1997 г. № 2

Труды ФОРА

О КРИВИЗНЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА

Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический институт, Майкоп

Найдены условия совпадения собственных значений кривизны двух криволинейных мультипликативных интегралов.

Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл

$$\overset{\frown}{\int} E + P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{1}$$

где P и Q - гладкие матричные функции n-го порядка [1,2]

Пусть $K = Q_x - P_y + [Q,P]$ -кривизна интеграла (1).

Наряду с интегралом (1) рассмотрим интеграл

$$\overset{\frown}{\int} E + (P+\alpha)dx + (Q+\beta)dy, \tag{2}$$

где α и β -гладкие матричные функции n-го порядка,

$\alpha = \alpha(x,y,t,s), \beta = \beta(x,y,t,s,)$, где t,s -параметры.

Введем обозначения : $\widetilde{P} = P + \alpha$, $\widetilde{Q} = Q + \beta$,

$\widetilde{K} = \widetilde{Q}_x - \widetilde{P}_y + \left[\widetilde{Q}, \widetilde{P}\right]$ - кривизна интеграла (2);

$$\varpi = \beta_x - \alpha_y + [\beta, \alpha] + [\beta, P] + [Q, \alpha]$$

Заметим, что имеет место равенство: $\widetilde{K} = K + \varpi$.

Пусть $I_m(\varpi)$ -коэффициенты характеристического уравнения матрицы ϖ, причем $I_1(\varpi) = Sp\varpi, m = 1,2,\ldots,n.$ Необходимость рассмотрения интеграла (2) связанно с тем, что при калибровочных преобразованиях подынтегральных матричных функций P и Q соответствующие кривизны связаны преобразованием подобия, которое сохраняет собственные значения матриц.

Цель данной статьи состоит в нахождении условий, при выполнении которых соответствующие собственные значения кривизны K и $\widetilde{K}$ совпадают. В частности, выясняется вопрос о том, какими должны быть при этом коэффициенты характеристического уравнения матрицы.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты характеристического уравнения матрицы* ϖ *удовлетворяют условиям:* $I_1(\varpi) = 0$,

$$mI_m(\varpi) = -Sp(k+\varpi)^m + Spk^m + Sp\varpi^m + I_1(k+\varpi)Sp(k+\varpi)^{m-1} - I_1(k)Spk^{m-1} - \\ - I_1(\varpi)Sp\varpi^{m-1} + \ldots + I_{m-1}(k+\varpi)Sp(k+\varpi) - I_{m-1}(k)Spk - I_{m-1}(\varpi)Sp\varpi, \tag{3}$$

где $m = 1,2,\ldots,n$.

Тогда соответствующие собственные значения кривизны K и $\widetilde{K}$ *совпадают.*

Доказательство. Известно [1], что коэффициенты характеристических уравнений для матриц K, ϖ и $K+\varpi$ удовлетворяют соответственно следующим условиям:

$$mI_m(K) = SpK^m - I_1(K)SpK^{m-1} - \ldots - I_{m-1}(K)SpK, \tag{4}$$

$$mI_m(\varpi) = Sp\varpi^m - I_1(\varpi)Sp\varpi^{m-1} - \ldots - I_{m-1}(\varpi)Sp\varpi, \tag{5}$$

$$mI_m(K+\varpi) = Sp(K+\varpi)^m - I_1(K+\varpi)Sp(K+\varpi)^{m-1} - \ldots - I_{m-1}(K+\varpi)Sp(K+\varpi), \tag{6}$$

Вычитая из равенства (6) соответственно равенства (4) и (5), получаем:

$$m(I_m(K+\varpi) - I_m(K) - I_m(\varpi)) = Sp(K+\varpi)^m - SpK^m - Sp\varpi^m -$$
$$- I_1(K+\varpi)Sp(K+\varpi)^{m-1} + I_1(K)SpK^{m-1} + I_1(\varpi)Sp\varpi^{m-1} -$$
$$- \ldots - I_{m-1}(K+\varpi)Sp(K+\varpi) + I_{m-1}(K)SpK + I_{m-1}(\varpi)Sp\varpi.$$

Учитывая условия (3), находим, что $I_m(K+\varpi) = I_m(K), m = 1,2,\ldots,n,$

откуда следует, что соответствующие собственные значения кривизны K и $\widetilde{K}$ совпадают.

Пример 1. Пусть n=3. Найдем условия (3) в явном виде.

1. $I_1(K+\varpi) = Sp(K+\varpi) = SpK + Sp\varpi = I_1(K) + I_1(\varpi)$

Следовательно,

2. $$2I_2(K+\varpi) = Sp(K+\varpi)^2 - I_1(K+\varpi)Sp(K+\varpi) = SpK^2 + 2SpK\varpi + Sp\varpi^2 - Sp^2K -$$
$$- 2SpKSp\varpi = 2I_2(K) + 2I_2(\varpi) + 2(SpK\varpi - SpKSp\varpi)$$

Так как $Sp\varpi = 0$, то получаем, что $I_2(\varpi) = SpK\varpi$

3. $$3I_3(K+\varpi) = Sp(K+\varpi)^3 - I_1(K+\varpi)Sp(K+\varpi)^2 - I_2(K+\varpi)Sp(K+\varpi) =$$
$$= SpK^3 + Sp(3K^2\varpi + 3K\varpi^2) + Sp\varpi^3 - I_1(K)SpK^2 - I_1(\varpi)SpK^2 - 2I_1(K+\varpi)SpK\varpi -$$
$$- I_1(K)Sp\varpi^2 - I_1(\varpi)Sp\varpi^2 - I_2(K)SpK - I_2(\varpi)Sp\varpi + SpK\varpi SpK - Sp^2KSp\varpi -$$
$$- I_2(K)Sp\varpi - I^2(\varpi)Sp\varpi + (SpK\varpi - SpKSp\varpi)Sp\varpi = 3I_3(K) + 3I_3(\varpi) +$$
$$+ Sp(3K^2\varpi + 3K\varpi^2) - SpKSp(2K\varpi + \varpi^2) - Sp\varpi Sp(2K\varpi + K^2)$$

Так как $I_1(\varpi) = 0$, $I_2(\varpi) = -SpK\varpi$, то получаем, что

$$3I_3(\varpi) = -Sp(3K^2\varpi + 3K\varpi^2) + SpKSp(2K\varpi + \varpi^2)$$

Условия(3) примут вид: $I_1(\varpi)$, $I_2(\varpi) = -SpK\varpi$,

$$3I_3(\varpi) = -Sp(3K^2\varpi + 3K\varpi^2) + SpKSp(2K\varpi + \varpi^2)$$

Таким образом, при выполнении этих условий соответствующие собственные значения кривизны K и $\widetilde{K}$ при n=3 совпадают.

Замечание. Очевидно, что условие $\varpi = 0$ влечет за собой совпадение соответствующих собственных значений кривизны.

В этом случае, в равенстве

$$\beta_x - \alpha_y + [\beta, \alpha] + [\beta, P] + [Q, \alpha] = 0 \tag{7}$$

можно положить $\alpha = 0$. Тогда получаем:

$$\beta_x + [\beta, P] = 0 \tag{8}$$

Условие (8) является условием нулевой кривизны криволинейного мультипликативного интеграла

$$\overset{\frown}{\int} E + Pdx + \beta ds$$

Аналогично, полагая в равенстве (7) $\beta = 0$, получаем:

$\alpha_y + [Q, \alpha] = 0$ (9)

Условие (9) является условием нулевой кривизны криволинейного мультипликативного интеграла

$$\overset{\frown}{\int} E + \alpha dt + Qdy$$

Таким образом, для того чтобы соответствующие собственные значения кривизны K и $\widetilde{K}$ совпадали, достаточно изменить только одну из подынтегральных матричных функций P или Q. При этом матричные функции α и β, которые нужно добавить к функциям P и Q, чтобы соответствующие собственные значения кривизны K и $\widetilde{K}$ совпадали. Можно изменять матричные функции P и Q одновременно. Для этого дополнительно нужно требовать, чтобы матричные функции α и β коммутировали между собой. Подвергая матричные функции P и Q различным изменениям можно получить достаточные условия совпадения собственных значений полученного криволинейного мультипликативного интеграла. При этом указывается возможность приведения кривизны соответствующего криволинейного интеграла к форме Жордана и к диагональному виду.

В качестве примера к этой задаче служат матричные функции

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - U & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -U_x/4 & \lambda + U/2 \\ (\lambda + U/2)(\lambda - U) & U_x/4 \end{pmatrix}$$

где λ -параметр, $U=U(x,y)$-гладкая функция,

Соответствующая кривизна K имеет вид: $K = k(x,y)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

где $k(x,y)=0$ -уравнение Кортевега - де Фриза [3].

Таким образом, сформулированная задача о совпадении собственных значений кривизны K и $\widetilde{K}$ является естественным обобщением указанного примера, интересна само по себе и ее трудно поставить вне терминов теории мультипликативного интеграла.

Лемма 1. Пусть $\widetilde{P} = P + \alpha, \widetilde{Q} = Q + \beta$

где P, α и Q, β -гладкие матричные функции второго порядка.

Введем обозначения: $\Delta = \dfrac{Sp^2 K}{4} - \det K$, $\widetilde{\Delta} = \dfrac{Sp^2 \widetilde{K}}{4} - \det \widetilde{K}$

$$\delta = \frac{Sp^2 \varpi}{4} - \det \varpi.$$

Тогда справедливо равенство:

$$\widetilde{\Delta} = \Delta + \delta + SpK\varpi - \frac{SpKSp\varpi}{2}$$

Доказательство. Воспользуемся тождеством $det(A+B)=detA+detB+SpASpB-SpAB$, справедливым для любых матриц A и B второго порядка.

Следовательно, получаем, что

$$\widetilde{\Delta}=\frac{Sp^2(K+\varpi)}{4}-\det(K+\varpi)=$$

$$=\frac{Sp^2K}{4}+\frac{SpKSp\varpi}{2}+\frac{Sp^2\varpi}{4}-\det K-\det\varpi-SpKSp\varpi+SpK\varpi=$$

$$=\Delta+\delta+SpK\varpi-\frac{SpKSp\varpi}{2}$$

Лемма 1 доказана .

Лемма 2. Пусть $\Delta=0$

Введем обозначения:

$$K=\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix}\ ,\ F(\lambda)=\lambda E-K=\begin{pmatrix}\lambda-k_{11} & -k_{12}\\ -k_{21} & \lambda-k_{22}\end{pmatrix}$$

1. Пусть $rangF(\lambda)=1, k_{21}\neq 0, k_{11}\neq k_{22}$

Тогда справедливо равенство

$$H^{-1}KH=\Lambda \tag{10}$$

где $H=\begin{pmatrix}\dfrac{k_{11}-k_{22}}{2} & 1\\ k_{21} & 0\end{pmatrix}\ ,\ \Lambda=\begin{pmatrix}\dfrac{k_{11}+k_{22}}{2} & 1\\ 0 & \dfrac{k_{11}+k_{22}}{2}\end{pmatrix}$

2. Пусть $rangF(\lambda)=0$

Тогда справедливо равенство

$$K=k_{11}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{11}$$

Доказательство. В самом деле, равенство (10) легко проверяется.

Равенство (10) эквивалентно равенству $KH=K\Lambda$, (12)

$$\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{k_{11}-k_{22}}{2} & 1\\ k_{21} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{k_{11}-k_{22}}{2} & 1\\ k_{21} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{k_{11}+k_{22}}{2} & 1\\ 0 & \dfrac{k_{11}+k_{22}}{2}\end{pmatrix}$$

Убедимся в справедливости равенства (12).

11. $k_{11}\dfrac{k_{11}-k_{22}}{2}+k_{12}k_{21}=\dfrac{k_{11}-k_{22}}{2}\dfrac{k_{11}+k_{22}}{2}$

Учитывая, что $\Delta=0$ или $k_{12}k_{21}=-\dfrac{(k_{11}-k_{22})^2}{4}$, получаем, что

$$k_{11}\frac{k_{11}-k_{22}}{2}-\frac{(k_{11}-k_{22})^2}{4}=\frac{k_{11}-k_{22}}{2}\frac{k_{11}+k_{22}}{2}\ ;\ k_{11}-\frac{k_{11}-k_{22}}{2}=\frac{k_{11}+k_{22}}{2}$$

12. $k_{11}=\dfrac{k_{11}-k_{22}}{2}+\dfrac{k_{11}+k_{22}}{2}$.

21. $k_{21}\dfrac{k_{11}-k_{22}}{2}+k_{22}k_{21}=k_{21}\dfrac{k_{21}+k_{22}}{2}$

22. $k_{21}=k_{21}$

Так как $rangF(\lambda)=0$, то $F(\lambda)$ - нулевая матрица.

Отсюда следует, что $k_{11} = k_{22}$, $k_{12} = k_{21} = 0$ и, следовательно, выполняется равенство (11). Лемма 2 доказана.

Теорема 2. Пусть $\beta = 0$, $P = (p_{ij}), Q = (q_{ij}), i, j, = 1,2,$ а матричная функция α следующий скалярный вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда условиями совпадения собственных значений кривизны K и $\widetilde{K}$ будут соответственно следующие дифференциальные уравнения:

$$(k_{11} - k_{22} - \alpha'_{11y})^2 + 4(k_{12} - \alpha_{11}q_{12})(k_{21} + \alpha_{11}q_{21}) = 0,$$

$$(k_{11} - k_{22} - \alpha'_{22y})^2 + 4(k_{12} + \alpha_{22}q_{12})(k_{21} - \alpha_{22}q_{21}) = 0,$$

$$(k_{11} - k_{22} + 2\alpha_{21}q_{12})^2 + 4k_{12}(k_{21} + \alpha_{21}(q_{22} - q_{11}) - \alpha'_{21y}) = 0,$$

$$(k_{11} - k_{22} + 2\alpha_{21}q_{21})^2 + 4k_{21}(k_{12} + \alpha_{12}(q_{11} - q_{22}) - \alpha'_{12y}) = 0.$$

Доказательство следует непосредственно из лемм 1 и 2.

Литература

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. - М.: Наука, 1988. -552 с.
2. *Dollard J.D.,* Friedman Ch.N. Product integration with application to differential equations. London: Add.-Wesley Publ. Comp., 1979.-254p.
3. *Кричевер И.М., Новиков С.П.* // УМН, Т.35, 1980, №6. С.47 - 68.

On curvature of a curvilinear multiplicative integral

L.Zh.Palandzhyants

Conditions of identity of own meaning of curvatures of two curvilinear multiplicative integrals are found.

