1997 г. № 2

Труды ФОРА

О ПРИМЕНЕНИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

С.С. Афанасьева

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Известно решение задачи Дирихле для единичного круга. Решение этой задачи для произвольной односвязной плоской области может быть получено, если найти функцию *w=f(z)*, конформно отображающую эту область на единичный круг так, что заданная точка переходит в центр круга. В статье рассмотрено построение такой функции для произвольного кругового двуугольника и, в частности, для кругового сегмента и полукруга. Статья имеет научно-методический характер и может быть полезна студентам и специалистам в области уравнений матем. физики.

Известно, что решение краевых задач математической физики, в частности, задачи Дирихле (о нахождении функции, гармонической в области, по заданным граничным ее значениям), сопряжено с большими трудностями даже для простых областей. Основную трудность при этом составляет нахождение функций Грина для данной области. Однако на плоскости в принципе можно решить задачу Дирихле (а также найти функцию Грина) для любой односвязной области. Для этого необходимо найти функцию комплексного переменного $W = f(z)$, конформно отображающую заданную область в единичный круг $|W| < 1$ так, чтобы произвольная внутренняя точка z_0 этой области переходила в центр круга. Тогда по соответствующим формулам ([1], гл.7) можно получить явное решение указанных задач. В данной статье рассмотрено построение такой функции для произвольного кругового двуугольника и, в частности, для кругового сегмента и полукруга.

Пусть круговой двуугольник имеет хорду $[-a,a]$ и углы, образованные дугами с этой хордой, равные $\pi\alpha_1$ и $\pi\alpha_2$ $(\alpha_2 > \alpha_1)$; z_0 - внутренняя точка. (рис.1)

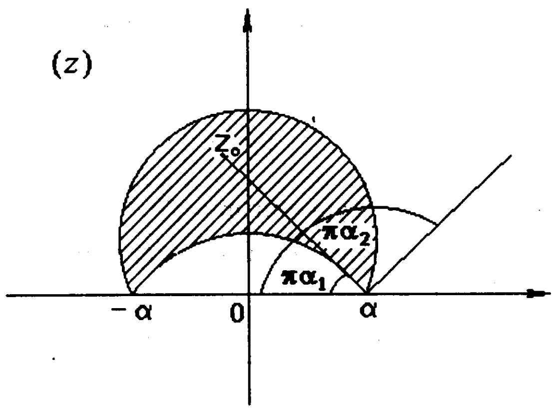

Рис.1

1. Применим дробно - линейное отображение $\xi = \dfrac{z-a}{z+a}$, переводящее точку $z = a$ в $\xi = 0$, с центром инверсии $-a$. Обе окружности отобразятся в лучи с началом в точке

$\xi = 0$, составляющие углы $\pi\alpha_1$ и $\pi\alpha_2$ с отрицательным направлением действительной оси, т.к. действительная ось отображается в себя и угол поворота в точке a равен $\arg \xi'(a) = \arg(\frac{1}{2a}) = 0$, поскольку $\frac{1}{2a} > 0$. Таким образом, двуугольник отобразили в угол на плоскости (ξ); (рис.2)

$$\xi_0 = \xi(z_0) = \frac{z_0 - a}{z_0 + a}.$$

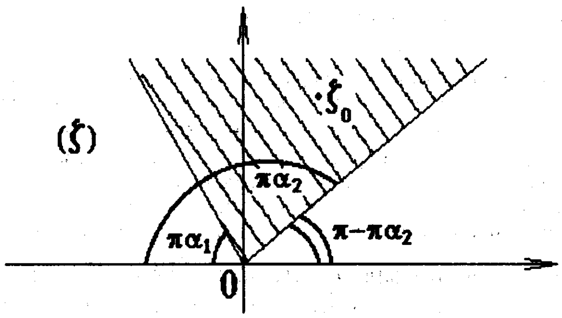

Рис.2

2. Повернем плоскость (ξ) на угол $\varphi = -(\pi - \pi\alpha_2) = -\pi + \pi\alpha_2$ около начала координат с помощью функции $t = e^{i\varphi} \cdot \xi$,

$t = e^{-\pi i} \cdot e^{\pi\alpha_2 i} \cdot \xi$; $t_0 = e^{-\pi i} \cdot e^{\pi\alpha_2 i} \cdot \xi_0$. (рис.3)

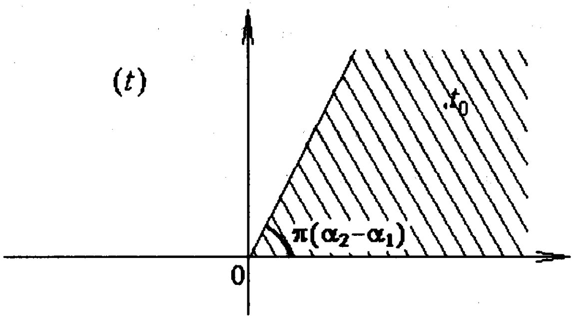

Рис.3

3. Главное значение степенной функции $\omega = t^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}}$ отображает угол плоскости (t) на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$, при этом точка t_0 перейдет в точку

$\omega_0 = e^{-\frac{\pi i}{\alpha_2 - \alpha_1}} \cdot e^{\frac{\pi\alpha_2 i}{\alpha_2 - \alpha_1}} \cdot (\xi_0)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}}$. (рис.4)

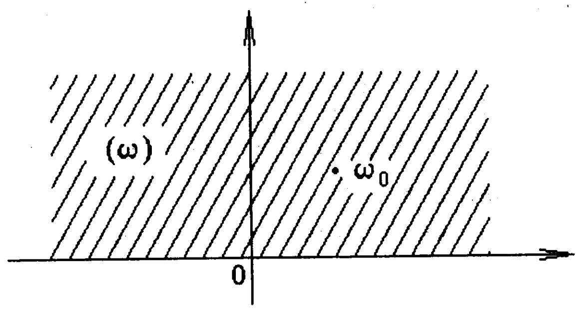

Рис.4

4. Известно ([2], гл. II), что функция $W = e^{i\varphi}\cdot\dfrac{\omega-\omega_0}{\omega-\overline{\omega}_0}$ отображает верхнюю полуплоскость на единичный круг $|W|<1$ так, что точка ω_0 переходит в центр круга $W=0$. Действительный параметр φ при этом произволен.

Найдем

$$\overline{\omega}_0 = e^{\frac{\pi i}{\alpha_2-\alpha_1}}\cdot e^{-\frac{\pi i\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}}\cdot(\overline{\xi}_0)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}}$$

Составим суперпозицию произведенных отображений и упростим, разделив числитель и знаменатель дроби на выражение $e^{-\frac{\pi i}{\alpha_2-\alpha_1}}\cdot e^{\frac{\pi i\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}}$; тогда получим:

$$W = e^{i\varphi}\,\frac{\left(\dfrac{z-a}{z+a}\right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} - \left(\dfrac{z_0-a}{z_0+a}\right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}}}{\left(\dfrac{z-a}{z+a}\right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} - e^{\frac{2\pi i(1-\alpha_2)}{\alpha_2-\alpha_1}}\cdot\left(\dfrac{\overline{z}_0-a}{\overline{z}_0+a}\right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}}} \tag{1}$$

Функция (1) при любом $\varphi\in R$ отображает заданный двуугольник на единичный круг. В частности, при $\alpha_2=\alpha$, $\alpha_1=0$ двуугольник превращается в круговой сегмент с углом $\pi\alpha$ при вершине. Его отображение на единичный круг осуществляет функция, полученная из (1):

$$W = e^{i\varphi}\,\frac{\left(\dfrac{z-a}{z+a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \left(\dfrac{z_0-a}{z_0+a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(\dfrac{z-a}{z+a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - e^{\frac{2\pi i(1-\alpha)}{\alpha}}\cdot\left(\dfrac{\overline{z}_0-a}{\overline{z}_0+a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{2}$$

В частности, при $\alpha = 1/2$ функция (2) отображает верхний полукруг радиуса a на единичный круг:

$$W = e^{i\varphi}\,\frac{\left(\dfrac{z-a}{z+a}\right)^{2} - \left(\dfrac{z_0-a}{z_0+a}\right)^{2}}{\left(\dfrac{z-a}{z+a}\right)^{2} - \left(\dfrac{\overline{z}_0-a}{\overline{z}_0+a}\right)^{2}}$$

После несложных алгебраических преобразований, с точностью до поворота, получается функция:

$$W = e^{i\varphi} \cdot \frac{(z - z_0)(a^2 - z \cdot z_0)}{(z - \overline{z_0})(a^2 - z \cdot \overline{z_0})} \tag{3}$$

Для наших целей можно считать $\varphi = 0$.

Заметим, что функцию (3) можно получить и непосредственно с помощью следующих отображений:

а). $\xi = \frac{z}{a}$, $\xi_0 = \frac{z_0}{a}$ - сжатие плоскости (z).

б). $t = -\frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)$ - функция Жуковского с противоположным знаком - переводит единичный полукруг на верхнюю полуплоскость; $t_0 = -\frac{1}{2}\left(\xi_0 + \frac{1}{\xi_0}\right)$.

в). $W = e^{i\varphi} \cdot \frac{t - t_0}{t - \overline{t_0}}$ - переводит верхнюю полуплоскость на единичный круг так, что $W(t_0) = 0$.

После подстановок и преобразований получим функцию (3).

Литература

1. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. - М.: Наука, -1970 г.
2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. - М.: Наука, -1987 г.
3. *Авдеев Н.Я.* Приложение конформного отображения к решению некоторых краевых задач. // Ученые записки Ростовского-на-Дону госпединститута, вып. 3, 1955, с.71-88.

On application of conformal mapping in boundary value problems

S.S.Afanasieva

Solution of the problem by Dirichlet for unit circle is well known. Solution of this problem for the optional end simply connected flat region may be obtained if one finds the function *w=f(z)*, conformally mapping this region on unit circle so that the given point goes into the center of the circle. The authors trace such a function for optional circular digon and in particular, for a segment of a circle and semicircle.

