1997 г. № 2

Труды ФОРА

ОБОБЩЕННОЕ ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Дж. Д. Мирзов

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Дается одно обобщение правила Лопиталя.

В курсе математического анализа хорошо известно правило Лопиталя (см., например, [1], стр.293).Покажем, что это правило остается справедливым при более слабых ограничениях.

Теорема 1. *Пусть функция* a: $[t_0,+\infty) \to \mathbf{R}$ *локально суммируема,*

$$\int_{t_0}^{+\infty} a_+(t)\,\mathrm{dt} = +\infty, \tag{1}$$

функция b: $[t_0,+\infty) \to \mathbf{R}$ *существенно ограничена на каждом отрезке промежутка* $[t_0,+\infty)$, *существует конечный или определенного знака бесконечный предел*

$$\lim_{t\to+\infty} b(t) = c \tag{2}$$

$$\int_{t_0}^{t} a_-(\tau)d\tau = o\left(\int_{t_0}^{t} a_+(\tau)d\tau\right), \int_{t_0}^{t} a_-(\tau)|b(\tau)|d\tau = o\left(\int_{t_0}^{t} a_+(\tau)d\tau\right), t\to+\infty, \tag{3}$$

где

$$a_+(t) = \begin{cases} a(t) \text{ при } a(t)\ge 0 \\ 0 \text{ при } a(t)<0, \end{cases} \quad a_-(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } a(t)\ge 0 \\ -a(t) \text{ при } a(t)<0. \end{cases}$$

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} a(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} = c. \tag{4}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $a(t)\ge 0$ при $t\ge t_0$. Пусть функция α: $[t_0,+\infty) \to (0,+\infty)$ такова, что

$$\int_{t_0}^{+\infty} \alpha(t)dt < +\infty, \quad \int_{t_0}^{+\infty} \alpha(t)|b(t)|dt < +\infty \quad . \tag{5}$$

Положим

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} \alpha(t) \text{ при } a(t)=0 \\ 0 \text{ при } a(t)\ne 0, \end{cases}$$

$a^*(t) = a(t) + \alpha^*(t) > 0$ при $t \geq t_0$.
Тогда ввиду (1) и (5) будем иметь

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} a(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} a^*(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_{t_0}^{t} a^*(\tau)d\tau}. \tag{6}$$

Пусть (t_n) - последовательность сходящаяся к $+\infty$ такая, что

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$$

Так как $\int_{t_{n-1}}^{t_n} a^*(\tau)d\tau > 0$, то по теореме Штольца (см., [2], стр.67) и теореме о среднем в силу (2) получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{t_0}^{t_n} a^*(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_{t_0}^{t_n} a^*(\tau)d\tau} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{t_{n-1}}^{t_n} a^*(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_{t_{n-1}}^{t_n} a^*(\tau)d\tau} = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = c,$$

где

$$\operatorname{vraiinf}\{b(t): t_{n-1} \leq t \leq t_n\} \leq \gamma_n \leq \operatorname{vrai\,sup}\{b(t): t_{n-1} \leq t \leq t_n\}.$$

Поэтому из (6) вытекает (4).

Теперь предположим, что $a(t)$ меняет знак на $[t_0, +\infty)$. Ввиду (1), (2), (3) и доказанной части теоремы 1 будем иметь

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} a(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} a_+(\tau)b(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t} a_-(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_{t_0}^{t} a_+(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t} a_-(\tau)d\tau} = c$$

Теорема доказана.

Теорема 2 *Пусть функция* a: $[t_0, +\infty) \to \mathbf{R}$ *суммируема на* $[t_0, +\infty)$,

$$\int_t^{+\infty} a_+(\tau)d\tau > 0 \text{ при } t \geq t_0, \tag{7}$$

имеет место (2),

$$\int_t^{+\infty} a_-(\tau)d\tau = o\left(\int_t^{+\infty} a_+(\tau)d\tau\right), \int_t^{+\infty} a_-(\tau)|b(\tau)|d\tau = o\left(\int_t^{+\infty} a_+(\tau)d\tau\right), t \to +\infty. \tag{8}$$

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\int_t^{+\infty} a(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_t^{+\infty} a(\tau)d\tau} = c. \tag{9}$$

Доказательство. Сначала предположим, что $a(t) \geq 0$ при $t \geq t_0$. Пусть $c = const$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T \geq t_0$, что

$$c - \varepsilon \leq b(t) \leq c + \varepsilon \text{ при } t \geq T$$

Следовательно,

$$c-\varepsilon \le \frac{\int_t^{+\infty} a(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_t^{+\infty} a(\tau)d\tau} \le c+\varepsilon \text{ при } t \ge T,$$

т.е. имеет место (9). Если $c=+\infty$, то для любого $K>0$ найдется T, что

$$b(t) \ge K \text{ при } t \ge T.$$

Отсюда

$$\int_t^{+\infty} a(\tau)b(\tau)d\tau \ge K \int_t^{+\infty} a(\tau)d\tau \text{ при } t \ge T,$$

т.е. имеет место (9).

Теперь предположим, что *a(t)* меняет знак на $[t_0,+\infty)$.
Ввиду (2), (7), (8) и доказанной части теоремы 2 будем иметь

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\int_t^{+\infty} a(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_t^{+\infty} a(\tau)d\tau} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\int_t^{+\infty} a_+(\tau)b(\tau)d\tau - \int_t^{+\infty} a_-(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_t^{+\infty} a_+(\tau)d\tau - \int_t^{+\infty} a_-(\tau)d\tau} = c$$

Теорема доказана.

Теорема 3 *Пусть функция* a: $(0,t_0] \to \mathbf{R}$ *суммируема на каждом отрезке промежутка* $(0,t_0]$,

$$\int_0^{t_0} a_+(\tau)d\tau = +\infty, \tag{10}$$

функция b: $(0,t_0] \to \mathbf{R}$ *существенно ограничена на каждом отрезке промежутка* $(0,t_0]$, *существует конечный или определенного знака бесконечный предел*

$$\lim_{t\to 0_+} b(t) = c, \tag{11}$$

$$\int_t^{t_0} a_-(\tau)d\tau = o\left(\int_t^{t_0} a_+(\tau)d\tau\right), \int_t^{t_0} a_-(\tau)|b(\tau)|d\tau = o\left(\int_t^{t_0} a_+(\tau)d\tau\right), t \to 0_+ \tag{12}$$

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\int_t^{t_0} a(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_t^{t_0} a(\tau)d\tau} = c. \tag{13}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай когда $a(t) \ge 0$ при $0 < t \le t_0$. Пусть α: $(0,t_0] \to (0,+\infty)$ такова, что

$$\int_0^{t_0} \alpha(\tau)d\tau < +\infty, \quad \int_0^{t_0} \alpha(\tau)|b(\tau)|d\tau < +\infty \tag{14}$$

Положим

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{при } a(t) = 0 \\ 0 & \text{при } a(t) \neq 0, \end{cases}$$

$a^*(t) = a(t) + \alpha^*(t) > 0$ при $0 < t \leq t_0$.
Тогда ввиду (10) и (14) будем иметь

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\int_t^{t_0} a(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_t^{t_0} a(\tau)d\tau} = \lim_{t \to 0+} \frac{\int_t^{t_0} a^*(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_t^{t_0} a^*(\tau)d\tau}. \tag{15}$$

Пусть (t_n) - последовательность сходящаяся к нулю такая, что

$$t_1 > t_2 > \cdots > t_n > \cdots$$

Так как $\int_{t_n}^{t_{n-1}} a^*(\tau)d\tau > 0$, то по теореме Штольца и теореме о среднем в силу (11) получаем

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\int_{t_n}^{t_0} a^*(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_{t_n}^{t_0} a^*(\tau)d\tau} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\int_{t_n}^{t_{n-1}} a^*(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_{t_n}^{t_{n-1}} a^*(\tau)d\tau} = \lim_{n \to +\infty} \gamma_n = c$$

где

$$\operatorname{vraiinf}\{b(t): t_n \leq t \leq t_{n-1}\} \leq \gamma_n \leq \operatorname{vrai\,sup}\{b(t): t_n \leq t \leq t_{n-1}\}.$$

что в силу (15) доказывает (13).

Допустим теперь, что $a(t)$ меняет знак на $(0, t_0]$. Ввиду (10), (11), (12) и доказанной части теоремы 3 получаем

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\int_t^{t_0} a(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_t^{t_0} a(\tau)d\tau} = \lim_{t \to 0+} \frac{\int_t^{t_0} a_+(\tau)b(\tau)d\tau - \int_t^{t_0} a_-(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_t^{t_0} a_+(\tau)d\tau - \int_t^{t_0} a_-(\tau)d\tau} = c$$

Теорема доказана.

Теорема 4 *Пусть функция* a: $(0, t_0] \to \mathbf{R}$ *суммируема на* $(0, t_0]$,

$$\int_0^t a_+(\tau)d\tau > 0 \text{ при } 0 < t \leq t_0, \tag{16}$$

функция b *удовлетворяет условию* (11),

$$\int_0^t a_-(\tau)d\tau = o\left(\int_0^t a_+(\tau)d\tau\right), \int_0^t a_-(\tau)|b(\tau)|d\tau = o\left(\int_0^t a_+(\tau)d\tau\right), t \to 0_+. \tag{17}$$

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\int_0^t a(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_0^t a(\tau)d\tau} = c. \tag{18}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай когда $a(t) \geq 0$ при $0 < t \leq t_0$.Если c = *const,* . то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что

$$c-\varepsilon \le b(t) \le c+\varepsilon \text{ при } 0<t\le\delta .$$

Отсюда

$$c-\varepsilon \le \frac{\int_0^t a(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_0^t a(\tau)d\tau} \le c+\varepsilon \text{ при } 0<t\le\delta ,$$

что влечет (18). Если $c=+\infty$, то для любого $K>0$ найдется $\delta>0$, что

$$b(t)\ge K \text{ при } 0<t\le\delta .$$

Следовательно,

$$\frac{\int_0^t a(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_0^t a(\tau)d\tau} > K \text{ при } 0<t\le\delta$$

т.е. и в этом случае имеет место (18).

Допустим теперь, что *a(t)* меняет знак на $\left(0,t_0\right]$.

Тогда в силу (11), (16), (17) и доказанной части теоремы 4 имеем

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\int_0^t a(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_0^t a(\tau)d\tau} = \lim_{t\to 0+}\frac{\int_0^t a_+(\tau)b(\tau)d\tau - \int_0^t a_-(\tau)b(\tau)d\tau}{\int_0^t a_+(\tau)d\tau - \int_0^t a_-(\tau)d\tau} = c .$$

Теорема доказана.

Литература

1. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа, т.1 - М. :Высшая школа, - 1988.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1. - Москва :Наука, - 1966.

Generalised L'Hospital rule

J.D.Mirsov

The article dwells on a generalization of L'Hospital rule.

