1997 г. № 2

Труды ФОРА

О ТРЕУГОЛЬНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический институт, Майкоп

Доказывается, что для включения $\overset{k}{\mathrm{O}} \subset \overset{1}{\mathrm{O}} - \mathrm{O} - \cdots - \mathrm{O}$ существует треугольное калибровочное преобразование.

Рассмотрим мультипликативный интеграл [1]

$$\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt, \tag{1}$$

где $A(t)$ -гладкая матричная функция второго порядка.

Предположим, что $A(t) \in A_1$ -алгебре Ли матриц второго порядка со следом нуль. Отметим, что это предположение не ограничивает общности, поскольку, в противном случае, всегда можно удалить диагональ, интегрируя по частям интеграл (1) [2]. Поэтому ограничимся матричной функцией

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $u = u(t)$ -некоторая гладкая функция.

Известно [3], что представление $\Phi = \overset{k}{\mathrm{O}}, k \in N$ алгебры Ли A_1 переводит интеграл (1) в интеграл:

$$\overset{\frown}{\int} E + \Phi(A(t))dt\ .$$

Размерность пространства представления $\overset{k}{\mathrm{O}}$ равна $k+1$.
Другими словами, матричная функция $\Phi(A(t))$ имеет порядок $k+1$. С другой стороны, имеется линейное дифференциальное уравнение $(k+1)$-го порядка

$$v^{(k+1)} = a_s v^{(k-s)}, s = 1,2,...,k \tag{3}$$

(по s суммирование), где $a_s = a_s(t)$ -гладкие функции.
Уравнению (3) соответствует мультипликативный интеграл

$$\overset{\frown}{\int} E + \widetilde{A}(t)dt,\ \text{где}\ \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & ... & a_1 & 0 \end{pmatrix} \in A_k$$

Под A_k понимается совокупность всех матриц $(k+1)$-го порядка со следом нуль. Очевидно, что матрица $\widetilde{A}$ принадлежит пространству представления $\overset{1}{\mathrm{O}}-\mathrm{O}-\ldots-\mathrm{O}$ алгебры Ли A_k. Размерности пространств представлений $\overset{k}{\mathrm{O}}$ и $\overset{1}{\mathrm{O}}-\mathrm{O}-\ldots-\mathrm{O}$ совпадают, поэтому имеет место включение [4] $\overset{k}{\mathrm{O}} \subset \overset{1}{\mathrm{O}}-\mathrm{O}-\ldots-\mathrm{O}$.
Это значит, что существует неособая матричная функция $T=T(t)$ такая, что матрицы $\widetilde{A}(t)$ и $\Phi(A(t))$ связаны между собой калибровочным преобразованием

$$\widetilde{A}(t)=T\Phi(A(t))T^{-1}+T'T^{-1} \tag{4}$$

Калибровочное преобразование будем называть треугольным, если матрица $T(t)$ треугольная.
Возникает естественная задача о нахождении структуры матричной функции $T(t)$. Нужно отметить, что выбор представлений $\overset{k}{\mathrm{O}}$ и $\overset{1}{\mathrm{O}}-\mathrm{O}-\ldots-\mathrm{O}$ неслучаен. Размерности этих представлений пробегают множество всех натуральных чисел, что позволяет распространить эту задачу на системы линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка. При этом, важным фактом является то обстоятельство, что для выбранных матриц $\widetilde{A}(t)$ и $\Phi(A(t))$ калибровочное преобразование является треугольным.
Прежде чем доказать это утверждение, рассмотрим пример.

Представление $\Phi=\overset{2}{\mathrm{O}}$ переводит матрицу $A(t)$ в матрицу

$$\Phi(A(t))=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ u & 0 & 2\\ 0 & u & 0\end{pmatrix}$$

При этом, соответствующее данной матрице линейное уравнение третьего порядка примет вид:

$$y'''=4uy'+2u'y \tag{5}$$

Уравнение (5) равносильно системе линейных уравнений с матрицей

$$\widetilde{A}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2u' & 4u & 0\end{pmatrix}$$

принадлежащей пространству представлений $\overset{1}{\mathrm{O}}-\mathrm{O}$ алгебры Ли A_2. Найдем матрицу $T(t)$, удовлетворяющую условию (4).

Запишем систему уравнений, используя матрицу $\Phi(A(t))$.

$$y_1'=2y_2,\ y_2'=uy_1+2y_2,\ y_3'=uy_2$$

С другой стороны, уравнение (5) может быть записано в виде

$$v_1'=v_2,\ v_2'=v_3,\ v_3'=2u'v_1+4uv_2.$$

Выразив v_s через y_s, получаем $v_1=y_1$, $v_2=2y_2$, $v_3=2uy_1+4y_3$.
Матрица этого преобразования является треугольной:

$$T(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2u & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Матрица T(t) калибровочного преобразования (4) имеет треугольный вид.*
Доказательство. Запишем систему уравнений, используя матрицу $\Phi(A(t))$ [3]:

$$y'_s = uy_{s-1} + s(k-s+1)y_{s+1}, s = 1,2,...,k$$

С другой стороны, уравнение (3) может быть записано с помощью матрицы $\widetilde{A}$ следующим образом: $v' = \widetilde{A}v$, где $v = (v_1, v_2, ..., v_{k+1})$. Кроме того имеет место равенство: $v_{s+1} = v_1^{(s)}, s = 0,1,...,k-1$.

Таким образом, остается выразить $y_1^{(s)}$ через $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{k+1})$, поскольку $y_1 = v_1$. При этом переменные v_s и y_s будут связаны между собой матрицей T, а именно $v_i = T_i^j y_j$ (по j суммирование), i -номер строки, j -номер столбца.

Вычисления показывают, что элементы двух любых соседних строк связаны между собой следующим рекуррентным соотношением:

$$T_i^j = (j-1)(k-j+2)T_{i-1}^{j+1} + (T_{i-1}^i)' + uT_{i-1}^{j+1},$$

где

$$T_i^i = (i-k)!\,k(k-1)\ldots(k-i+1);$$
$$T_{i+1}^i = 0, i = 1,2,\ldots,k+1$$

Треугольность матрицы T следует из того, что для любой строки индексы функций v_i не превосходят индексов функций y_i.
Теорема доказана.
Интересно знать и другие примеры представлений, обладающих этим свойством.

Литература

1. *Мантуров О.В.* Проблемы геометрии. т.22.с.161-215.
2. *Паланджянц Л.Ж.* // Труды ФОРА. Майкоп. 1996,№1. с.65-75
3. *Паланджянц Л.Ж.* // Дифференц. уравнения. 1992. т.28, №10. с.1733-1736.
4. *Мантуров О.В.* Проблемы геометрии. 1986. т.18. с.105-142.

On triangular calibrative transformations

L.Zh.Palandzhyants

Proof is given to the fact that for the inclusion of $\overset{k}{O} \subset \overset{1}{O} - O - \cdots - O$ there exist a triangular gauge transformation.

