.

$$LV=(ax+by)(2\mu x+2\omega y)+(cx+dy)(2\omega x+2\nu y)+$$
$$+\frac{1}{2}\left\{2\mu(fy)^2+4\omega(fy)(gx)+2\nu(gx)^2\right\}=\left[2a\mu+2c\omega+\nu g^2\right]x^2+$$
$$+2\left[b\mu+(a+d+fg)\omega+c\nu\right]xy+\left[f^2\mu+2b\omega+2d\nu\right]y^2 \quad .$$

Получаем систему, из которой находятся выражения для μ, ω, ν через α и γ $(\beta:=0)$

$$\begin{cases} 2a\mu + 2c\omega + g^2\nu = -\alpha \\ b\mu + (a+d+fg)\omega + c\nu = 0 \\ f^2\mu + 2b\omega + 2d\nu = -\gamma \end{cases}$$

Будем считать $g = f$. Тогда

$$\mu = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ \omega = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \nu = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta = 4(a+d)(ad-bc) + 2\left[b^2 + c^2 + 2ad\right]f^2 - (a+d)f^4 - f^6 \ ,$$

$$\Delta_1 = -\left[2(ad-bc) + 2d^2 + 2df^2\right]\alpha - \left[2c^2 - (a+d)f^2 - f^4\right]\gamma \ ,$$

$$\Delta_2 = \left[2bd - cf^2\right]\alpha + \left[2ac - bf^2\right]\gamma \ ,$$

$$\Delta_3 = -\left[2b^2 - (a+d)f^2 - f^4\right]\alpha - \left[2(ad-bc) + 2a^2 + 2af^2\right]\gamma \ .$$

Полагая $\alpha = \gamma = -\Delta$, получим

$$\mu = 2(ad-bc) + 2(c^2+d^2) + (d-a)f^2 - f^4 \ ,$$

$$\omega = 2(ac+bd) + (b+c)f^2 \ ,$$

$$\nu = 2(ad-bc) + 2(a^2+b^2) + (a-d)f^2 - f^4 \ .$$

Найденную стохастическую функцию Ляпунова для системы $(1'_{fg})$ $(g = f)$ можно записать в виде

$$V(x,y) = -\begin{vmatrix} 0 & x^2 & 2xy & y^2 \\ 1 & 2a & 2c & f^2 \\ 0 & b & a+d+f^2 & c \\ 1 & f^2 & 2b & 2d \end{vmatrix} \ , \tag{47}$$

причем для (47) выполняется равенство $LV = \Delta(x^2+y^2)$.

С помощью функции (47) можно сформулировать критерий экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом системы $(1'_{fg})$ $(g = f)$.

Теорема 15. *Для того. чтобы стохастическая система* $(1'_{fg})$ $(g = f)$ *была экспоненциально устойчива в среднем квадратическом необходимо и достаточно:*

1) $a + d < 0$, $ad - bc > 0$ (13)

2) $4(a+d)(bc-ad) > 2\left[b^2 + c^2 + 2ad\right]f^2 - (a+d)f^4 - f^6$ (48)

3) $2(ad-bc) + 2(c^2+d^2) > (a-d)f^2 + f^4$ (49)

4) $8(ad-bc)^2 + 4(ad-bc)(a^2+b^2+c^2+d^2) > -f^8 + f^4[(b+c)^2 +$

$+ 4(ad-bc) + 2(a^2+b^2+c^2+d^2) + (a-d)^2] +$

$+ f^2\left[4(b+c)(ac+bd) + 2(a-d)(a^2+b^2-c^2-d^2)\right]$ (50)

Замечание 1. При $f = g = 0$ (детерминированный случай) неравенства (13), (48)-(50) равносильны условиям Рауза-Гурвица (13).

Замечание 2. Для нахождения "бифуркационного" значения f_0^2 можно поступить так, как сказано в замечании 2 теоремы 13.

Замечание 3. Условия (13), (48)-(50) также достаточны для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы $(1'_{fg})$ $(g = f)$.

Выпишем теперь стохастические функции Ляпунова для $(1'_{fg})$ $(g = f)$ удовлетворяющие соответственно неравенствам $LV = \Delta\, y^2$ и $LV = \Delta\, x^2$:

$$V(x,y) = \left[2c^2 - (a+d)f^2 - f^4\right]x^2 - 2\left[2ac - bf^2\right]xy + \left[2(ad-bc) + 2a^2 + 2af^2\right]y^2, \quad (51)$$

$$V(x,y) = \left[2(ad-bc) + 2d^2 + 2df^2\right]x^2 - 2\left[2bd - cf^2\right]xy + \left[2b^2 - (a+d)f^2 - f^4\right]y^2. \quad (52)$$

Используя, например, функцию (52) получаем следующее утверждение, аналогичное теореме 14.

Теорема 16. *Пусть для стохастической системы* $(1'_{fg})$ $(g = f)$ *выполнены условия (13) (48) и*

1) $2(ad-bc) + 2d^2 > -2df^2$;

2) $4b^2(ad-bc) > 2df^6 + f^4\left[c^2 + 2d^2 + 2(ad-bc) + 2d(a+d)\right] +$

$+ f^2\left[2(a+d)(ad-bc) + 2d^2(a+d) - 4bd(b+c)\right]$.

Тогда нулевое решение системы $(1'_{fg})$ $(g = f)$ *устойчиво по вероятности.*

Далее, имеет место утверждение, аналогичное второй части теоремы 3.

5) *Случай* $g \neq 0, \quad h \neq 0, \quad e = f = 0$ (сводится к случаю 1))

Стохастическая функция Ляпунова для соответствующей системы $(1'_{gh})$ имеет вид:

$$V(x,y) = -\begin{vmatrix} 0 & y^2 & 2xy & x^2 \\ 1 & 2d+h^2 & 2b & 0 \\ 0 & c+gh & a+d & b \\ 1 & g^2 & 2c & 2a \end{vmatrix}, \quad (53)$$

причем (53) удовлетворяет соотношению

$$LV = \Delta(x^2 + y^2), \quad (54)$$

где

$$\Delta = 4(a+d)(ad-bc) + 2b^2g^2 + 2h^2\left[a^2 + (ad-bc)\right] - 4abgh.$$

6) *Случай* $f \neq 0, \quad h \neq 0, \quad e = g = 0$ (сводится к случаю 2)).

Стохастическая функция Ляпунова для соответствующей системы $(1'_{fh})$ имеет вид:

$$V(x,y) = -\begin{vmatrix} 0 & y^2 & 2xy & y^2 \\ 1 & 2d+h^2 & 2(b+fh) & f^2 \\ 0 & c & a+d & b \\ 1 & 0 & 2c & 2a \end{vmatrix}. \quad (55)$$

Для функции (55) выполняется равенство (54), где

$$\Delta = 4(a+d)(ad-bc) + 2h^2(a^2 + ad - bc) + 2cf(cf - 2ah).$$

Замечание. Можно рассмотреть и случаи, когда три или четыре коэффициента линейной системы 2-го порядка подвержены случайным возмущениям, т.е. когда в $(1')$ все коэффициенты $e, \quad f, \quad g, \quad h$ отличны от нуля или же какие-то три из них отличны от нуля, а оставшийся - 0. Но при этом соответствующие условия стохастической устойчивости приобретает громоздкий вид и становятся трудно обозримыми. В указанных случаях условия устойчивости формулируются в терминах положительности (или отрицательности) некоторых определителей, старший из которых имеет порядок 3.

4.3. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим уравнение упругих колебаний в среде, сопротивление которой пропорционально скорости:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad , \tag{56}$$

где k - коэффициент трения, ω^2 - коэффициент упругости (ω - собственная частота колебаний системы без трения). Система, описываемая уравнением (56), устойчива в целом тогда и только тогда, когда $k>0$. Предположим теперь, что коэффициент ω^2 в (56) подвергается случайному возмущению типа "белого шума" $\sigma\dot{\xi}(t)$ т.е. грубо говоря, случайному процессу с малым интервалом корреляций. Тогда уравнение (56) примет вид:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + (\omega^2 + \sigma\dot{\xi}(t))x = 0, \tag{57}$$

где σ -интенсивность "белого шума". Естественно возникают вопросы:

1) каковы необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом уравнения (57);

2) каковы достаточные условия асимптотической устойчивости в целом и устойчивости по вероятности нулевого решения уравнения (57). Встает также и задача нахождения "бифуркационного" значения σ_0 интенсивности шума.

Уравнение (57) будем понимать как систему стохастических уравнений Ито:

$$\begin{cases} dx(t) = y(t)dt \\ dy(t) = (-\omega^2 x(t) - ky(t))dt - \sigma x(t)\, d\xi(t) \end{cases} , \tag{58}$$

где $\xi(t)$ -винеровский процесс.

Система (58) при $\omega^2 = 1$, $k = 1$ рассмотрена в [3]. Методом частного интегрирования в [3] построена стохастическая функция Ляпунова для (58) при указанных значениях параметров ω^2 и k.

Система (58) - частный случай рассмотренной нами системы (1'): $a = 0$, $b = 1$, $c = -\omega^2$, $d = -k$; $e = 0$, $f = 0$, $g = -\sigma$, $h = 0$. Имеем случай 3) пункта **4.1.**

Стохастическая функция Ляпунова для (58) будет иметь вид (25):

$$V(x,y) = -\begin{vmatrix} 0 & y^2 & 2xy & x^2 \\ 1 & 2d & 2b & 0 \\ 0 & c & a+d & b \\ 1 & g^2 & 2c & 2a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & y^2 & 2xy & x^2 \\ 1 & -2k & 2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & -k & 1 \\ 1 & \sigma^2 & -2\omega^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left[k^2 + \omega^2(1+\omega^2) + k\frac{\sigma^2}{2}\right]x^2 + 2(2k+\sigma^2)xy + 2(1+\omega^2)y^2 \tag{59}$$

Функция (59) удовлетворяет соотношению (26):

$$LV = \Delta(x^2 + y^2),$$

где $\Delta = 2(\sigma^2 - 2k\omega^2)$.

Немного видоизменим функцию Ляпунова (59), а именно, за стохастическую функцию Ляпунова системы (58) возьмем функцию:

$$V_1 = -\frac{1}{\Delta}V = \frac{k^2 + \omega^2(1+\omega^2) + k\frac{\sigma^2}{2}}{2k\omega^2 - \sigma^2}x^2 + \frac{2k+\sigma^2}{2k\omega^2 - \sigma^2}xy + \frac{1+\omega^2}{2k\omega^2 - \sigma^2}y^2 \quad . \tag{60}$$

Для (60) выполняется равенство: $LV_1 = -x^2 - y^2$.

При $k = \omega^2 = 1$ выражение (60) дает стохастическую функцию Ляпунова, построенную в [3].

Легко проверить, что условия положительной определенности формы (60) сводятся к неравенству:

$$2k\omega^2 > \sigma^2 \tag{61}$$

Таким образом на основании теорем D и C получаем следующие утверждения.

Утверждение 1. Система (58) (или уравнение (57)) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом тогда и только тогда, когда выполнено условие (61).

Утверждение 2. Для асимптотической устойчивости в целом системы (58) достаточно, чтобы было выполнено неравенство (61).

Замечание 1. При $\sigma = 0$ условие (61) превращается в условие $(k > 0)$ асимптотической устойчивости в целом детерминистического уравнения (56).

Замечание 2. Условие (61) имеется в [2], где оно получено другим методом как частный результат при рассмотрении более общей задачи получения необходимых и достаточных условий экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом системы

$$y^{(n)} + (b_1 + \dot{\xi}_1(t))y^{(n-1)} + \ldots + (b_n + \dot{\xi}_n(t))y = 0, \tag{E}$$

где $\dot{\xi}_1(t), \ldots, \dot{\xi}_n(t)$ - гауссовские белые шумы.

Замечание 3. При $k = \omega^2 = 1$ условие (61) получено в [3].

Замечание 4. "Бифуркационное" значение σ_0 шума получается из (61):

$$\sigma_0^2 = 2k\omega^2 \quad . \tag{62}$$

Для стохастической устойчивости в целом выражение (62) дает нижнюю границу для бифуркационного значения шума.

Пример 2([2]). Рассмотрим стохастическое уравнение

$$\ddot{x} + (k + \sigma\dot{\xi}(t))\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad , \tag{63}$$

где k и ω^2 константы, а $\dot{\xi}(t)$ - "белый" шум единичной интенсивности. Уравнение (63) является математической моделью колебательной системы в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, когда коэффициент пропорциональности представляет собой случайный процесс с малым интервалом корреляции. Соответствующее детерминистическое уравнение $(\sigma = 0)$ устойчиво в целом при $k > 0$. Запишем уравнение (63) в форме системы стохастических уравнений Ито

$$\begin{cases} dx(t) = y(t)dt \\ dy(t) = (\omega^2 x(t) - ky(t))dt - \sigma y(t)d\xi(t) \end{cases} , \tag{64}$$

где $\xi(t)$ - винеровский процесс.

Система (64) частный случай системы (1′): $a = 0$, $b = 1$, $c = -\omega^2$, $d = -k$; $e = 0$, $f = 0$, $g = 0$, $h = -\sigma$. Имеем рассмотренный выше случай 4) пункта **4.1.** Соответствующая стохастическая функция Ляпунова дается формулой (27):

$$V(x,y) = -\begin{vmatrix} 0 & y^2 & 2xy & x^2 \\ 1 & 2d + h^2 & 2b & 0 \\ 0 & c & a + d & b \\ 1 & 0 & 2c & 2a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & y^2 & 2xy & x^2 \\ 1 & -2k + \sigma^2 & 2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & -k & 1 \\ 1 & 0 & -2\omega^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[2\omega^2(1 + \omega^2) + k(2k - \sigma^2)\right]x^2 + 2(2k - \sigma^2)xy + 2(1 + \omega^2)y^2 \quad . \tag{65}$$

Для функции (65) выполняется равенство $LV = \Delta(x^2 + y^2)$, где $\Delta = 2\omega^2(\sigma^2 - 2k)$.
Вместо функции Ляпунова (65) можно взять функцию

$$V_1 = -\frac{1}{\Delta}V = \left(\frac{1+\omega^2}{2k-\sigma^2} + \frac{k}{2\omega^2}\right)x^2 + \frac{1}{\omega^2}xy + \frac{1+\omega^2}{\omega^2(2k-\sigma^2)}y^2. \qquad (66)$$

Очевидно, $LV_1 = -x^2 - y^2$.
Легко проверить, что форма $V_1(x,y)$ положительно определена тогда и только тогда, когда $\sigma^2 < 2k$.
Получаем следующие утверждения.

Утверждение 3. Система (64) (или уравнение (63)) экспоненциально устойчива в среднем квадратическом тогда и только тогда. когда $\sigma^2 < 2k$.

Утверждение 4. Если в системе (64) (уравнение (63)) $\sigma^2 < 2k$, то система (64) асимптотически устойчива в целом.

Замечание 1. В случае $\sigma = 0$, условие $\sigma^2 < 2k$ становится условием $(k > 0)$ устойчивости детерминистического уравнения (56).

Замечание 2. Условие $2k\omega^2 > \omega^2\sigma^2$, т.е. $2k > \sigma^2$ получено в [2] как частный результат при рассмотрении задачи о стохастической устойчивости уравнения (E).

Замечание 3. Значение $\sigma_0^2 = 2k$ является "бифуркационным" для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом и нижней границей для асимптотической устойчивости в целом системы (64).

Дальнейшие обобщения. Выше мы рассмотрели задачу о построении стохастических функций Ляпунова для двумерных линейных систем вида (1), когда на один или два коэффициента соответствующей детерминированной системы действует один и тот же гауссовский "белый шум" $\sigma\dot{\xi}(t)$ интенсивности σ. Представляет интерес и аналогичная задача построения стохастических функций Ляпунова для линейных систем 2-го порядка, когда, например, два коэффициента системы подвержены разным возмущениям, т.е. когда на один коэффициент действует один гауссовский "белый шум" $\sigma_1\dot{\xi}_1(t)$, а на второй - другой гауссовский "белый шум" $\sigma_2\dot{\xi}_2(t)$, причем "белые шумы" независимы (случай зависимых сводится к независимым [2]). С другой стороны, возникает и аналогичная задача построения функций Ляпунова, когда один из коэффициентов линейной системы испытывает воздействие двух различных независимых "белых шумов" $\sigma_1\dot{\xi}_1(t)$ и $\sigma_2\dot{\xi}_2(t)$. Сформулируем теперь сказанное строго математически.

Задача 1. Рассмотрим линейную систему стохастических уравнений Ито

$$\begin{cases} dx(t) = (ax(t) + by(t))dt + \sigma_{11}x(t)d\xi_{11}(t) + \sigma_{12}y(t)d\xi_{12}(t) \\ dy(t) = (cx(t) + dy(t))dt + \sigma_{21}x(t)d\xi_{21}(t) + \sigma_{22}y(t)d\xi_{22}(t) \end{cases}, \qquad (S_1)$$

где $a,b,c,d,\sigma_{ij}(i,j=1,2)$ - константы, $x(t)$ и $y(t)$ - скалярные случайные процессы, а $\xi_{ij}(t)$ - независимые винеровские процессы. Предположим, что какие-то два элемента матрицы $\left((\sigma_{ij})\right)$ $i,j = 1,2$ не равны нулю, а остальные нули.

1) Построить стохастические функции Ляпунова для системы (S_1).

2) Сформулировать для системы (S_1) необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом.

3) Каковы достаточные условия асимптотической устойчивости в целом нулевого решения $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ системы (S_1).

4) Найти и оценить "бифуркационные" значения интенсивностей $\sigma_{//}$ "белых шумов" $\sigma_{//}\dot{\xi}_{//}(t)$.

Задача 2. Пусть дана линейная система стохастических уравнений Ито

$$\begin{cases} dx(t) = (ax(t) + by(t))dt + \sigma_1 x(t)d\xi_1(t) + \sigma_2 x(t)d\xi_2(t) \\ dy(t) = (cx(t) + dy(t))dt \end{cases}, \qquad (S_2)$$

где a, b, c, d, σ_1, σ_2 - константы, а $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ независимые винеровские процессы.

Дать для системы (S_2) ответы на вопросы 1)-4) .

Аналогичная задача ставится и для системы, получающейся из (S_2) заменой стохастического члена $\sigma_1 x d\xi_1 + \sigma_2 x d\xi_2$ на $\sigma_1 y d\xi_1 + \sigma_2 y d\xi_2$.

Литература:

1. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. -М.: Наука, -1970, -240 с.
2. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. -М.: -Наука, -1969, -367 с.
3. *Kushner H.J.* On the construction of stochastic Lyapunov functions.// IEEE Trans. Automat. Control. 10, N4, 1965, p.477-478.
4. *Шумафов М.М.* О построении функций Ляпунова для некоторых нелинейных стохастических дифференциальных уравнений 2-го порядка и вопросы устойчивости // Дифференциальные уравнения. -1981. -т17. -N6. -с.1143-1145.
5. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. -Киев: Наукова думка, - 1968.
6. *Кушнер Г.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. -М.: Мир, -1969, -199 с.

Liapunov Functions for two dimensional linear stationary stochastic systems

M.M.Shumafov

The object of this paper is to construct Liapunov functions of two-order linear systems of stochastic differential equations with constant coefficients. On the basis of the constructed Liapunov functions the necessary and/or suffisient conditions of stochastic stability of considerable systems are given. As an example a linear differential equation of second order is considered with one of the coefficients perturbed by white Gaussian noise.

