1997 г. Труды ФОРА № 2

МЕТОДЫ ГЕНЕРАЦИИ ТОЧНО РЕШАЕМЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА, КАК РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

И.Н. Овчаров

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Приведено некоторое нелинейное уравнение и показано, что известные методы генерации точно решаемых потенциалов уравнения Шредингера являются следствием его решения.

Хорошо известно, что класс аналитически решаемых задач квантовой механики ограничен. Напротив, практическое значение точно решаемых моделей достаточно велико. Поэтому, нахождение новых точно решаемых потенциалов в уравнении Шредингера, допускающих полное определение спектра, всегда вызывает большой интерес. В настоящее время известно три, не связанных на первый взгляд между собой, метода построения точно решаемых потенциалов: метод Дарбу [1-3], преобразование Абрахама-Мозеса [4,5], основанное на решении уравнений Гельфанда-Левитана и Марченко [6-7]; и модифицированный метод факторизации, не так давно, разработанный Б. Миелником [8].

В настоящей работе, исходя из общей концепции операторов преобразования, введенных Дельсартом [9], показано, что все три известных метода могут быть получены, как следствия решения некоторого нелинейного уравнения.

Рассмотрим одномерное стационарное уравнение Шредингера ($\hbar = 2m = 1$)

$$\hat{H}_0\psi_\lambda \equiv -\psi_\lambda'' + V\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda,\ V = V(x),\ \psi_\lambda = \psi_\lambda(x), \tag{1}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x, λ - спектральный параметр. Пусть на интервале изменения переменной $x\ [a,b]$, совпадающем с интервалом на котором определен (и непрерывен, исключая, может быть, отдельные точки) потенциал $V(x)$, известно общее решение уравнения (1).

Рассмотрим оператор $\hat{L}$, удовлетворяющий хорошо известному из теории операторов преобразования, уравнению

$$\left[\hat{L}, \hat{H}_0\right] \equiv \hat{L}\hat{H}_0 - \hat{H}_0\hat{L} = A(x)\hat{L}, \tag{2}$$

где $A(x)$ - некоторая функция x. Тогда очевидно, что решения $\varphi_\lambda(x)$ уравнения

$$\hat{H}\varphi_\lambda(x) = \lambda\varphi_\lambda(x),\ \hat{H} \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + U(x),\ U(x) = V(x) + A(x), \tag{3}$$

будут связаны с решениями уравнения (1) при помощи оператора $\hat{L}$

$$\varphi_\lambda(x) = \hat{L}\psi_\lambda(x), \tag{4}$$

если только $\hat{L}\psi_\lambda(x) \neq 0$. В качестве оператора $\hat{L}$ могут выступать как интегральные операторы, так и дифференциальные. Если $\hat{L}$ - дифференциальный оператор n - го порядка, то он определяет преобразование Дарбу n - го порядка [10].

Коммутационное уравнение (2) обычно решается относительно неизвестного оператора $\hat{L}$ на некотором функциональном пространстве достаточно гладких функций, однако его можно рассмотреть и на пространстве решений исходного уравнения Шредингера (1). Это означает, что на пространстве решений уравнения (1) и в классе дифференциальных операторов с достаточно гладкими коэффициентами, оператор $\hat{L}$ можно без потери общности считать дифференциальным оператором первого порядка

$$\hat{L} = L_0 + L_1 d_x, \; L_0 = L_0(x), \; L_1 = L_1(x), \; d_x \equiv \frac{d}{dx}. \tag{5}$$

После несложных вычислений из (2), с учетом (5), несложно получить, что функции $L_0(x)$ и $L_1(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{L_0}{L_1}\right)' - \left(\frac{L_0}{L_1}\right)^2 + (V - \lambda) + \frac{c^2}{L_1{}^2} = 0, \tag{6}$$

где c^2 - постоянная интегрирования. При этом функция $A(x)$ зависит от $L_0(x)$ и $L_1(x)$ следующим образом:

$$A(x) = \frac{L_1''(x)}{L_1(x)} + 2\frac{L_0'(x)}{L_1(x)} \tag{7}$$

Потенциал $U(x)$ нового уравнения Шредингера определяется выражением (3).

К сожалению нам неизвестно общее решение уравнения (6). Вследствие функционального произвола, для уравнения (6) легко найти достаточно много частных решений, однако, для того чтобы оператор (5) переводил решения исходного уравнения Шредингера (1) в решения уравнения (3), которое являлось бы снова уравнением Шредингера, необходимо, чтобы потенциал $U(x)$, а следовательно, функция $A(x)$ не зависели от спектрального параметра λ.

Рассмотрим некоторые частные случаи, удовлетворяющие данному условию.

1. Сделаем в уравнении (6) подстановку вида:

$$L_0 = \left(-\frac{y_\alpha'}{y_\alpha} + \beta\right) L_1, \tag{8}$$

$y_\alpha = y_\alpha(x)$ - некоторое решение уравнения (1) при $\lambda = \alpha$ ($\alpha - const$), $\beta = \beta(x)$ - некоторая функция x. Уравнение (6) примет вид:

$$\beta' - \beta^2 + 2\frac{y_\alpha'}{y_\alpha}\beta + (\alpha - \lambda) + \frac{c^2}{L_1^2} = 0. \tag{9}$$

Пусть

$$L_1 = \pm \frac{c}{\sqrt{\lambda - \alpha}}. \tag{10}$$

После подстановки в уравнение (9): $\beta = \dfrac{f(x)}{y_\alpha{}^2}$, где $f(x)$ - некоторая функция, переменные в (9) разделяются и решение уравнения имеет вид:

$$\beta = -\left[y_\alpha^2 \left(\gamma + \int^x \frac{dz}{y_\alpha^2(z)} \right) \right]^{-1}, \; \gamma - const \tag{11}$$

С учетом (8), (10), (11) оператор (5) приобретает вид оператора Дарбу первого порядка:

$$\hat{L} = L_1\left(-\frac{y'_\alpha}{y} - \left[y_\alpha^2\left(\gamma + \int^x \frac{dz}{y_\alpha^2(z)} \right) \right]^{-1} + d_x \right) \tag{12}$$

где в качестве функции преобразования использовано общее решение

$\overline{\psi}_\alpha(x) = y_\alpha\left(\gamma + \int^x \frac{dz}{y_\alpha^2(z)} \right)$ уравнения (1) при $\lambda = \alpha$.

Потенциал нового уравнения Шредингера (3), при этом, имеет вид

$$U(x) = V(x) + A(x) = V(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\left[y_\alpha\left(\gamma + \int^x \frac{dz}{y_\alpha^2(z)} \right) \right]. \tag{13}$$

В то же время, преобразование (12) является общим видом, полученного Б. Миелником преобразования, следующего из, так называемого, модифицированного метода факторизации.

2. Положим в уравнении (9)

$$\beta^2 = \frac{c^2}{L_1^2},$$

тогда уравнение (9) примет вид обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, общее решение которого выберем в виде:

$$\beta = \frac{(\alpha - \lambda)(1 + \gamma J(x))}{\gamma \cdot y_\alpha^2}, \quad J(x) = \int_x y_\alpha^2(z)dz, \quad \gamma - const.$$

Оператор (5) примет вид:

$$\hat{L} = 1 - \frac{\gamma y_\alpha y'_\alpha}{(\alpha - \lambda)(1 + \gamma J(x))} + \frac{\gamma y_\alpha^2}{(\alpha - \lambda)(1 + \gamma J(x))} \cdot d_x, \tag{14}$$

где у оператора (14) опущен несущественный постоянный множитель. Это оператор специального двукратного преобразования Дарбу. Он может быть получен непосредственным перемножением двух, последовательно применяемых к уравнению (1), операторов Дарбу первого порядка, причем в первом из них в качестве функции преобразования используется решение уравнения (1) y_α при $\lambda = \alpha$, а во втором $\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{y_\alpha}(1 + \gamma J(x))$, являющееся общим решением уравнения (3) при $\lambda = \alpha$.

Используя равенство:

$$W_{\alpha\beta} = y_\alpha y'_\beta - y'_\alpha y_\beta = (\alpha - \beta)\int_a^x y_\alpha(z) y_\beta(z)dz + C(a), \tag{15}$$

где $C(a)$ - постоянная, определяемая значением нижнего предела интегрирования; y_α, y_β - решение уравнения (1) при $\lambda = \alpha, \lambda = \beta$; можно переписать дифференциальный оператор (14) в интегральном виде:

$$\hat{L}\psi_\lambda(x) = \psi_\lambda(x) - \int_x K(x,z)\psi_\lambda(z)dz,$$

$$K(x,z) = \gamma\frac{y_\alpha(x) y_\alpha(z)}{(1 + \gamma J(x))}, \quad A(x) = 2\frac{d}{dx}K(x,x) \tag{16}$$

совпадающем по форме с, так называемым, интегральным преобразованием Абрахама-Мозеса. Постоянная $C(a)$ в выражении (16) отсутствует. Этого можно добиться, выбирая верхний предел интегрирования в (16) надлежащим образом. Например, при любом значении параметра α функция $y_\alpha(x)$ может быть обращена в нуль в одной из двух граничных точек интервала $[a,b]$ при конечном значении ее производной в этой точке. Функция $\psi_\lambda(x)$, предполагаемая принадлежащей дискретному спектру уравнения (1), обращается в нуль на обеих границах этого интервала. Тогда $w_{\alpha\lambda}$ обратится в нуль в той же граничной точке, что и $y_\lambda(x)$ и условие $C(a)=0$ будет соответствовать выбору этой точки в качестве нижнего предела интегрирования.

3. Покажем, что и оператор двукратного преобразования Дарбу можно также получить как решения уравнения (9).

Сделаем в уравнении (9) подстановку:

$$\beta = k\frac{w_{\alpha\beta}}{y_\alpha y_\beta}, \quad k - const\,,$$

затем, положив $k(\alpha-\beta)=(\lambda-\alpha)$, получим следующий вид оператора (5)

$$L_1 = c\frac{(\alpha-\beta)}{\sqrt{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}}\cdot\frac{y_\alpha y_\beta}{w_{\alpha\beta}},\ L_0 = \frac{c}{\sqrt{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}}\left(\frac{(\beta-\alpha)y'_\alpha y_\beta}{w_{\alpha\beta}}+(\lambda-\alpha)\right),$$

$$A = -2\frac{d^2}{dx^2}\left[\ln w_{\alpha\beta}\right];$$

который определяет двукратное преобразование Дарбу общего вида.

Очевидно, что преобразования, основанные на многократном применении этих формул, будут удовлетворять уравнению (6).

Таким образом, перечисленные выше, методы генерации точно решаемых потенциалов в одномерном стационарном уравнении Шредингера являются следствием решения нелинейного уравнения (6). Следовательно, поиск новых решений данного уравнения представляет интерес, как поиск новых методов генерации точно решаемых потенциалов.

Литература

1. *G Darboux*, Compt. Rend. Acad. Sci., 94,1456 (1882).
2. *Багров В.Г., Овчаров И.Н., Самсонов Б.Ф. //* Труды ФОРА., №1,1 (1996).
3. *W.M. Zheng, J. Math. Phys.*, 25.88 (1984).
4. *P.B.Abraham, H.E. Moses //* Phys. Lett. A,22,1333(1980).
5. *D.L. Pursey //* Phys. Rev.D, 33,1048(1986); 36,1109(1987).
6. *Фадеев Л.Д. //* УМН, 14,57(1959).
7. *Шадан К. Садатье П.* Обратные задачи в квантовой теории рассеяния.-М.: Мир - 1980, 408с.
8. *Mielnik B. //* J. Math. Phys., 25,3387(1984).
9. *J.J. Delsart //* Math. Pures et Appl.,17,213(1938).
10. *Самсонов Б.Ф., Овчаров И.Н. //* Изв.вузов.физика., 7,3(1995).

Methods of generation of exactly decided potential in Schrödinger equation as decision of nonlinear equation

I. N. Ovcharov

A certain nonlinear equation is given and it is shown that the known methods of generation of exactly solved potentials of Schrödinger equation are the result of its solutions.

