ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ Э. ЛАНДАУ

Ш.Х. Тутушев

Адыгейский государственный университет, Майкоп

В статье рассматривается известная задача Э. Ландау о распределении чисел с простыми делителями из данного набора арифметических прогрессий. Для количества $V(x)$ таких чисел, не превосходящих заданной границы x, Э. Ландау доказал асимптотическую формулу (методом контурного интегрирования). Эта формула в дальнейшем уточнялась другими математиками. Функция $V(x)$ встречается во многих вопросах теории чисел, например, в аддитивных проблемах. В данной статье аналитическим методом доказана асимптотическая формула для функции $V(x)$ с остаточным членом такого же порядка, как и в законе простых чисел.

Пусть $k \geq 1$ - натуральное число; $l_1(k),\dots,l_\lambda(k)$- классы вычетов по модулю k, взаимно простые с ним, причем $1 \leq \lambda \leq \varphi(k)$, где $\varphi(\ k)$ - функция Эйлера.

Множество всех простых чисел, принадлежащих заданным классам, обозначим через E. Подмножество натурального ряда, все числа которого имеют в своем каноническом разложении только простые из E, обозначим через R.

Пусть

$$V(x) = \sum_{m\leq x, m\in R} 1$$

В 1909 г. Э. Ландау [1, стр. 641-669] аналитическим методом доказал асимптотическое соотношение

$$V(x) \sim \frac{\alpha x}{\ln^{1-\eta} x},\ x \to \infty, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$ – некоторая постоянная, зависящая от $\lambda,\ k$; $\eta = \dfrac{\lambda}{\varphi(k)}$

Этой задачей занимались в дальнейшем и другие математики (см., например, [2], [3], [4]).

Пусть

$$F(s) = \sum_{m\in\mathbf{R}} \frac{1}{m^s} \text{ при } s = \sigma + it,\ \sigma > 1;$$

F(s)- гамма-функция Эйлера. В дальнейшем через $c, c_0, c_1, \dots$ будем обозначать некоторые положительные константы.

В данной статье аналитическим методом доказывается асимптотическая формула для функции $V(x)$ с остаточным членом такого же порядка, как и в законе простых чисел, а именно, при указанных выше обозначениях имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Для фиксированного* $k \geq 3$ *и* λ *с условием* $1 \leq \lambda \leq \varphi(k)$ *существует положительная постоянная* $a < 1$, *такая, что при* $x \to \infty$ *выполняется асимптотическая формула*

$$V(x)=\frac{x}{\ln^{1-\eta}x\cdot\Gamma(\eta)\cdot\Gamma(1-\eta)}\cdot\int_0^{a\ln x}e^{-t}\cdot t^{-\eta}\cdot f\left(1-\frac{t}{\ln x}\right)dt+O\left(x\cdot e^{-c\sqrt{\ln x}}\right) \qquad (2)$$

где $f(s)$ - функция, аналитическая в некоторой окрестности точки $s=1$ и определяемая функциональным уравнением

$$\frac{F(s)}{s}=\frac{f(s)}{(s-1)^{\eta}}$$

причем $f(1)=\alpha_0>0,\ \alpha_0=\alpha_0(\lambda,k)$.

Доказательство. Применяем метод комплексного интегрирования. Строим производящую функцию от $s=\sigma+it,\ \sigma>1$:

$$F(s)=\sum_{m\in\mathrm{R}}\frac{1}{m^s}=\prod_{p\in\mathrm{E}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{\nu=1}^{\lambda}\prod_{p\equiv l_\nu(k)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{\nu=1}^{\lambda}\exp\left(\sum_{p\equiv l_\nu(k)}\frac{1}{p^s}+\tau_1(\nu,s)\right),$$

где τ_1 - функция, аналитическая в области $\sigma>\frac{1}{2}$.

Известно [5, стр.122], что при $\sigma>1$

$$\sum_{p\equiv l\nu(k)}\frac{1}{p^s}=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi_k}\overline{\chi(l_\nu)}\ln L(s,\chi)+\tau_2(\nu,s)$$

где χ_k - характеры по модулю k, $L(s,\chi)$ - L-функции Дирихле, τ_2 - функция, аналитическая в области $\sigma>\frac{1}{2}$

Следовательно, функция $F(s)$ аналитически продолжается в область существования $L(s,\chi)$ и $\ln L(s,\chi)$

Используем следующую информацию об L-функциях Дирихле.

1) При $\chi\neq\chi_0$ ряд $L(s,\chi)$ сходится также и в области $0<\sigma\leq 1$. Все функции $L(s,\chi)$ аналитически продолжаемы в область $0<\sigma\leq 1$ и регулярны там, за исключением функции $L(s,\chi_0)$. Она имеет при $s=1$ полюс первого порядка и разложение:

$$L(s,\chi_0)=\frac{a-1}{s-1}+a_0+a_1(s-1)+\ldots,\quad a_1=\frac{\varphi(k)}{k}$$

2) При достаточно малой константе c' и фиксированном $k\geq 1$ в области

$$\sigma\geq 1-\frac{c'}{\ln(k(|t|+2))}\quad (t-\text{любое}):$$

а) $L(s,\chi)\neq 0$ для всех характеров по модулю k;

б)

$$\frac{L'}{L}(s,\chi)=O\left(\ln\left(k(|t|+2)\right)\right),\ \chi\neq\chi_0;$$

$$\frac{L'}{L}(s,\chi_0)=-\frac{1}{s-1}+O\left(\ln\left(k(|t|+2)\right)\right).$$

([5], стр.121, 149, 150)

Отсюда легко получаем следующие утверждения.

Существуют константы $c_0,c_1,\ldots$, что для любого характера χ по модулю k имеем:

а) В области

$$\left.\begin{aligned} &\sigma \ge 1-\frac{c_0}{\ln|t|},\ |t|\ge 3 \\ &\sigma \ge \tau = 1-\frac{c_0}{\ln|3|},\ |t|\le 3 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

выполняется условие $L(s,\chi)\ne 0$;

б) В области $\sigma \ge 1-\frac{c_0}{\ln|t|}$, $|t|\ge 3$

для главного значения логарифма имеет место оценка

$$|\ln L(s,\chi)| < c_1 \ln\ln|t|.$$

Тогда для функции $F(s)$ имеем:

а) В области (3) функция $F(s)$ регулярна, за исключением точки $s=1$, причем в области

$$\sigma \ge 1-\frac{c_0}{\ln|t|},\ |t|\ge 3$$

справедлива оценка

$$F(s)=\mathrm{O}\left(\ln^{c_2}|t|\right)$$

и на отрезке прямой $\sigma=\tau$, $|t|\le 3$ имеем

$F(s)=\mathrm{O}(1)$;

б) В окрестности точки $s=1$ (например, в круге $|s-1|\le\tau$):

$$F(s)=\frac{P(s)}{(s-1)^{\eta}},$$

где $P(s)=b_0+b_1(s-1)+\ldots$ - аналитическая функция, $b_i=b_i(\lambda,k)$, $i=0,1,\ldots$, причем

$$b_0=P(1)>0.$$

Теперь применяем теорему о сумме коэффициентов ряда Дирихле ([6], стр.75).

Легко заметить, что функция $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$,

где

$$a_n=\begin{cases}1, & \text{если } n\in\mathbf{R},\\ 0 & \text{в противном сл.}\end{cases}$$

удовлетворяет всем условиям этой теоремы (причем в качестве функции $A(n)$ можно взять положительную константу и считать еще $\alpha=1$).

Полагая в названной теореме $b=1+\frac{1}{\ln x}$, $T=\exp(c_3\sqrt{\ln x})$ для любого $x\ge 3$ придем к формуле

$$V(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-it}^{b+it}F(s)\frac{x^s}{s}ds+\mathrm{O}\left(xe^{-c_4\sqrt{\ln x}}\right) \tag{4}$$

$$0<c_4<c_3$$

Этот интеграл заменяем интегралом по контуру ABCDEFGHA, расположенному в области (3) с вырезом вдоль действительной оси для точки $s=1$ и с обходом ее по окружности C_ρ достаточно малого радиуса ρ по часовой стрелке:

$$A(b-Ti), B(b+Ti), C\left(1-\frac{c_0}{\ln T}+Ti\right), D\left(1-\frac{c_0}{\ln 3}+3i\right),$$

$$E\left(1-\frac{c_0}{\ln 3}\right), F(1), G\left(1-\frac{c_0}{\ln 3}-3i\right), H\left(1-\frac{c_0}{\ln T}-Ti\right).$$

В указанной области (3) найдем:

$$\frac{F(s)}{s}=\mathrm{O}\left(\frac{\ln^{c_1}|t|}{t}\right), \text{ если } |t|\geq 3,$$

$$\text{и } \frac{F(s)}{s}=\mathrm{O}(1), \text{ для } |t|\leq 3,$$

в достаточно малой окрестности точки $s=1$ (в круге $|s-1|\leq\tau$)

$\dfrac{F(s)}{s}=\dfrac{f(s)}{(s-1)^\eta}$, $f(s)$ – функция, аналитическая в этой окрестности,

$f(s)=\alpha_0+\alpha_1(s-1)+\ldots$, $\alpha_0=f(1)>0$, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ - некоторые числа, зависящие от λ, k.

Вычисления интегралов по линиям BC, CD, DE, EF, GH, HA и окружности $C\rho$ (при $\rho\to 0$) аналогичны соответствующим вычислениям в [1] и для интеграла в формуле (4) получаем

$$\int\limits_{AB}\frac{F(s)}{s}x^s ds=-\left(\int\limits_{EF}+\int\limits_{FE}\right)+\mathrm{O}\left(x\cdot e^{-c_5\sqrt{\ln x}}\right). \tag{5}$$

Займемся теперь интегралами $\int\limits_{EF}$ и $\int\limits_{FE}$ соответственно по верхнему и нижнему берегам разреза.

$$I_1=\int\limits_{EF}=\int\limits_\tau^1 F(s)\frac{x^s}{s}ds; \text{ полагаем } s=1+re^{\pi i}.$$

Тогда

$$I_1=-\int\limits_{1-\tau}^{0}\frac{f\left(1+re^{\pi i}\right)}{r^\eta}x^{1-r}\cdot e^{-\pi i\eta}\cdot dr=e^{-\pi i\eta}\int\limits_0^{1-\tau}\frac{f(1-r)}{r^\eta}x^{1-r}dr. \tag{6}$$

$$I_2=\int\limits_1^\tau F(s)\frac{x^s}{s}ds; \text{ здесь имеем } s=1+re^{-\pi i};$$

$$I_2=\int\limits_{FE}=e^{\pi i\eta}\int\limits_0^{1-\tau}\frac{f(1-r)}{r^\eta}x^{1-r}dr. \tag{7}$$

Таким образом, из (6) и (7) вытекает

$$I_1+I_2=\gamma_0\cdot\int\limits_0^{1-\tau}\frac{f(1-r)}{r^\eta}x^{1-r}dr, \text{ где } \gamma_0=e^{-\pi i\eta}-e^{\pi i\eta}=-2i\sin\pi\eta$$

Следовательно,

$$\int_{AB} \frac{F(s)}{s} x^s ds = 2i \sin \pi\eta \cdot \int_0^{1-\tau} \frac{f(1-r)}{r^\eta} x^{1-r} dr + O\left(x \cdot e^{-c_5 \sqrt{\ln x}}\right) \qquad (8)$$

Далее $I_3 = \int_0^{1-\tau} \frac{f(1-r)}{r^\eta} x^{1-r} dr = x \int_0^{1-\tau} e^{-r \ln x} \cdot r^{-\eta} \cdot f(1-r) dr$.

Пусть теперь $r \ln x = t$; тогда $I_3 = x \int_0^{(1-\tau)\ln x} e^{-t} \left(\frac{t}{\ln x}\right)^{-\eta} \cdot f\left(1 - \frac{t}{\ln x}\right) \frac{dt}{\ln x} =$

$$= \frac{x}{\ln^{1-\eta} x} \int_0^{a \ln x} e^{-t} \cdot t^{-\eta} \cdot f\left(1 - \frac{t}{\ln x}\right) dt, \qquad (9)$$

где $a = 1 - \tau = \frac{c_0}{\ln 3}$, $0 < a < 1$, так как $0 < c_0 < \ln 3$.

Учитывая, что $\Gamma(\eta) \cdot \Gamma(1-\eta) = \frac{\pi}{\sin \pi\eta}$, из (9), (8), (5) и (4), обозначая $c_5 = c$, получим формулу (2).

Теорема доказана.

Замечание. В случае $\lambda = \varphi(k)$, $k \geq 1$ имеем непосредственно

$$V(x) = \prod_{p/k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot x + O(1),$$

при $k = 1$ соответствующее произведение полагаем равным 1.

Литература

1. *Landau E.* Handbuch der Lehre von der Verteibung der Primzahlen. Bd.2, Leipzig, 1909.
2. *Райков Д. А.* О распределении чисел, простые делители которых принадлежат заданной арифметической прогрессии. Матем.сб., Т.4(46), №3, 1938. Стр. 564-570.
3. *Kuch P.* Über ein Problem in der Theorie der Primzahlen. // "Arkiv *för* matematik", Stockholm, Bd.4, №1, 1960, S. 1-14.
4. *Левин Б. В.*, *Файнлейб А. В.* Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел. // УМН, 1967, Т.22, вып. 3. Стр. 119-197.
5. *Прахар К.* Распределение простых чисел- М. : Мир, - 1967.
6. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. 2-е издание.- М. : Наука, - 1983.

About one problem of a Landau

Sh.Kh. Tutushev

The article dwells upon the well-known problem of A.Landau of distribution of numbers with simple divisors from a given number of arithmetical progressions. For quantity $V(x)$ of such numbers, not exceeding a given boundary x, A.Landau proved the asymptotic formula (by the method of contour integration). This formula was made more precise by other mathematicians. Function $V(x)$ often recurs in the theory of numbers, such as additive problems for example. In this article asymptotic formula for the function $V(x)$ with remainder term of the same order as in law of simple numbers is proved by the analytical method.