1997 г. № 2

Труды ФОРА

ОБ УСЛОВИЯХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБОБЩЕННО СТРОГИХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

Д. С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Для автономной дифференциальной системы второго порядка приводятся достаточные условия единственности обобщенно строгих предельных циклов. Доказано, что дифференциальная система $\frac{dx}{dt}=y+\mu\sum_{i=m}^{k}(-1)^i x^{2i-1}$, $\frac{dy}{dt}=-x+\mu\sum_{i=m}^{k}(-1)^i y^{2i-1}$ где m - четно и k - нечетно, либо m - нечетно и k - четно при $\mu\neq 0$ обладает предельным циклом. При этом указанный цикл является единственным и обобщенно строгим предельным циклом при $m=1, k=2$.

В работе [1] проведена классификация предельных циклов динамических систем на плоскости, основанная на понятиях характеристического показателя цикла, регулярного и обобщенного строгого предельного циклов.

В предлагаемой заметке исследуется вопрос о предельных циклах некоторых динамических систем на плоскости. При этом используются символы $\operatorname{div} Z$, $D_t \operatorname{div} Z$, имеющие тот же смысл, что и в [1]; $\operatorname{div} Z$ - дивергенция векторного поля системы

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y) \tag{1}$$

класса C^k, $k\geq 1$, $D_t \operatorname{div} Z$ - полная производная дивергенции в силу системы (1). Имеет место

Теорема 1. *Пусть в открытой двусвязной области $G\subset \mathbf{R}^2$, не содержащей точек покоя системы (1), расположена простая замкнутая кривая L: $r(x,y)=0$, такая, что:*

1. $D_t \operatorname{div} Z\big|_{r=0}\equiv 0$ и меняет знак в G только при переходе через L

2. $\operatorname{div} Z\big|_{r=0}\geq 0$ (≤ 0)

Тогда, если в G существует предельный цикл l: $x=\varphi(t), y=\psi(t)$, $0\leq t\leq T$ системы (1), пересекающий L, то он является обобщенно строгим неустойчивым (устойчивым) циклом в смысле определения 2 из [1].

Доказательство. Определенности ради будем считать, что внутри (вне) L.

$$D_t \operatorname{div} Z>0\ (<0).$$

Случай $\operatorname{div} Z\geq 0$. Пусть при $t=t_0$ цикл l пересекает L в точке M_0 и при $t=t_1>t_0$ следующая точка его пересечения с L есть M_1. Дуга M_0M_1 может быть расположена внутри или вне L. Если M_0M_1 расположена вне (внутри) L, то

$$\min_{t_0\leq t\leq t_1}\operatorname{div} Z=\operatorname{div} Z\big|_{t=t_1}\geq 0 \tag{2}$$

$$\left(\min_{t_0 \le t \le t_1} \operatorname{div} Z = \operatorname{div} Z\big|_{t=t_0} \ge 0\right) \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что $\operatorname{div} Z$ сохраняет свой знак вдоль цикла l, быть может, обращаясь в нуль в конечном числе точек пересечения с кривой L.

Случай $\operatorname{div} Z \le 0$. Если дуга $M_0 M_1$ расположена вне (внутри) L, то

$$\max_{t_0 \le t \le t_1} \operatorname{div} Z = \operatorname{div} Z\big|_{t=t_0} \le 0 \tag{4}$$

$$\left(\max_{t_0 \le t \le t_1} \operatorname{div} Z = \operatorname{div} Z\big|_{t=t_1} \le 0\right) \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $\operatorname{div} Z$ сохраняет свой знак вдоль цикла l и в случае $\operatorname{div} Z\big|_{r=0} \le 0$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в открытой двусвязной области $G \subset \mathbf{R}^2$, не содержащей точек покоя системы (1) и целиком покрытой кривыми топографической системы Пуанкаре $F(x,y) = C$, расположена простая замкнутая кривая L: $r(x,y) = 0$, такая, что:*

1. Производная функции F в силу системы (1)

$\frac{dF}{dt}\big|_{r=0} \equiv 0$ *и меняет знак в G лишь при переходе через L.*

2. . $D_t \operatorname{div} Z\big|_{r=0} \equiv 0$ *и меняет знак в области G лишь при переходе через L.*

3. $\operatorname{div} Z\big|_{r=0} \ge 0 \ (\le 0)$.

Тогда система (1) в области G имеет единственный предельный цикл, являющийся обобщенно строгим неустойчивым (устойчивым).

Доказательство. Очевидно, в области G среди кривых $F(x,y) = C$ найдутся наименьшая - L_1 из охватывающих L (наибольшая - L_2 из вложенных в L). Поэтому все кривые топографической системы, охватывающие L_1 и вложенные в L_2 в силу условия 1 настоящей теоремы являются циклами однократного пересечения. По принципу кольца [2] в кольцевой области, заключенной между L_1 и L_2, имеется по крайней мере один предельный цикл.

Так как по теореме 1 любой цикл в области G грубый и заданной устойчивости, то, принимая во внимание факт отсутствия точек покоя в G, приходим к выводу, что предельный цикл единственный (два соседних цикла не могут иметь одинаковую устойчивость).

В качестве примера рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = y + x - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x + y - y^3 \tag{6}$$

Начало координат $(0,0)$ - единственное состояние равновесия системы в конечной части фазовой плоскости, имеет характер грубого неустойчивого фокуса. Пусть топографическая система задана в виде $F(x,y) \equiv x^2 + y^2 = C$.

Тогда имеют место равенства

$$\frac{dF}{dt} \equiv 2\left(x^2 + y^2 - \left(x^2 + y^2\right)^2 + 2x^2y^2\right) \tag{7}$$

$$\operatorname{div} Z \equiv 2 - 3\left(x^2 + y^2\right) \tag{8}$$

$$D_t \operatorname{div} Z \equiv -6\left(x^2 + y^2 - \left(x^2 + y^2\right)^2 + 2x^2y^2\right) \tag{9}$$

Переходя к полярным координатам, легко видеть, что общая ветвь

$$\rho^2 = \frac{2}{2 - \sin^2 2\alpha} \tag{10}$$

кривых $\frac{dF}{dt} = 0$ и. $D_t \operatorname{div} Z = 0$ является простой замкнутой кривой. Так как кривая (10) симметрична относительно осей и начала координат и $1 \le \rho^2 \le 2,\ 0 \le \alpha \le 2\pi$, то в кольцевой области $1 < \rho^2 < 2$ расположен хотя бы один предельный цикл. Учитывая неравенство

$\operatorname{div} Z\Big|_{\rho^2 = \frac{2}{2-\sin}} \ge 0$, приходим к выводу, что все условия теоремы 2 выполнены, а значит и предельный цикл системы (6), окружающий начало координат, является единственным, причем устойчивым.

Далее рассмотрим обобщение системы (6)

$$\frac{dx}{dt} = y + \mu\sum_{i=m}^{k}(-1)^i x^{2i-1} \equiv P, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \mu\sum_{i=m}^{k}(-1)^i y^{2i-1} \equiv Q \tag{11}$$

$1 \le m \le k$, причем если m - четно (нечетно), то k - нечетно (четно).
При $m = 1$ начало координат - неустойчивый (устойчивый) грубый фокус, если $\mu > 0$ ($\mu < 0$), а при $m \ge 2$ $(0,0)$ - негрубый фокус или центр [3].

Покажем, что при $\mu \ne 0$ система (11) имеет предельный цикл, окружающий начало координат.

Определение 1. Пусть замкнутая кривая l_1 (l_2), расположенная внутри (вне) простой замкнутой кривой L, есть геометрическое место точек плоскости $\mathbf{R}^2$, удаленных на расстоянии ε от L. Тогда ε - окрестностью кривой L назовем открытую двусвязную область, содержащую L и заключенную между l_1 и l_2 (l_1 и l_2 не имеют точек самопересечения).

Определение 2. Положительной (отрицательной) ε - полуокрестностью замкнутой кривой L назовем множество всех точек ε - окрестности L, заключенных между l_2 и L (l_1 и L), включая точки кривой L.

Определение 3. Замкнутую кривую L_1 назовем вложенной в кривую L_2 ($L_1 \subset L_2$), если для любого $\varepsilon > 0$ не существует точек L_1, расположенных в положительной ε - полуокрестности кривой L_2, за исключением быть может точек, общих для L_1 и L_2.

Для сравнения заметим, что через любую точку области $D \subset \mathbf{R}^2$, покрытой кривыми топографической, системы проходит одна и только одна кривая этой системы [2].
В дальнейшем, говоря о вложенных кривых, будем иметь ввиду определение 3.

Вернемся к системе (11) и покажем прежде всего, это у нее начало координат $(0,0)$ - единственное состояние равновесия в конечной части фазовой плоскости. Для этого перепишем систему алгебраических уравнений $P=0$, $Q=0$ в равносильном виде:

$$y=-\mu(-1)^m x^{2m-1}(1-x^2)\sum_{n=1}^{l} x^{4(n-1)} \equiv \psi(x) \tag{12}$$

$$x=\mu(-1)^m y^{2m-1}(1-y^2)\sum_{n=1}^{l} y^{4(n-1)} \equiv -\psi(y) \tag{13}$$

где $l=\frac{1}{2}(k-m+1)$.

Очевидно, функции (12) и (13) нечетны.

Их графики при m - четном и $\mu>0$ или m - нечетном и $\mu<0$ (m -нечетном и $\mu>0$ или m - четном и $\mu<0$) изображены на рис.1 (рис.2)

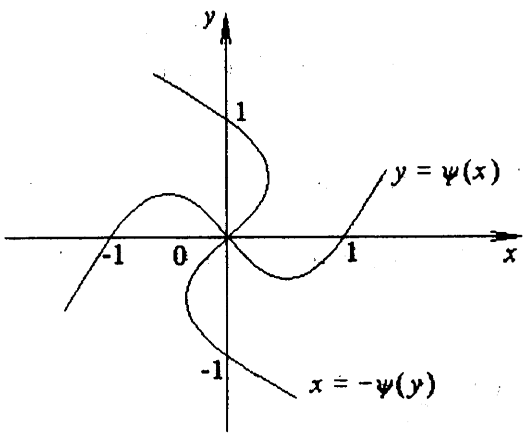

Рис 1

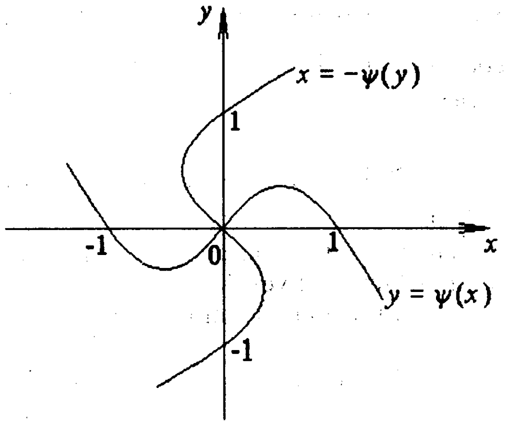

Рис.2

Нетрудно видеть, что при m - четном и $\mu>0$ или m - нечетном и $\mu<0$ (m - нечетном и $\mu>0$ или m - четном и $\mu<0$) прямая $x=-1$ (x=1) не пересекает график функции (13) для $y\in(-1;0)$. Это и означает единственность особой точки $(0,0)$ для рассматриваемой системы в конечной части фазовой плоскости.

В качестве топографической системы для траекторий системы (11) рассмотрим семейство окружностей $F\equiv x^2+y^2\equiv C$

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{dt}=xP+yQ\equiv\mu\sum_{i=m}^{k}(-1)^i(x^{2i}+y^{2i})\equiv\mu W(x,y).$$

Переходя к полярным координатам и считая m - четным, получаем

$$\mu W(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)\equiv\mu\rho^{2m}\Big[\left(\cos^{2m+2}\alpha+\sin^{2m+2}\alpha\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\cos^{2m}\alpha+\sin^{2m}\alpha}{\cos^{2m+2}\alpha+\sin^{2m+2}\alpha}-\rho^2\right)+\rho^4\left(\cos^{2m+6}\alpha+\sin^{2m+6}\alpha\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\cos^{2m+4}\alpha+\sin^{2m+4}\alpha}{\cos^{2m+6}\alpha+\sin^{2m+6}\alpha}-\rho^2\right)+\ldots+\rho^{2(k-m-1)}\left(\cos^{2k}\alpha+\sin^{2k}\alpha\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\cos^{2k-2}\alpha+\sin^{2k-2}\alpha}{\cos^{2k}\alpha+\sin^{2k}\alpha}-\rho^2\right)\Bigg]\equiv\mu\rho^{2m}\left[h_0(\rho^2,\alpha)(g_0(\alpha)-\rho^2)+\right.$$

$$\left.+h_4(\rho^2,\alpha)(g_4(\alpha)-\rho^2)+\ldots+h_{2(k-m-1)}(\rho^2,\alpha)(g_{2(k-m-1)}(\alpha)-\rho^2)\right],$$

$$h_s(\rho^2,\alpha)\equiv\rho^s\varphi_s(\alpha),\ \varphi_s(\alpha)>0\ \forall\alpha\in[0;2\pi],$$
$$s\in M=\{0,4,8,12,\ldots,2(k-m-1)\}$$

Покажем, что $g_r(\alpha)-g_{r+4}(\alpha)\geq 0\ \forall\alpha\in[0;2\pi],\ r,r+4\in M$.

$$g_r(\alpha)-g_{r+4}(\alpha)=\frac{\cos^{2m+r}\alpha+\sin^{2m+r}\alpha}{\cos^{2m+r+2}\alpha+\sin^{2m+r+2}\alpha}-\frac{\cos^{2m+r+4}\alpha+\sin^{2m+r+4}\alpha}{\cos^{2m+r+6}\alpha+\sin^{2m+r+6}\alpha}=$$
$$=\frac{\cos^2 2\alpha\cdot(\sin^2 2\alpha)^{m+\frac{r}{2}}}{4^{m+\frac{r}{2}}\left(\cos^{2m+r+2}\alpha+\sin^{2m+r+2}\alpha\right)\left(\cos^{2m+r+6}\alpha+\sin^{2m+r+6}\alpha\right)}\tag{14}$$

Выражение (14) принимает только неотрицательные значения, причем обращается в нуль лишь в точках $\alpha=\frac{\pi z}{4},z\in\mathbf{Z}$.

Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что $g_s'(\alpha)=0$ только при $\alpha=\frac{\pi z}{4},z\in\mathbf{Z},\ s\in M$. Учитывая, что все кривые $\rho^2=g_s(\alpha),\ s\in M$, симметричны относительно осей и начала декартовых координат, рассмотрим их на отрезке $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$.

Наибольшее (наименьшее) значение функции $g_s(\alpha),\ s\in M$ на указанном отрезке равно

$$g_s\left(\frac{\pi}{4}\right)=2,\ \left(g_s(0)=g_s\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\right).$$

Из выше изложенного следует:

1). Каждая кривая $\rho^2=g_{s_1}(\alpha)$ вложена в кривую $\rho^2=g_{s_2}(\alpha)$ для $s_2<s_1,\ s_1,s_2\in M$

2). Окружность $\rho^2=1$ вложена в каждую кривую $\rho^2=g_s(\alpha),\ s\in M$ и каждая кривая $\rho^2=g_s(\alpha)$ вложена в окружность $\rho^2=2$.

Отсюда с учетом того, что все функции $h_s(\rho^2,\alpha),\ s\in M$, принимают только положительные значения при $\rho\neq 0$, приходим к неравенствам:

$$W\Big|_{\rho^2=g_0(\alpha)}\leq 0\tag{15}$$

$$W\Big|_{\rho^2=g_{2(k-m-1)}(\alpha)}\geq 0\tag{16}$$

Тем самым доказано, что все траектории системы (11), пересекающие с ростом t окружности, радиусы которых удовлетворяют условию $\rho^2 \geq 2$ ($\rho^2 \leq 1$) входят внутрь окружностей (выходят из них), если $\mu > 0$.

Итак, если $\mu > 0$ ($\mu < 0$), m - четно, то в кольцевой области $1 < x^2 + y^2 < 2$ система (11) имеет по крайней мере один устойчивый (неустойчивый) предельный цикл.
Все рассуждения, проведенные при четном m будут справедливы также и для нечетного m с той лишь разницей, что неравенства (15) и (16) поменяются ролями.

Иначе говоря, если m - нечетно, $\mu > 0$ ($\mu < 0$), то в кольцевой области $1 < x^2 + y^2 < 2$ система (11) имеет по крайней мере один неустойчивый (устойчивый) предельный цикл.
Тем самым доказана.

Теорема 3 *Дифференциальная система (11) при* $\mu \neq 0$ *обладает единственным состоянием равновесия* $(0,0)$ *типа "фокус", которое окружено хотя бы одним предельным циклом, устойчивым (неустойчивым), если* $\mu > 0$, *m - четно или* $\mu < 0$, *m -нечетно* ($\mu > 0$, *m -нечетно или* $\mu < 0$. *m - четно).*

При $m = 1, k = 2$ *указанный цикл является единственным и обобщенно строгим предельным циклом.*

Замечание 1. Как отмечено выше, при $m \geq 2$ $(0,0)$ - особая точка второй группы, но проблема различения центра и фокуса решается теоремой 3 в пользу фокуса, характер устойчивости которого определяется данной теоремой.

Замечание 2. Единственность предельного цикла системы (11) в случае $\mu = -1$, $m = 1$, $k = 2$ доказана в работе [4] с помощью обобщенного принципа центральной симметрии.

Теорема 4. *Пусть* $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ *- функции класса* C^k, $k \geq 1$, *в некоторой односвязной открытой области* $G \subset \mathbf{R}^2$, *содержащей единственную точку покоя системы (1) и сплошь заполненной кривыми топографической системы* $F(x,y) = C$.

Тогда система (1) не может иметь в области G *более одного обобщенно строгого предельного цикла, если существует пара простых замкнутых кривых* (l_1, l_2), *удовлетворяющих условиям:*

1). Полная производная функции F *в силу системы (1)* (div Z) *меняет знак в области* G *лишь при переходе через* l_1 (l_2).

2). l_2 *вложена в* l_1.

Доказательство. Заметим, что l_1 - кривая контактов траекторий системы (1) и кривых топографической системы $F(x,y) = C$, и по принципу кольца [2] система имеет в области G по крайней мере один предельный цикл, вообще говоря, нечетное число циклов с учетом их кратностей. Каждый из таких циклов пересекает l_1. Пусть L - один из этих циклов. Для него возможны следующие и только эти случаи взаимного расположения с замкнутой кривой l_2:

а) L пересекает l_2;

б) L совпадает с l_2;

в) l_2 вложена в L.

Отсюда видно, что L - обобщенно строгий предельный цикл только в случае в). Но согласно критерию Дюлака для двусвязной области [2] L, будучи обобщенно строгим предельным циклом, является вместе с тем единственным циклом, в который вложена l_2.

Заметим, что в условиях теоремы 4 система (1) обладает в области G единственным предельным циклом, если l_2 вложена в "наибольшую" из кривых топографической системы, вложенных в l_1.

В работе [5] дана оценка общего числа обобщенно строгих предельных циклов системы (1), где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - многочлены степени не выше n.

Заметим, что квадратичная дифференциальная система не обладает обобщенно строгим предельным циклом на всей вещественной плоскости, так как для нее не выполняется необходимое условие наличия такого цикла, а именно, кривая $\operatorname{div} Z = 0$ не имеет овала.

Несомненно, интерес представляют полиномиальные (степени $n \geq 3$) системы вида (1), имеющие обобщенно строгий предельный цикл. В случае $n = 3$ таких циклов у системы (1) не может быть более одного [5], но если есть обобщенно строгий предельный цикл L, то можно утверждать, что любой другой цикл системы расположен внутри L.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2ay + (Ax + By)(x^2 + y^2 - R^2) \equiv P_3 \\ \frac{dy}{dt} &= 2ax + (Ny - Bx)(x^2 + y^2 - R^2) \equiv Q_3 \end{aligned} \tag{17}$$

$$a \neq 0.$$

Для нее справедлива

Теорема 5. *Если $AN > 0$, то окружность l: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ является устойчивым (неустойчивым) обобщенно строгим предельным циклом при $A < 0$ ($A > 0$). При этом l - единственный цикл системы (17).*

В самом деле, непосредственными вычислениями убеждаемся в выполнении неравенства

$$\operatorname{div} Z\Big|_{(x,y)\in l} = 2(Ax^2 + Ny^2) < 0 \ (>0) \text{ при } A < 0, N < 0 \ (A > 0, N > 0).$$

Отсюда с учетом того, что на l отсутствуют точки покоя системы, приходим к выводу, что l - устойчивый (неустойчивый) обобщенно строгий предельный цикл.

Покажем отсутствие внутри l предельных циклов. Для этого воспользуемся признаком Дюлака [2].

$$\begin{aligned} &(P_3D)'_x + (Q_3D)'_y \equiv A + N \neq 0 \\ &\text{где } D(x,y) = (x^2 + y^2 - R^2)^{-1} \end{aligned} \tag{18}$$

Из знакопостоянства выражения (18) следует отсутствие каких либо замкнутых контуров, составленных из траекторий системы (18) внутри l. Но предельных циклов, окружающих l, система также не имеет, так как l - обобщенно строгий предельный цикл.

Теорема доказана.

Литература

1. *Амелькин В.В.* // Дифференциальные уравнения, 1991., Т.27, №8, с.1291-1296.
2. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. -М.: Наука, -1976.
3. *Амелькин В.В., Лукашевич Н.А, Садовский А.П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. - Минск: Высшая школа, -1982.
4. *Коновалов И.А., Малышев Ю.В., Захаров В.П.//* Дифференциальные уравнения. 1986., Т.22, №10., с.1689-1693.

5. *Амелькин В.В.* Материалы республиканской научно-методической конференции, посвященной 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского. -Одесса: 1992., с.108-109.

On conditions of uniqueness of generalized explicit cycles of differential systems on the plane

D.S.Ushkho

For the autonomous differential system of second order sufficient conditions for uniqueness of generalized explicit cycles are given. It's proved that differential system $\frac{dx}{dt} = y + \mu\sum_{i=m}^{k}(-1)^i x^{2i-1}$, $\frac{dy}{dt} = -x + \mu\sum_{i=m}^{k}(-1)^i y^{2i-1}$, where m-is even and k-is odd or m-is odd and k-is even by $\mu \neq 0$ has an explicit cycle. This cycle appears to be a unique and generalized strict limit cycle with m=1, k=2.

