2004 г. №9

Т р у д ы Ф О Р А

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ КУБИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ШЕСТЬЮ ЛИНЕЙНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Д. С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Из всего множества дифференциальных систем вида

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} a_{ij}x^i y^j = P(x,y),$$
$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} b_{ij}x^i y^j = Q(x,y)$$

с действительными и взаимно простыми многочленами $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ выделены системы, имеющие шесть и только шесть линейных частных интегралов. Показано, что дифференциальные уравнения траекторий этих систем интегрируются в квадратурах. Проведено полное качественное исследование выделенных систем и построен их фазовый портрет в круге Пуанкаре.

К числу работ, посвященных изучению поведения траекторий системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum_{i+j=0}^{3} a_{ij}x^i y^j = P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{i+j=0}^{3} b_{ij}x^i y^j = Q(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – действительны и взаимно просты, обладающей линейными частными интегралами, относятся заметки [1, 2].

В работе [1] показано, что система (1) может иметь любое число линейных частных интегралов от одного до восьми и не более, и проведено полное качественное исследование (1) в случае, когда их число равно восьми. Поведение траекторий в целом системы (1) изучено в [2] в случае семи линейных частных интегралов. Из результатов [1, 2] следует, что дифференциальное уравнение траекторий системы (1) в случаях семи и восьми линейных частных интегралов интегрируется без квадратур в форме Дарбу [3].

В настоящей заметке сделана попытка выделения из всего множества систем вида (1) систем с шестью и только с шестью линейными частными интегралами, а также проведено полное качественное исследование таких систем.

Согласно [1] среди шести прямых, состоящих их траекторий системы (1), должны быть по крайней мере две пары или одна тройка параллельных между собой прямых.

Случай I. Среди шести прямых, состоящих из траекторий системы (1), имеются ровно две пары параллельных между собой прямых.

Тогда путем подходящего линейного невырожденного преобразования переменных x и y и изменения масштаба времени t систему (1) можно привести к одной из систем (2), (3).

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(x-1)(ckx+y+c), \\ \frac{dy}{dt} &= y(y-1)((c-ck+1)x+cy-2c-1), \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$-1<k<0, \quad c\neq -1, \quad c\neq 0, \quad k\neq \frac{c+1}{c}, \quad k\neq -\frac{2c+1}{c}.$$

Заметим, что условие $k = \frac{c+1}{c}$ $\left(k = -\frac{2c+1}{c}\right)$ гарантирует наличие у системы (2) частного интеграла

$$y - \frac{2c+1}{c} = 0 \left(y + \frac{2c+1}{c}x - \frac{2c+1}{c} = 0\right).$$

Таким образом, система (2) имеет шесть и только шесть линейных частных интегралов: $x = 0$, $x - 1 = 0$, $y = 0$, $y - 1 = 0$, $y + x - 1 = 0$, $y - kx - 1 = 0$.

Дифференциальное уравнение траекторий системы (2) интегрируется в квадратурах, ибо имеет интегрирующий множитель

$$\mu(x,y) = x^{\alpha_1}(x-1)^{\alpha_2}y^{\alpha_3}(y-1)^{\alpha_4}(y+x-1)^{\alpha_5}(y-kx-1)^{\alpha_6},$$

где

$$\alpha_1 = \frac{c}{c+1}, \alpha_2 = \frac{ck-c-1}{c+1}, \alpha_3 = -\frac{1}{c+1}, \alpha_4 = \frac{ck}{c+1}, \alpha_5 = -\frac{c(k+1)}{c+1}, \alpha_6 = -2.$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(x-1)(y-(1+2l)x+l), \\ \frac{dy}{dt} &= y(y-1)(x-(1+2l)y+l), \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$l \neq 0, l \neq -1, l \neq -\frac{1}{2}, l \neq -\frac{1}{3}, l \neq -\frac{2}{3}.$$

Следует заметить, что неравенство $l \neq -\frac{2}{3}$ $(l \neq -13)$ исключает наличие у системы (3) частных интегралов $y + x = 0$ и $y + x - 2 = 0$ (частного интеграла $y - x - 1 = 0$). Тем самым обеспечено наличие у системы (3) шести и только шести частных линейных интегралов:

$$x = 0, \quad x - 1 = 0, \quad y = 0, \quad y - 1 = 0, \quad y - x = 0, \quad y + x - 1 = 0.$$

Дифференциальное уравнение, соответствующее системе (3), интегрируется в квадратурах, так как существует интегрирующий множитель

$$\mu(x,y) = x^{-\frac{1}{2}}(x-1)^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(y-x)^{-1}(y+x-1)^{-1}.$$

Случай II. Среди шести прямых, состоящих из траекторий системы (1), имеются три пары параллельных между собой прямых.

Как показывает исследование системы (1) в этом случае, соответствующим линейным невырожденным преобразованием переменных x и y и изменением масштаба времени t ее можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(x-1)\left(\frac{B+1}{2}x - y + \frac{B+1}{2}\right), \\ \frac{dy}{dt} &= y(y-1)\left(\frac{3B-1}{2}x - By + \frac{B+1}{2}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где $B \neq 0$, $B \neq 1$, $B \neq -1$, $B \neq \frac{1}{3}$, $B \neq -\frac{1}{3}$.

Здесь неравенство $B \neq \frac{1}{3}$ $\left(B \neq -\frac{1}{3}\right)$ исключает наличие у системы (4) частного интеграла $y - 2 = 0$ $(y + x - 1 = 0)$.

Итак, система (4) при сделанных выше ограничениях имеет шесть и только шесть линейных частных интегралов:

$$x = 0, \quad x - 1 = 0, \quad y = 0, \quad y - 1 = 0, \quad y - x = 0, \quad y - x - 1 = 0,$$

а соответствующее ей дифференциальное уравнение имеет интегрирующий множитель

$$\mu(x,y) = x^{-\frac{1}{2}}(y-1)^{-\frac{1}{2}}y^{-1}(x-1)^{-1}(y-x-1)^{-1}.$$

Случай III. В числе шести прямых, состоящих из траекторий системы (1), имеется только одна тройка параллельных между собой прямых.

Посредством невырожденного линейного преобразования переменных x и y систему (1) можно привести к одной из систем (5), (6), (10) и (11).

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(m(c-1)x^2+(m+1)(c-1)xy+cy^2+m(3-2c)x+(m+1)(1-c)y+m(c-2)),\\ \frac{dy}{dt} &= y(y-1)(y-m), \end{aligned} \tag{5}$$

где $m>1, c\neq\frac{2m-1}{m-1}, c\neq\frac{m-2}{m-1}, c\neq 1$.

Неравенство $c\neq\frac{2m-1}{m-1}$ $\left(c\neq\frac{m-2}{m-1}\right)$ исключает существование у системы (5) частного интеграла

$$y+mx-1=0 \quad (y+x-m=0).$$

При указанных выше ограничениях система (5) обладает шестью и только шестью линейными частными интегралами:

$$x=0,\quad y=0,\quad y-1=0,\quad y-m=0,\quad y+x-1=0,\quad y+mx-m=0.$$

Интегрирующий множитель дифференциального уравнения, соответствующего системе (5), записывается в виде

$$\mu(x;y)=y^{\alpha_1}(y-1)^{\alpha_2}(y-m)^{\alpha_3}x^{\alpha_4}(y+x-1)^{\alpha_5}(y+mx-m)^{\alpha_6},$$

где

$$\alpha_1=\frac{1+c^2}{1-c}, \alpha_2=\frac{c^2-mc^2-m-c}{(1-c)(m-1)}, \alpha_3=\frac{cm-mc^2+c^2+1}{(1-c)(m-1)},$$
$$\alpha_4=\frac{c}{c-1}, \alpha_5=\frac{mc-m-c+2}{(1-c)(m-1)}, \alpha_6=\frac{mc-2m-c+1}{(1-c)(m-1)}.$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(k(1-c)x^2+(1-c)(k-1)xy+cy^2-(1-c)(k-1)x+(2-2c-m)y+c-1),\\ \frac{dy}{dt} &= y(y-1)(y-m), \end{aligned} \tag{6}$$

где $-1<k<0,\quad m>0,\quad m\neq 1,\quad c\neq 1$, кроме того, не допускается выполнение следующих серий условий:

$$k=-\frac{3}{m+2}, c=\frac{2m+1}{m-1}; \tag{7}$$

$$k=-m, c=\frac{2m-1}{m-1}; \tag{8}$$

$$k=\frac{1-m}{m}, c=m+1. \tag{9}$$

Выполнение (7), (8), (9) гарантирует существование у системы (6) частного интеграла, соответственно, $y+x-m=0,\quad y+mx-m=0,\quad y+x=0$.

При выше указанных ограничениях система (6) имеет шесть и только шесть линейных частных интегралов:

$$x=0, y=0, y-1=0, y-m=0, y+x-1=0, y-kx-1=0.$$

Дифференциальное уравнение траекторий системы (6) интегрируется без квадратур, и его общий интеграл записывается в виде

$$y^{\alpha_1}(y-m)^{\alpha_3}x^{\alpha_4}(y+x-1)^{\alpha_5}(y-kx-1)^{\alpha_6}=R, R=const,$$

где

$$\alpha_1=\frac{\alpha_5(k+1)(c-1)}{m}, \alpha_3=\frac{\alpha_5(k+1)(m-1)(c-1)}{m}, \alpha_4=-\alpha_5(k+1), \alpha_6=\alpha_5 k, \alpha_5\neq 0.$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x(x-1)\left(\frac{c(1-m)}{m}x+\frac{m-m^2-c}{m}y+c\right),\\ \frac{dy}{dt}&=y(y-1)(y-m),\end{aligned}\tag{10}$$

где $m>1,\quad c\neq 0,\quad c\neq m-m^2,\quad c\neq -m;\quad c\neq 2m.$

Если $c=-m\ \ (c=2m)$, то система (10) имеет частный интеграл $y-x=0,\ \ (y+2x-1=0)$.

Таким образом, выполнение всех ограничений на параметры системы (10) гарантирует наличие у нее шести и только шести линейных частных интегралов

Дифференциальное уравнение траекторий системы (10) интегрируется в квадратурах, так как оно имеет интегрирующий множитель

$$\mu(x;y)=y^{\alpha_1}(y-1)^{\alpha_2}(y-m)^{\alpha_3}x^{\alpha_4}(x-1)^{\alpha_5}(y+(m-1)x-m)^{\alpha_6},$$

где

$$\alpha_1=-2, \alpha_2=\frac{-m}{c}, \alpha_3=\frac{m^2}{c}, \alpha_4=-\frac{m+c}{c}, \alpha_5=\frac{m^2-c}{c}, \alpha_6=\frac{m-m^2-c}{c}.$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x(x-1)\left((m-c)x+\frac{m-m^2-c}{m}y+c\right),\\ \frac{dy}{dt}&=y(y-1)(y-m),\end{aligned}\tag{11}$$

где $m>1,\quad c\neq m-m^2,\quad c\neq m,\quad c\neq m^2,\quad c\neq 2m.$

Если $c=m^2\ \ (c=2m)$, то система (11) имеет частный интеграл $y-(1-m)x-m=\ 0\ \ (y+x-1=0)$.

Итак, принимая во внимание выше отмеченные условия на параметры системы (11), убеждаемся в наличии у нее шести и только шести частных линейных интегралов:

$$x=0,\quad x-1=0,\quad y=0,\quad y-1=0,\quad y-m=0,\quad y+mx-m=0.$$

Дифференциальное уравнение траекторий системы (11) интегрируется в квадратурах в силу существования интегрирующего множителя

$$\mu(x;y)=y^{\alpha_1}(y-1)^{\alpha_2}(y-m)^{\alpha_3}x^{\alpha_4}(x-1)^{\alpha_5}(y+mx-m)^{\alpha_6},$$

где

$$\alpha_1=\frac{m}{c-m}, \alpha_2=-2, \alpha_3=\frac{m^2-m}{c-m}, \alpha_4=\frac{2m-c}{c-m}, \alpha_5=\frac{m^2-c}{c-m}, \alpha_6=\frac{m-m^2-c}{c-m}.$$

Случай IV. Система (11) имеет две тройки параллельных между собой прямых.

Тогда существует невырожденное линейное преобразование переменных x и y, переводящее (1) в систему

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x(x-1)(x-m),\\ \frac{dy}{dt}&=ay(y-1)(y-n),\end{aligned}\tag{12}$$

где $a \neq 0, \quad m > 1, \quad n > 1$, и кроме того, параметры системы (12) не удовлетворяют ни одной из двух серий условий:

$$m = n, \quad a = 1; \tag{13}$$

$$m = \frac{n}{n-1}, \quad a = \frac{1}{(n-1)^2}. \tag{14}$$

Выполнение серий условий (13)((14)) означает существование у системы (12) седьмого частного интеграла $y - x = 0 \ \ (y + (n-1)x - n = 0)$.

Итак, выполнение вышеуказанных ограничений на параметры системы (12) обеспечивает существование у этой системы шести и только шести частных интегралов.

Общий интеграл дифференциального уравнения траекторий системы записывается в виде

$$\frac{y^{\frac{1}{n}}(y-1)^{\frac{1}{1-n}}(y-n)^{\frac{1}{n(n-1)}}}{x^{\frac{a}{m}}(x-1)^{\frac{a}{1-m}}(x-m)^{\frac{a}{m(m-1)}}} = C.$$

Следуя [1], обозначим через E_6 множество всех кубических систем (1), имеющих шесть и только шесть линейных частных интегралов.

Имеет место

Теорема 1. *Если дифференциальная система* (1) *принадлежит множеству* E_6, *то существует линейное невырожденное преобразование переменных* x *и* y, *переводящее* (1) *в одну из систем* (2), (3), (4), (5), (6), (10), (11), (12) *с соответствующими ограничениями на параметры этих систем.*

Дифференциальные уравнения траекторий отмеченных систем интегрируются в квадратурах.

Теорема 2. *Если дифференциальная система* (1) *принадлежит множеству* E_6, *то она не имеет особых точек типа "фокус"и "центр", а также предельных циклов.*

Справедливость данной теоремы следует из того, что каждая точка покоя систем (2)-(6), (10)-(12) принадлежит хотя бы одной из шести прямых – частных интегралов этих систем, а также из теоремы 26 [4].

Все возможные топологические структуры систем (2), (3), (4), (5), (6), (10), (11), и (12) приведены в круге Пуанкаре соответственно на рисунках: 1-8, 9-12, 13-15, 16-24, 25-28, 29-37, 38-47, 48-49.

Замечание 1. В работе [5] утверждается, что если кубическая дифференциальная система (1) имеет в бесконечной части плоскости четыре состояния равновесия,то возможны лишь четыре случая их сосуществования: четыре узла, три узла и седло, два узла и два седла, три седла и узел.

Вместе с тем система (2) при $c = -2, k = -\frac{1}{2}$ имеет в бесконечной части фазовой плоскости четыре точки покоя: $N_1(U = z = 0)$ – устойчивый дикритический узел, $N_2(U = k, z = 0)$ – седло, $N_3(U = -1, z = 0)$ – седлоузел, $N_4(V = z = 0)$ – неустойчивый дикритический узел (см. рис. 6)

Поэтому правомерно считать, что не все случаи сосуществования четырех особых точек системы (1) в бесконечной части фазовой плоскости (БЧП) приведены в упомянутой работе [5].

Замечание 2. Для исследования особых точек в БЧП нами использованы преобразования Пуанкаре [6]:

$$x = \frac{1}{z}, y = \frac{U}{z}; \quad x = \frac{V}{z}, \quad y = \frac{1}{z}.$$

В заключение отметим для сравнения следующее.

Если система (1) принадлежит множеству E_7 и E_8, то она имеет как в конечной части плоскости (КЧП), так и в БЧП только простые особые точки: седла, дикритические узлы и узлы (в случае E_7) [1, 2]. При этом дифференциальное уравнение (1) интегрируется без квадратур в форме Дарбу.

Если же система (1) принадлежит множеству E_6, то она кроме выше названных состояний равновесия может иметь как в КЧП, так и в БЧП сложное состояние равновесия типа "седлоузел", к которому примыкают один параболический и два гиперболических сектора. Дифференциальное уравнение траекторий системы (1) интегрируется лишь в квадратурах.

gjhgjh

gjhgjh

gjhgjh

gjhgjh

df

gjhgjh

gjhgjh

gjhgjh

gjhgjh

gjhgjh

gjhgjh

gjhgjh

Литература

1. *Любимова Р.А.* Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми //Дифференциальные и интегральные уравнения. Горьк. ун-т, 1977, вып. 1, С. 19-22.
2. *Любимова Р.А.* Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми //Дифференциальные и интегральные уравнения. Горьк. ун-т, 1984, С. 66-69.
3. *Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. – Минск: Изд-во БГУ, 1982.
4. *Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю.* Частные интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений//Математ. сб. 183, N 3, 1992.
5. *Шарипов Ш.Р.* О распределении особых точек на экваторе сферы Пуанкаре//Сб. трудов Самаркандского госуниверситета, нов. сер., вып. 144, 1964. – С. 89-92.
6. *Андронов А.А. и др.* Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

On characteristic of cubic differential systems with six line integrals

D. S. Ushkho

Ex all set of differential systems in form

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} a_{ij}x^i y^j = P(x,y),$$
$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} b_{ij}x^i y^j = Q(x,y)$$

with real and coprime polynomials $P(x,y)$ and $Q(x,y)$ the systems have six line private integrals are selected. To show, what this differential equations of trajectories these systems are integrable in quadrature. The full qualitity research these systems are made and these phase portrait in Poincare circle (round) are constructed.

