ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

И.Н. Жукова, В.Б. Тлячев

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Исследуется поле системы неподвижных точечных зарядов с указанием возможных неточностей, имеющих место при анализе таких полей и при их наглядном описании. Решается задача построения силовых линий электростатического поля. Приводятся алгоритмы для численного моделирования.

Основной задачей электростатики является расчет поля заданного распределения заряда, то есть нахождение в любой точке поля напряженности $\vec{E}$ и потенциала φ, связанных между собой соотношением

$$\vec{E} = -grad\varphi \ . \tag{1}$$

Рассмотрим поле, созданное системой неподвижных точечных зарядов. Напряженность $\vec{E}$ и потенциал φ результирующего поля находятся по принципу суперпозиции суммированием выражений $\vec{E}_i$ и φ_i электростатического поля каждого заряда из данного распределения точечных зарядов:

$$\vec{E} = k\sum_{i=1}^{N} \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_i)}{\left|\vec{r}_0 - \vec{r}_i\right|^3} \cdot q_i \ , \quad \varphi = k\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{\left|\vec{r}_0 - \vec{r}_i\right|} \ , \tag{2}$$

где $\vec{r}_0$ и $\vec{r}_i$ -радиус-векторы точки наблюдения (точки, в которой определяются $\vec{E}$ и φ) и точки расположения заряда q_i соответственно; k=9·10⁹ ($Н\ м^2\ Кл^{-2}$) постоянная величина, N - число зарядов. Сформулируем задачу [1,с.144].

Задача. Два равных точечных заряда $q_1 = q_2 = q$ находятся в точках с координатами (0, 0, $-a$) и (0, 0, $+a$) (рис. 1). Необходимо построить графики зависимостей $E_z(z)$ и $\varphi(z)$ для точек оси $z\ (x=0)$ и $E_x(x)$, $\varphi(x)$ для точек $x\ (z=0)$.

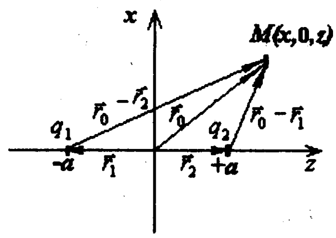


Рис. 1

Решение. Расположим оси координат согласно рисунку 1. Выберем в плоскости xoz произвольную точку $M(x,o,z)$ и найдем в ней потенциал результирующего поля зарядов q_1 и q_2 по принципу суперпозиции, применяя соотношение (2):

$$\varphi = kq\left(\frac{1}{[(z+a)^2 + x^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(z-a)^2 + x^2]^{1/2}}\right). \tag{3}$$

Проекции вектора напряженности на оси координат определим с помощью соотношения (1):

$$E_z = -grad_z\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}; \quad E_x = -grad_x\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \text{то есть}$$

$$\begin{aligned} E_z &= kq\left(\frac{(z+a)}{[(z+a)^2+x^2]^{3/2}} + \frac{(z-a)}{[(z-a)^2+x^2]^{3/2}}\right), \\ E_x &= kqx\left(\frac{1}{[(z+a)^2+x^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(z-a)^2+x^2]^{3/2}}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Выражения (3) и (4) задают значения потенциала φ и напряженности $\vec{E}$ в любой точке плоскости xOz. На рис.2 эта зависимость изображена графически.

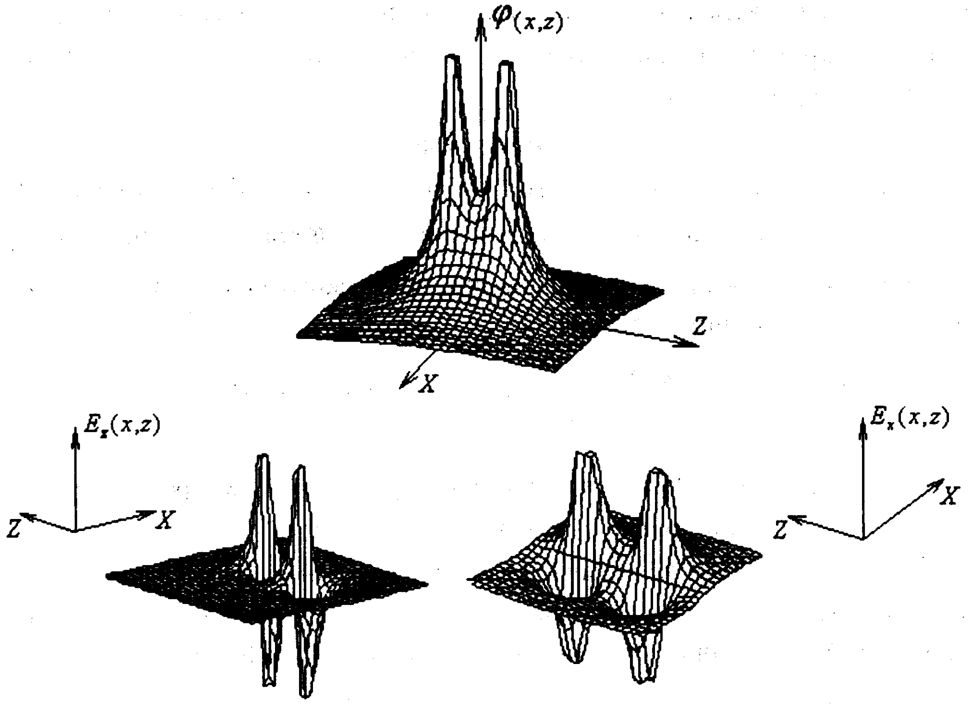
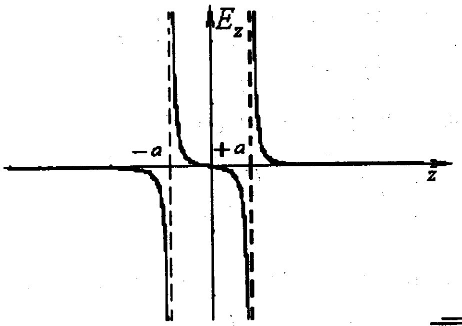


Рис. 2

В точках оси z $(x = 0)$ выражения (3) и (4) имеют вид:

$$\begin{aligned} E_z(z) &= kq\left(\frac{z+a}{|z+a|^3} + \frac{z-a}{|z-a|^3}\right), \quad E_x = 0, \\ \varphi(z) &= kq\left(\frac{1}{|z+a|} + \frac{1}{|z-a|}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Графики $E_z(z)$ и $\varphi(z)$ показаны на рисунке 3.



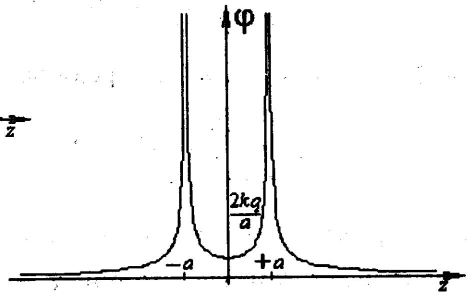


Рис. 3.

Из формул (5) видно, что φ >0 при любом z. При $z \to -a$ и $z \to a$ потенциал $\varphi \to \infty$. Очевидно, что в области $-a < z < a$ потенциал имеет минимум. Исследуя функцию $\varphi(z)$ на экстремум, получаем, что минимальное значение приходится на $z = 0$, при этом $\varphi = 2kq/a$. В точке $z = 0$ функция E_z равна нулю (в силу (1)).

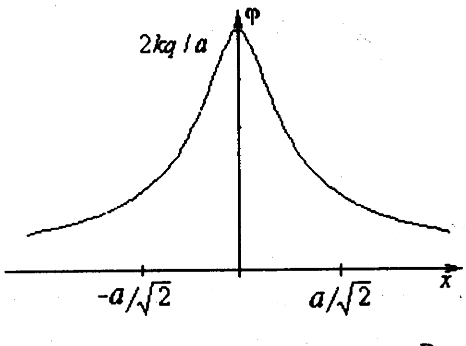
В точках оси $x(z=0)$ выражения (3) и (4) принимают вид:

$$\varphi(x) = kq \cdot \frac{2}{(x^2 + a^2)^{1/2}}, \quad E_x(x) = kqx \cdot \frac{2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}, \quad E_z = 0. \tag{6}$$

Заметим, что при $x = 0$, $E_x = 0$, а при $x \to \infty$, $E_x \to 0$. Следовательно, существует точка x_0, в которой напряженность E_x принимает максимальное значение. Найдем x_0, исследуя функцию $E_x(x)$ на экстремум:

$$\frac{dE_x}{dx} = 0, \quad \Rightarrow \quad x_0 = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

В точках, где функция E_x равна нулю, функция $\varphi(x)$ максимальна (в соответствии с (1)). В точке, где функция E_x имеет экстремум, график функции $\varphi(x)$ имеет перегиб. Графики $E_x(x)$ и $\varphi(x)$ показаны на рис. 4.



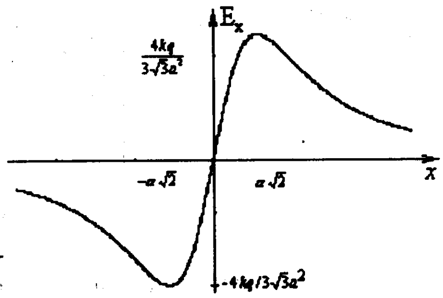


Рис. 4.

Рассмотрим случай, когда поле создано противоположными по знаку и неравными по величине зарядами. Пусть, например $q_1 = -3q$, $q_2 = q$. Выражения для потенциала и проекций напряженности результирующего поля в точках оси $z\ (x = 0)$ будут иметь вид (ср. с (5)):

$$\varphi = kq\left(-\frac{3}{|z+a|}+\frac{1}{|z-a|}\right),\quad E_z = kq\left(-\frac{3(z+a)}{|z+a|^3}+\frac{(z-a)}{|z-a|^3}\right),\quad E_x = 0 \tag{7}$$

В области $z > a$ выражения (7) перепишем следующим образом:

$$\varphi = 2kq\frac{(2a-z)}{(z^2-a^2)},\quad E_z = -2kq\frac{(z^2-4az+a^2)}{(z^2-a^2)^2}. \tag{8}$$

Из анализа выражений (8) следует, что в точке $z_0 = 2a + a\sqrt{3}$ проекция напряженности E_z равна нулю. Замечая, что при $z \to \infty$ проекция $E_z \to 0$, делаем вывод, что в области $z_0 < z < +\infty$ функция $E_z(z)$ в какой-то точке z_m имеет экстремум. (Координата точки z_m является решением кубического уравнения ($z^3 - 6az^2 + 3a^2z - 2a^3 = 0$,) $z_m = [2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}]a$). В этой точке z_m график $\varphi(z)$ имеет перегиб. Примерные графики $E_z(z)$ и $\varphi(z)$ приведены на рис. 5.

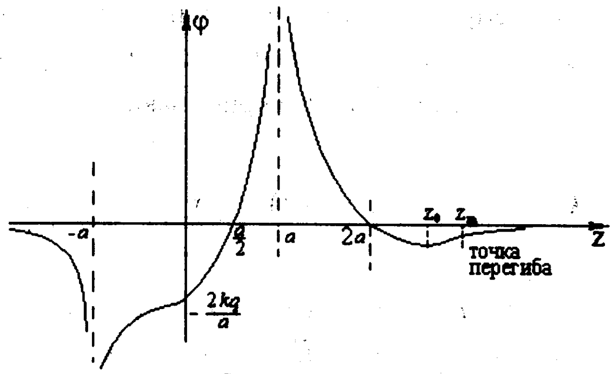


Рис. 5а

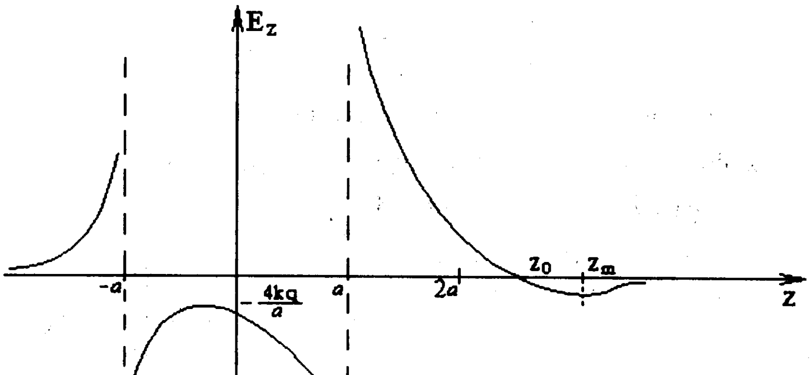


Рис. 5б

Эта задача рассматривается в известном сборнике задач [2, N16.11], однако там график $E_z(z)$ в области $z > a$ изображен для зарядов $q_1 = -3q$, $q_2 = q$ неверно. В пособии [3] приводятся обратные задачи рассмотренной нами (задачи 3.3 и 3.20). Требуется найти расположение зарядов по заданным графикам зависимости потенциала $\varphi(z)$ и проекции напряженности $E_z(z)$ от координаты z.

В связи с исследованием поля системы неподвижных точечных зарядов рассмотрим вопрос о наглядном описании полей. Для этого используются, как известно, эквипотенциальные поверхности ($\varphi = const$) и силовые линии, а в сечении поля какой-либо плоскостью характер поведения скалярной функции φ описывается эквипотенциальными линиями. Качественная картина силовых линий поля двух одинаковых по знаку и одинаковых по величине зарядов приводится в учебниках по физике и хорошо известна. Однако, в области точки, лежащей посередине отрезка, соединяющего заряды (пусть это будет точка O), эта картина силовых линий изображается крайне редко [4,5,7], что связано, очевидно, с нетривиальным поведением силовых линий в точке O (Рис. 6).

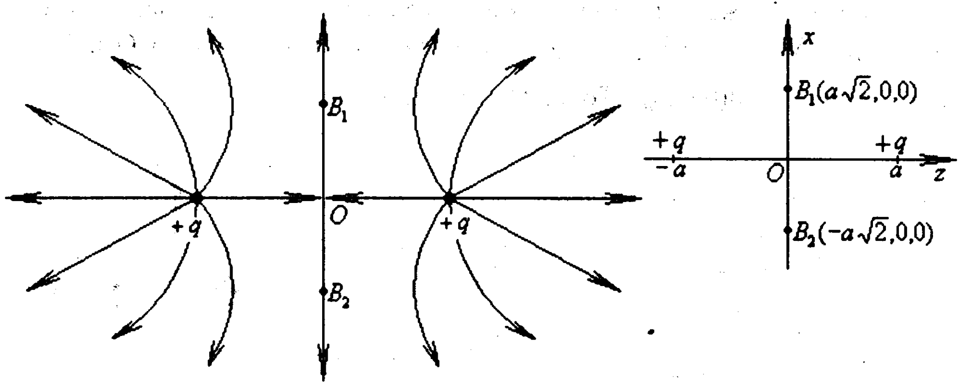


Рис. 6

Как видно из рисунка, к точке O подходят четыре силовых линии - две силовые линии в этой точке заканчиваются, две другие - начинаются. Коган Б.Ю. утверждает [4, задача 40], что точка O является точкой пересечения силовых линий и именно поэтому напряженность в этой точке не может быть отлична от нуля. В теории поля точки, аналогичные точке O, называются точками ветвления [5, стр. 72] и характеризуются тем, что напряженность поля в них равна нулю, а эквипотенциальная поверхность в такой точке пересекает саму себя (рис.7).

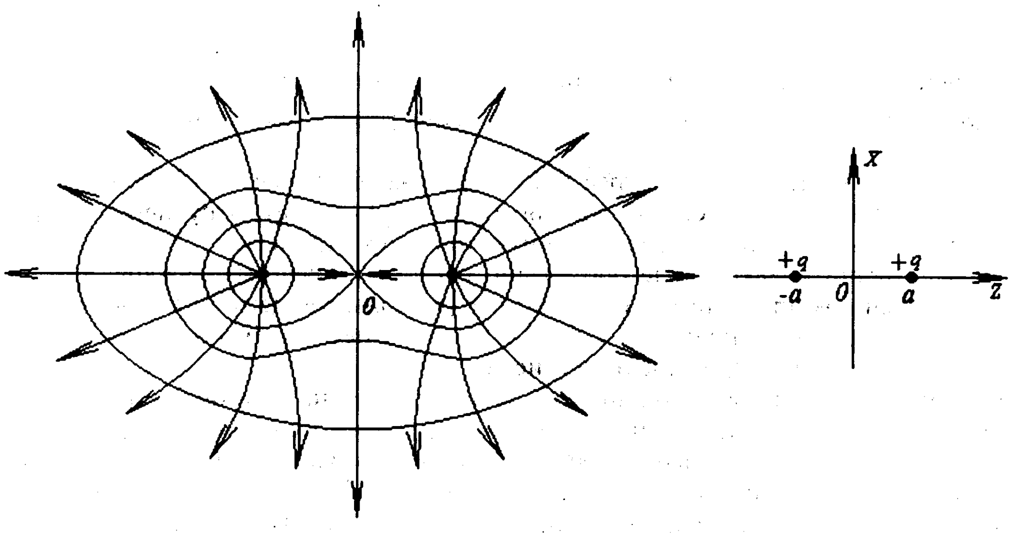


Рис. 7

Эквипотенциальную линию, проходящую через точку ветвления, называют лемнискатой. Поверхность, получаемая при ее вращении вокруг оси Oz будет эквипотенциальной, пересекающей саму себя в точке O. (Рис.7)

В известном сборнике задач по электродинамике [12] точка поля, в которой напряженность равна нулю, называется точкой равновесия (нейтральной точкой), так как пробный заряд, помещенный в эту точку, будет находиться в состоянии неустойчивого равновесия. (Неустойчивость равновесия системы неподвижных электрических зарядов доказывается, как известно, теоремой Ирншоу [13, 14]).

Густота линий напряженности характеризует величину напряженности поля. Сгущение силовых линий вблизи точек B_1 и B_2 (рис. 6) свидетельствует о существовании здесь максимального значения напряженности вдоль оси x, что согласуется с выводами, сделанными ранее (рис.4).

Картина силовых линий поля двух неравных по величине разноименных зарядов часто приводится в учебных пособиях [2,6,8,9], но в области точки ветвления она либо вообще не изображается, либо изображается неверно. Качественная картина силовых линий поля, образованного зарядами $q_1 = -3q$, $q_2 = q$, приведена на рис. 8. (Точки О и В имеют координаты $O(0,0,2a+a\sqrt{3})$, $B(0,0,z_m)$. Точка О – точка ветвления)

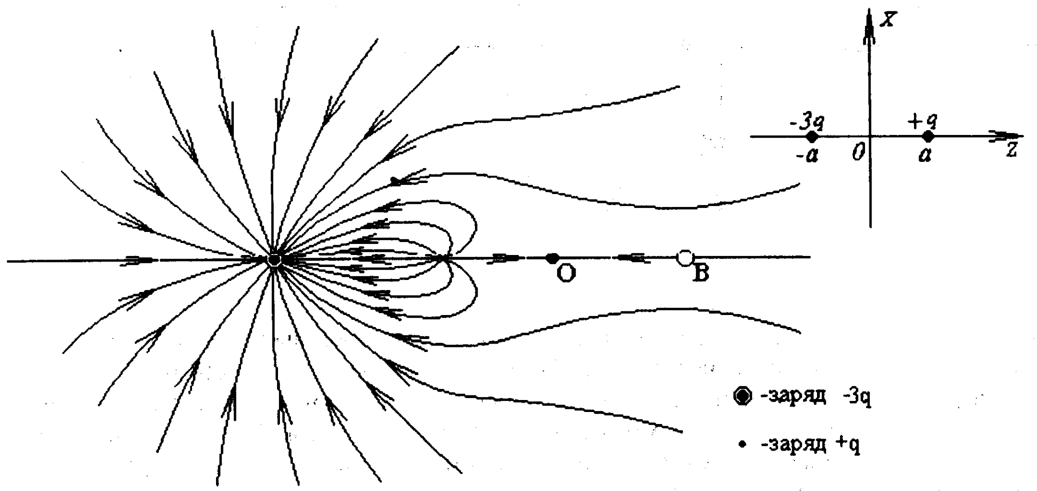


Рис. 8

Искривление и сгущение линий в области точки B (рис.8) свидетельствует о наличии максимума напряженности вдоль оси z, что согласуется с выводами, сделанными ранее (рис.5).

Необходимо заметить, что в курсе общей физики вводится определение силовой линии, но не дается алгоритм ее построения. Поэтому вызывает затруднение вопрос о том, как провести силовую линию через заданную точку пространства?

Если электростатическое поле образовано системой точечных зарядов, картину силовых линий (или эквипотенциальных линий) результирующего поля можно построить графически по способу Максвелла [10, 11]. Сначала необходимо вычертить картину силовых линий каждого заряда отдельно (рис. 9).

Получается сетка четырёхугольников, в которых одна диагональ пропорциональна геометрической сумме напряжённостей полей, а другая - их разности. Соединяя соответствующие вершины углов четырёхугольников, получаем картину результирующего поля.

Методом Максвелла неудобно пользоваться в том случае, если требуется провести силовую линию через заданную точку пространства. В этом случае лучше найти уравнения силовых линий системы точечных зарядов. Решим такую задачу для поля двух точечных зарядов [12, задача 110].

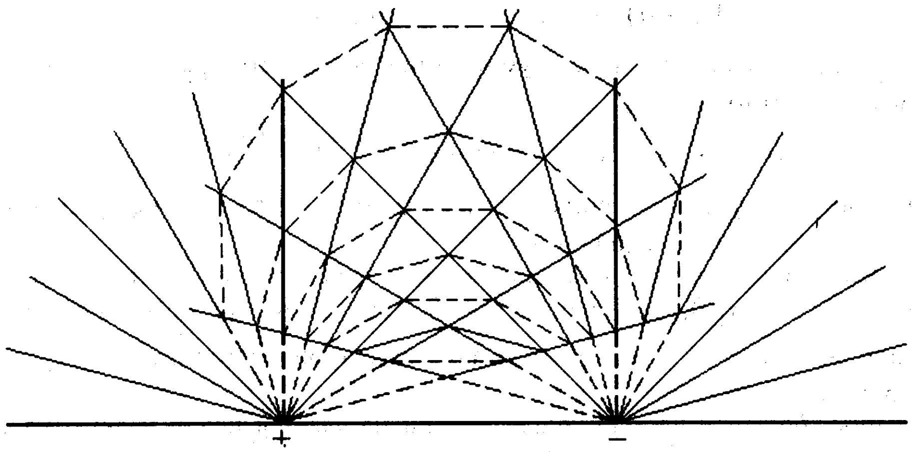


Рис. 9

Задача. Найти уравнение силовых линий системы двух точечных зарядов: заряда $+q$, находящегося в точке с координатами $(0,\ 0,\ a)$ и заряда $\pm q$, находящегося в точке с координатами $(0,\ 0,\ -a)$. Начертить силовые линии.

Решение. Так как элемент силовой линии $d\vec{s}(dx, dy, dz)$ параллелен напряженности поля $\vec{E}$ (в данной точке поля), то уравнение силовых линий будет иметь вид: [13]

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z};$$

Эти уравнения эквивалентны системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = \dfrac{E_x}{E_z}, \\ \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{E_y}{E_z}. \end{cases} \tag{9}$$

Будем строить картину силовых линий в плоскости xOz. Вектор напряженности результирующего поля имеет, согласно (4) проекции

$$E_z = kq\left(\pm\frac{(z+a)}{[(z+a)^2+x^2]^{3/2}} + \frac{(z-a)}{[(z-a)^2+x^2]^{3/2}}\right),$$

$$E_x = kqx\left(\pm\frac{1}{[(z+a)^2+x^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(z-a)^2+x^2]^{3/2}}\right),$$

где знаки "+" и "-" соответствуют случаям, когда в точке $(0,\ 0,\ -a)$ находятся заряды $+q$ и $-q$ соответственно. Подставляя E_z и E_x в (9) и переходя к новым переменным U и V путем замены ($U = \dfrac{z+a}{x}$, $V = \dfrac{z-a}{x}$), получаем дифференциальное уравнение $\mp\dfrac{dU}{(U^2+1)^{3/2}} = \dfrac{dV}{(V^2+1)^{3/2}}$, где “-“ и “+” соответствуют положению в точке $(0,\ 0,\ -a)$ зарядов $+q$ и $-q$ соответственно. После интегрирования получаем уравнение силовых линий:

$$\mp(z+a)[(z+a)^2+x^2]^{-1/2}-(z-a)[(z-a)^2+x^2]^{-1/2}=C_0,$$

где C_0 - постоянная величина. После умножения последнего уравнения на (∓ 1), уравнение силовых линий имеет вид:

$$(z+a)[(z+a)^2+x^2]^{-1/2}\pm(z-a)[(z-a)^2+x^2]^{-1/2}=C. \tag{10}$$

Знак "+" соответствует положению в точке (0, 0, $-a$) заряда $+q$. Задавая значения C, можно построить картину силовых линий.

Если необходимо провести силовую линию через заданную точку пространства (например, точку $M(x_1,0,z_1)$, сначала нужно из уравнения (10) найти постоянную $C_1(x_1,z_1)$ для заданных x_1 и z_1, а затем для найденной постоянной $C_1(x_1,z_1)$ построить силовую линию.

К сожалению, большей частью, аналитически не удается найти уравнения силовой и эквипотенциальной линий. Тогда применяют численное моделирование. Для этого либо используют интегрированные компьютерные системы типа MathCAD, MathLab, Mathematica, в которых применяются встроенные функции для построения векторных и скалярных полей (например PlotVectorField в Mathematica), или программируют на одном из алгоритмических языков. При этом на дисплее компьютера можно построить весьма точную картину силовых линий электрического поля произвольного числа зарядов [15-19]. Опишем основные алгоритмы построения силовых линий.

АЛГОРИТМ I. (Основан на пропорциональности некоторого вектора $\Delta\vec{s}$ вектору $\vec{E}$ [15]).

1. Задаем величины зарядов q_i, их координаты в ПДСК и координаты начальной точки (x_0, y_0), от которой начинается построение силовой линии.*

2. Вычисляем компоненты E_x и E_y вектора $\vec{E}$ в точке (x_0, y_0) по формуле (2).

3. Проводим из точки (x_0, y_0) в новую точку (x_1, y_1) небольшой отрезок длины Δ s в направлении вектора $\vec{E}$. Координаты точки (x_1, y_1) вычисляем по формулам: $x_1 = x_0 + \Delta s\cdot\frac{E_x}{|\vec{E}|}$, $y_1 = y_0 + \Delta s\cdot\frac{E_y}{|\vec{E}|}$. (Длину отрезка Δ s выбираем самостоятельно).

4. Если координаты (x_1, y_1) совпадают с координатами одного из зарядов или расстояния до других зарядов достаточно велики (сравниваем с какой-либо задаваемой величиной, например Δ s), процесс вычисления прекращаем, иначе берем новое состояние, как старое (т. е. $x_0 = x_1, y_0 = y_1$) и возвращаемся к пункту 2.*

Алгоритм I имеет недостатки: необходимо задавать самостоятельно Δ s (произвол в выборе Δ s может приводить к неправильной картине);начальная точка (x_0, y_0) также выбирается произвольно. Причем, чтобы получить правильную плотность силовых линий, надо начинать построение около точек, где распределение силовых линий очевидно.

АЛГОРИТМ II. [16] (Основан на численном решении дифференциального уравнения (9) $dz/dx = E_z/E_x = f(x,z).$)

1. Задаём абсциссу x_0 начальной точки и угол выхода силовой линии α_0.(Значение этого угла может быть любым.)

---

* Для обеспечения правильной плотности линий необходимо самостоятельно выбирать каждую точку от которой начинается рисование силовой линии. Число силовых линий, исходящих из положительного заряда выбирается пропорциональным величине заряда.

2. Вычисляем ординату y_0 по формуле $y_0 = x_0 tg\alpha_0$.

3. Решаем дифференциальное уравнение (9) одним из известных численных методов и находим множество точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. (Простейший - метод Эйлера: $x_{n+1} = x_n + \Delta x,\ y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\cdot \Delta y; (x_0 = \Delta x)$).

4. Изображаем точки $\{(x_i, y_i)\}$. Это множество точек и даёт одну из силовых линий. Для построения следующей силовой линии задаём новый угол α_0 и всё повторяем с шага 1.

АЛГОРИТМ III. [15] (Основан на том факте, что в любой своей точке силовая линия перпендикулярна эквипотенциальной, поэтому достаточно определить эквипотенциальную линию.)

Алгоритм полностью повторяет АЛГОРИТМ I, только на шаге 3 следует вычислять значения x_1, y_1 по формулам $x_1 = x_0 - \Delta s \cdot \frac{E_y}{|\vec{E}|}$, $y_1 = y_0 + \Delta s \cdot \frac{E_x}{|\vec{E}|}$.

АЛГОРИТМ IV. [16] (Сводится к вычислению потенциала в определенных точках, являющихся скалярной суммой потенциалов, создаваемых отдельными зарядами, что упрощает вычисления. Напряжённость поля находится по формуле $\vec{E} = -\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}$.)

1. Задаём координаты зарядов q_i, $(x_i, y_i)\ (i = 1,\ldots,n)$, n – число зарядов; начальную точку (x_0, y_0); шаги $\Delta x, \Delta y$.

2. Вычисляем потенциал

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i, \text{ где } \varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i};\ r_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}.$$

3. Вычисляем

$$E_x = \frac{\varphi(x_0 + \Delta x, y_0) - \varphi(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$E_y = \frac{\varphi(x_0, y_0 + \Delta y) - \varphi(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

4. Вычисляем новую точку (x^1, y^1):

$$x^1 = x_0 + \Delta s \cdot \frac{E_x}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}},$$

$$y^1 = y_0 + \Delta s \cdot \frac{E_y}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}},$$

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

5. Повторяем шаги 3) и 4) АЛГОРИТМА I (заменяя нижние индексы у x и y на верхние соответственно).

В заключение приведём текст программы на языке MSX Basic, реализующий алгоритм построения эквипотенциальных линий.

```
30 PRINT"                    Использована система СГС."
40 PRINT"     Введите заряды Qi, i=1,2; пределы: 1 < [Qi] < 5 (ед. СГС)."
50 PRINT"   Введите шаг потенциала H, пределы: H=1,2,...,10 (0.1 ед. СГС)."
60 DIM A(250),V(3): INPUT Q1,Q2: INPUT H: H=H/10
70 IF ABS(Q1)>ABS(Q2) THEN C=2*INT(ABS(Q1)+.5) ELSE C=2*INT(ABS(Q2)+.5)
80 D= -C
90 FOR I=0 TO 250
100 IF D<=C THEN A(I)=D:K=I:D=D+H ELSE A(I)=100
110 NEXT I
120 E%=1
130 COLOR 15,1,4
140 SCREEN 7:OPEN "GRP:"AS#1
150 PSET(20,50):PRINT#1,"ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ЛИНИИ."
160 PSET(16,70):PRINT#1,"Использована система СГС."
170 PSET(4,80):PRINT#1,"Экран->X:Y=250:180=12.5см:9см."
180 PSET(4,90):PRINT#1,"Между зарядами  -> 6.25см."
190 PSET(15,100):PRINT#1,"Q1=":PSET(40,100):PRINT#1,Q1
200 PSET(65,100):PRINT#1,"     ;   Q2=":PSET(172,100):PRINT#1,Q2
210 PSET(4,110):PRINT#1,"Шаг потенциала H   =":PSET(180,110):PRINT#1,H
220 PSET(4,120):PRINT#1,"Линия потенциала max->":PSET(180,120):PRINT#1,C
230 LINE(20,140)-(220,170),15,B
240 LINE(240,1)-(510,192),2,BF:LINE(250,5)-(500,186),0,BF
250 FOR J=0 TO 89:I=-123
260 V(0)=(Q1/SQR(I+62.5)^2+(J-.5)^2)/20))+(Q2/(SQR((I-63.5)^2+(J-.5)^2)/20))
270 V(1)=(Q1/SQR(I+62.5)^2+(J+.5)^2)/20))+(Q2/(SQR((I-63.5)^2+(J+.5)^2)/20))
280 FOR I=-123 TO 123
290 V(2)=(Q1/SQR((I+63.5)^2+(J+.5)^2/20))+(Q2/(SQR((I-62.5^2+(J+.5)^2)/20))
300 V(3)=(Q1/(SQR((I+63.5)^2+(J-.5)^2)/20))+(Q2/(SQR((I-62.5)^2+(J-.5)^2)/20))
310 AX=V(0):AN=V(0)
320 FOR M=1 TO 3
330 IF V(M)>AX THEN AX=V(M)
340 IF V(M)<AN THEN AN=V(M)
350 NEXT M
360 FOR L=0 TO K
370 IF (A(L)>AN AND A(L)<AX) THEN PSET(375+I,96+J),2:PSET(375+I,96-J),2:GOTO 390
380 PSET(375+I,96+J),0:PSET(375+I,96-J),0
390 V(1)=V(2):V(0)=V(3)
400 NEXT I
410 PSET(45,155):PRINT#1,"Программа работает"
420 NEXT J
430 Q=Q1:A=312:I=1:GOTO 450
440 Q=Q2:A=438:I=2:GOTO 450
450 CIRCLE(A,96),5,15:LINE(A-2,96)-(A+2,96),15
460 IF Q>0 THEN LINE (A,94)-(A,98),15
470 ON I GOTO 440,480
480 FOR I=1 TO 20*E%
490 PSET(45,155):PRINT#1,"Работа закончена'
500 FOR J=1 TO 50
510 B=6.67*6.78^3
520 NEXT J
530 NEXT I
540 SCREEN0:COLOR 15,1,1
550 PRINT"Выйти?-Да"
560 PRINT"Увеличить время высветки?-N"; INPUT L$
```



```
580 INPUT E%
590 IF L$<>"Да" THEN 130
600 END
```

Литература

1. *Новодворская Е.М., Дмитриев Э.М.* Методика проведения упражнений по физике во ВТУЗе. - М.: Высшая школа , 1981.
2. *Гольдфарб Н.И.* Сборник вопросов и задач по физике. - М.: Высшая школа, 1993.
3. *Сена Л.А.* Сборник вопросов и задач по физике. - М.: Высшая школа, 1986.
4. *Коган Б. Ю.* Сто задач по электричеству. - М.: Наука, 1976.
5. *Говорков В. А.* Электрические и магнитные поля. - М.: Энергия, 1968.
6. *Орир Дж.* Физика. - М.: Мир, 1981, стр.236.
7. *Иоффе А.Ф.* Курс физики. Т.1. - М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1940, стр.210.
8. *Тарасов Л.В, Тарасова А.Н.* Вопросы и задачи по физике. - М:. Высшая школа, 1984, стр.172.
9. Берклеевский курс физики. Т. 2. Парселл Э. Электричество и магнетизм. - М.: Наука, 1975, стр.36.
10. *Путилов К. Л.* Курс физики. Т. 2. - М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1956, стр.22.
11. *Рязанов Г.А.* Опыты и моделирование при изучении электромагнитного поля. - М.: Наука, 1966, стр.118.
12. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. - М.: Наука, 1970.
13. *Тамм Е.И.* Основы теории электричества. - М.: Наука, 1976, стр.55, стр. 95.
14. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т.III. Электричество. - М.: Наука, 1977.
15. *Гулд Х., Тобочник Я.* Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть 1. - М.: Мир, 1990.
16. *Бурсиан Э.В.* Задачи по физике для компьютера. - М.: Просвещение, 1991.
17. *Жаблон К., Симон Ж.-К.* Применение ЭВМ для численного моделирования в физике. - М.: Наука, 1983.
18. *Матвеев А.Н.* ЭВМ в курсе общей физики. - М.: МГУ, 1992.
19. *Кондратьев А.С.* Применение персонального MSX-компьютера в школьном курсе физики. - Л.: ЛГПИ, 1988.

On one problem of electrostatics

I.N.Zhukova, V.B.Tlyachev

The authors study the field of the system of fixed point charges, dwelling upon a range of possible errors while analyzing and describing these fields. A solution of the problem of tracing power lines of electrostatic fields is given with algorithms for their numeric modeling.

