1997 г. Труды ФОРА № 2

О ДРОБНЫХ СТЕПЕНЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Л.Ж. Паланджянц, С.К. Куижева, О.П. Шевякова

Майкопский государственный технологический институт, Майкоп

Используя метод И.М. Гельфанда и Л.А. Дикого, вычисляются дифференциальные операторы, нулевые коммутаторы которых дают нелинейные дифференциальные уравнения, в том числе уравнение Абеля второго рода.

Опишем коротко основную идею метода И.М.Гельфанда и Л.А. Дикого дробных степеней дифференциальных операторов [1]. Рассмотрим кольцо дифференциальных операторов

$$B[\partial]=\left\{\sum_{i=0}^{n} b_i\partial^i,\ b_i=b_i(x)\in C^{\infty}(\mathbf{R})\right\}.$$

Кроме естественных операций сложения и умножения элементов на вещественные числа, определена операция умножения дифференциальных операторов по формуле

$$\partial\circ u(x)=u'(x)+u(x)\partial$$

Сопоставим каждому дифференциальному оператору $\sum_{i=0}^{n} b_i\partial^i$ функцию двух переменных (символ оператора) вида $a(\xi,x)=\sum_{i=0}^{n} b_i\xi^i$, где ξ - свободная переменная. Тогда получим расширение кольца дифференциальных операторов в виде кольца формальных рядов Лорана

$$B\left((\xi^{-1})\right)=\left\{\sum_{i=-\infty}^{n} b_i\xi^i\right\}$$

При этом умножению дифференциальных операторов будет соответствовать композиция символов, задаваемая формулой

$$a\circ b=\sum_{\alpha\geq 0}\frac{1}{\alpha!}\partial_{\xi}^{\alpha}a\partial^{\alpha}b \tag{1}$$

Перейдем к извлечению квадратного корня из оператора Штурма - Лиувилля [2]

$$L=\partial^2+u(x).$$

Рассмотрим соответствующий символ дифференциального оператора $L_2=\xi^2+u$ и используя вышеописанный метод, вычислим коэффициенты $a_{-i}, i=1,2,\ldots$ ряда

$$\lambda=\xi+a_0\xi^0+a_{-1}\xi^{-1}+\ldots+a_{-n}\xi^{-n}+\ldots=\sum_{i=-1}^{\infty}a_{-i}\xi^{-i} \tag{2}$$

такого, что $\lambda\circ\lambda=L_2$.

Лемма 1. [2] *Коэффициенты ряда (2) удовлетворяют условиям:*

$$a_1 = 1, a_0 = 0, a_{-1} = u/2\,,$$

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{i=-1}^{n-\alpha+1} \frac{(-1)^{\alpha}(i)\alpha}{\alpha!} a_{-i} a^{(\alpha)}_{-n+i+\alpha} = 0\,, \tag{3}$$

где $(i)_\alpha = i(i+1)\ldots(i+\alpha-1)$ *- сдвинутый факториал, причем* $(i)_0 = 1$.

Доказательство. Так как

$$\lambda \circ \lambda = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \lambda_\xi^{(\alpha)} \lambda_x^{(\alpha)}\,,$$

где

$$\lambda_\xi^{(\alpha)} = \sum_{k=-1}^{\infty} a_{-k} (\xi^{-k})^{(\alpha)} = \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^{\alpha} (k)_\alpha \xi^{-k-\alpha},$$

$$\lambda_x^{(\alpha)} = \sum_{i=-1}^{\infty} a_{-i}^{(\alpha)} \xi^{-i},$$

то

$$\lambda \circ \lambda = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \left(\sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^{\alpha} (k)_\alpha \xi^{-k-\alpha} \right) \left(\sum_{i=-1}^{\infty} a_{-i}^{(\alpha)} \xi^{-i} \right) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (-1)^{\alpha} \xi^{-\alpha} \sum_{k=-1}^{\infty} (k)_\alpha a_{-k} \xi^{-k} \sum_{i=-1}^{\infty} a_{-i}^{(\alpha)} \xi^{-i}.$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=-1}^{\infty} a_{-k}^{(\alpha)} \xi^{-k} \sum_{j=-1}^{\infty} b_{-j} \xi^{-j} = \sum_{k=-2}^{\infty} \left(\sum_{i=-1}^{k+1} a_{-i} b_{-k+i} \right) \xi^{-k}\,,$$

получаем, что

$$\lambda \circ \lambda = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (-1)^{\alpha} \xi^{-\alpha} \sum_{k=-2}^{\infty} \sum_{i=-1}^{k+1} (i)_\alpha a_{-i} a_{-k+i}^{(\alpha)} \xi^{-k} =$$

$$=. \sum_{k=-2}^{\infty} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{i=-1}^{k+1} \frac{(-1)^{\alpha} (i)_\alpha}{\alpha!} a_{-i} a_{-k+i}^{(\alpha)} \right\} \xi^{-k-\alpha}.$$

Заменим индекс суммирования $-k-\alpha = -n$

Так как $k \geq -2,\ \alpha \geq 0,\ n \geq -2$, то

$$\lambda \circ \lambda = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{n=-2}^{\infty} \sum_{i=-1}^{n-\alpha+1} \frac{(-1)^{\alpha} (i)_\alpha}{\alpha!} a_{-i} a_{-n+i+\alpha}^{(\alpha)} \xi^{-n} =$$

$$=. \sum_{n=-2}^{\infty} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{i=-1}^{n-\alpha+1} \frac{(-1)^{\alpha} (i)_\alpha}{\alpha!} a_{-i} a_{-n+i+\alpha}^{(\alpha)} \right\} \xi^{-n}.$$

Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 при $n = \overline{2,9}$ получаем коэффициенты ряда (2):

$$a_{-2}=-\frac{u'}{4},\ a_{-3}=\frac{1}{8}(u''-u^2),\ a_{-4}=-\frac{1}{16}(u'''-6uu'),$$

$$a_{-5}=\frac{1}{32}(u^{(4)}-14uu''-11u'^2+2u^3),$$

$$a_{-6}=-\frac{1}{64}(u^{(5)}-30uu'''-60u'u''+30u^2u'),$$

$$a_{-7}=\frac{1}{128}(u^{(6)}-62uu^{(4)}+110u^2u''+170uu'^2-148u'u'''-91u''^2-5u^4),$$

$$a_{-8}=-\frac{1}{256}(u^{(7)}-124uu^{(5)}-238u'u^{(4)}+322u^2u'''+1384uu'u''-$$
$$-128u^3u'+250u'^3-490u''u'''),$$

$$a_{-9}=\frac{1}{512}(u^{(8)}-252uu^{(6)}-670u'u^{(5)}+1004u^2u^{(4)}-$$
$$-1150u''u^{(4)}-519u'''^2+4116uu'u'''+4182u''u'^2-$$
$$-1306u'^2u^2-660u^3u''+3162uu''^2+14u^5).$$

Введем для дробных степеней дифференциальных операторов обозначение:

$\lambda^{0 1/2}$ - квадратный корень из оператора $L_2=\lambda\circ\lambda$.

$\lambda^{0 k/2}$ - к-ая степень оператора $\lambda^{0 1/2}$.

$\left(\lambda^{0 k/2}\right)_+$ - правильная часть ряда Лорана.

Теорема 1. *Пусть*

$$\lambda^{0 k/2}=\sum_{i=-k}^{\infty}a_{-i,k}\xi^{-k},\ k=2n+1,\ n=0,1,2,\ldots$$
$$\lambda^{0 1/2}\circ\lambda^{0 1/2}=L_2$$

Тогда

$$L_2\circ\lambda^{0 k/2}=\lambda^{0(k+4)/2}=\sum_{i=-k-2}^{\infty}a_{-i,k+2}\xi^{-i},$$

$$\left(L_2\circ\lambda^{0 k/2}\right)_+=\sum_{i=-k-2}^{\infty}a_{-i,k+2}\xi^{-i}$$

где

$$a_{-i,k+2}=a_{-i-1,k}+a_{-i,k}u+2a'_{-i-1,k}+a''_{-i,k}$$

Доказательство следует непосредственно из леммы 1.

Таким образом, получаем следующие степени оператора Штурма - Лиувилля:

$$L_+^{03/2}=\left(L_2\circ\lambda^{0 1/2}\right)_+=\xi^3+\frac{3}{2}u\xi+\frac{3}{4}u',$$

$$L_+^{05/2}=\left(L_2\circ\lambda^{0 3/2}\right)_+=\xi^5+\frac{5}{2}u\xi^3+\frac{15}{4}u'\xi^2+\frac{1}{8}(25u''+15u^2)\xi+$$
$$+\frac{1}{16}(30uu'+15u'''),$$

$$L_+^{07/2} = \left(L_2 \circ \lambda^{0\frac{5}{2}}\right)_+ = \xi^7 + \frac{7}{2}u\xi^5 + \frac{35}{2}u'\xi^4 + \frac{1}{8}(105u'' + 35u^2)\xi^3 +$$
$$+\frac{1}{16}(175uu' + 190u''')\xi^2 + \frac{1}{32}(221u^{(4)} + 290uu'' + 185u'^2 +$$
$$+ 70u^3)\xi + \frac{1}{64}(123u^{(5)} + 240uu'' + 150u^2u').$$

Соответствующие дифференциальные операторы $L^{0k/2}$, $k = 3;5$ при условии $\left[L, L^{0k/2}\right] = 0$, дают уравнения Кортевега - де Фриза и высшее уравнение Кортевега - де Фриза:

$$u''' + 6uu' = 0;$$
$$u^{(5)} + 10uu''' + 20u'u'' + 30u^2u' = 0.$$

2. Перейдем к извлечению кубического корня из оператора

$$P = \sum_{ь=0}^{3} u_m \partial^m$$

Теорема 2. *Пусть* $\lambda = \sum_{k=-1}^{\infty} a_{-k}\xi^{-k}$.

Тогда коэффициенты u_m *при* ξ^{-m} *в композиции* $\lambda \circ \lambda \circ \lambda = P$ *имеет вид*

$$u_m = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{i_1,i_2,i_3=-1}^{i_1+i_2+i_3=m} \frac{1}{\alpha!p!}\binom{k}{\alpha} (i_1 - p - \alpha + k)_{p+\alpha-k} \times$$
$$\times (i_2 - k)_\alpha (-1)^{p+\alpha} a_{-i_1+p+\alpha-k} a_{-i_2+k}^{(p)} a_{-i_3}^{(\alpha)}$$

Доказательство Применяя формулу (1), получаем

$$\lambda \circ \lambda \circ \lambda = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\lambda_\xi^{(p)}\lambda_x^{(p)}\right)_\xi^{(\alpha)} \lambda_x^{(\alpha)}$$

Учитывая, что производная суммы равна сумме производных, получаем

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\lambda_\xi^{(p)}\lambda_x^{(p)}\right)_\xi^{(\alpha)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(\lambda_\xi^{(p)}\lambda_x^{(p)})_\xi^{(\alpha)} =$$

(применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения)

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{k}{\alpha} \left(\lambda_\xi^{(p)}\right)_\xi^{(\alpha-k)} \left(\lambda_x^{(p)}\right)_\xi^{(k)} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{1}{p!}\binom{k}{\alpha} \lambda_\xi^{(p+\alpha-k)} \lambda_{x^p\xi^k}^{(p+k)}$$

Следовательно,

$$\lambda \circ \lambda \circ \lambda = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{1}{\alpha!p!}\binom{k}{\alpha} \lambda_\xi^{(p+\alpha-k)} \lambda_{x^p\xi^k}^{(p+k)} \lambda_x^{(\alpha)}$$

Дифференцируя каждый множитель соответственно по $\xi, x^p\xi^k, x$, получаем

$$\lambda_{\xi}^{(p+\alpha-k)}=\sum_{i=-1}^{\infty}a_{-i}(\xi^{-i})^{p+\alpha-k}=\sum_{i=-1}^{\infty}a_{-i}(-1)^{p+\alpha-k}(i)_{p+\alpha-k}\xi^{-i-p-\alpha+k}=$$

$$=\sum_{i=-1}^{\infty}a_{-i+p+\alpha-k}(-1)^{p+\alpha-k}(i-p-\alpha+k)_{p+\alpha-k}\xi^{-i};$$

$$\lambda_{x^p\xi^k}^{(p+k)}=\left(\sum_{i=-1}^{\infty}\xi^{-i}\right)_{x^p\xi^k}^{(p+k)}=\sum_{i=-1}^{\infty}(a_{-i}(-1)^{k}(i)_k\xi^{-i-k})_{x^p}^{p}=$$

$$=\sum_{i=-1}^{\infty}a_{-i}^{(p)}(-1)^k(i)_k\xi^{-i-k}=\sum_{i=-1}^{\infty}a_{-i}^{(p)}(-1)^k(i-k)_k\xi^{-i};$$

$$\lambda_x^{(\alpha)}=\sum_{i=-1}^{\infty}a_{-i}^{(\alpha)}\xi^{-i}.$$

Применим формулу перемножения рядов.

$$\sum_{i=-1}^{\infty}a_{-i}x^{-i}\sum_{j=-1}^{\infty}b_{-j}x^{-j}\sum_{r=1}^{\infty}c_{-r}x^{-r}=\sum_{k=-3}^{\infty}\left(\sum_{i,j,k=-1}^{i+j+r=k}a_{-i}b_{-j}c_{-r}\right)x^{-k}.$$

Тогда получаем, что

$$\lambda\circ\lambda\circ\lambda=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\alpha}\frac{1}{\alpha!p!}\binom{k}{\alpha}\sum_{i_1=1}^{\infty}a_{-i_1}(-1)^{p+\alpha-k}(i_1)_{p+\alpha-k}\xi^{-i_1-p-\alpha+k}\times$$

$$\times\sum_{i_2=-1}^{\infty}a_{-i_2}^{(p)}(-1)^k(i_2)_k\xi^{-i_2-k}\cdot\sum_{i_3=-1}^{\infty}a_{-i_3}^{(\alpha)}\xi^{-i_3}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\alpha}\frac{1}{\alpha!p!}\binom{k}{\alpha}\times$$

$$\times\sum_{i_1=-1}^{\infty}a_{-i_1+p+\alpha-k}(-1)^{p+\alpha-k}(i_1-p-\alpha+k)_{p+\alpha-k}\xi^{-i_1}\times$$

$$\times\sum_{i_2=-1}^{\infty}a_{-i_2+k}^{(p)}(-1)^k(i_2-k)_k\xi^{-i_2}\cdot\sum_{i_3=-1}^{\infty}a_{-i_3}^{(k)}\xi^{-i_3}=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\alpha}\frac{1}{\alpha!p!}\binom{k}{\alpha}\sum_{m=-3}^{\infty}\sum_{i_1,i_2,i_3}^{i_1+i_2+i_3=m}a_{-i_1+p+\alpha-k}(-1)^{p+\alpha-k}\times$$

$$\times(i_1-p-\alpha+k)_{p+\alpha-k}a_{-i_2+k}^{(p)}(-1)^k(i_2-k)_k a_{-i_3}^{(\alpha)}\xi^{-m}=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\alpha}\sum_{m=-3}^{\infty}\sum_{i_1,i_2,i_3}^{i_1+i_2+i_3=m}\frac{1}{\alpha!p!}\binom{k}{\alpha}(-1)^{p+\alpha}(i_1-p-\alpha+k)_{p+\alpha-k}\times$$

$$\times(i_2-k)_\alpha a_{-i_1+p+\alpha-k}a_{-i_2+k}^{(p)}a_{-i_3}^{(\alpha)}\xi^{-m}=$$

$$\sum_{m=-3}^{\infty}\left\{\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\alpha}\sum_{i_1,i_2,i_3=-1}^{i_1+i_2+i_3=m}\frac{1}{\alpha!p!}\binom{k}{\alpha}(-1)^{p+\alpha}(i_1-p-\alpha+k)_{p+\alpha-k}\times\right.$$

$$\left.\times(i_2-k)_k a_{-i_1+p+\alpha-k}a_{-i_2+k}^{(p)}a_{-i_3}^{(\alpha)}\right\}\xi^{-m}$$

Теорема 2 доказана.

3.Рассмотрим дифференциальный оператор $L = u(x)\partial$, где $u(x)$ - некоторая гладкая функция.
Пользуясь вышеописанным методом, вычислим следующие дробные степени оператора L:

$L_+^{02} = u^2\partial^2 + uu'\partial$,

$L_+^{03} = u^3\partial^3 + 3u^2u'\partial^2 + (uu'^2 + u''u^2)\partial$,

$L_+^{04} = u^4\partial^4 + 6u^3u'\partial^3 + (7u^2u'^2 + 4u''u^3)\partial^2 + (uu'^2 + 4u^2u'u'' + u'''u^3)\partial$

Рассмотрим далее операторы

$L_+^{02} = u^2\partial^2 + b(x)\partial$,

$L_+^{03} = u^3\partial^3 + 3u^2u'\partial^2 + b(x)\partial$,

$L_+^{04} = u^4\partial^4 + 6u^3u'\partial^3 + (7u^2u'^2 + 4u''u^3)\partial^2 + b(x)\partial$

где $b(x)$ - некоторая гладкая функция.

Тогда условия $\left[L, L^{0k}\right] = 0, k = 2,3,4$ равносильны соответственно уравнениям:

$u' = \dfrac{b(x)}{u} + c_1$ - уравнение Абеля второго рода [3];

$$(u^2)'' = 2\left(\frac{b(x)}{u} + c_1\right);$$

$$(u(u^2)'')' = 2\left(\frac{b(x)}{u} + c_1\right),$$

где c_1 - постоянная.

Литература

1. *Гельфанд И.М., Дикий Л.А.* Функциональный анализ и его приложения, т.10, вып.4, 1976, с.13-29.
2. *Дорофеев С.Н., Паланджянц Л.Ж., Янтранова С.С.* В сб. "Прикладные вопросы дифференциальной геометрии", 1982,(деп.в ВИНИТИ 07.04.82, №1648-82 деп.,с.87-97).
3. *Паланджянц Л.Ж.* // Дифференциальные уравнения. 1992., т.28, №12.,с.2187-2188.

On fractional degrees of differential operators.

L.Zh.Palandzhants, S.K.Kuizheva, O.P.Sheviakova

Using the method of I.M.Gelfand and L.A.Diki the differential operators are calculated, their zero commutators giving nonlinear differential equations including Abel equation of second degree.

