2004 г. №9

Т р у д ы Ф О Р А

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ВОЗМУЩЕННОЙ "БЕЛЫМ ШУМОМ"

М. М. Шумафов

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В статье некоторые результаты работ [1-3] , относящиеся к исследованию устойчивости одной детерминированной системы, распространяются на стохастический случай.

Введение

В настоящей статье рассматривается система

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + ay + \sigma x\dot{\xi}(t), \\ \dot{y} = bx + g(y), \end{cases} \tag{1}$$

где $x, y \in \mathbb{R}, x = x(t), y = y(t), t \geq 0; a, b$ и σ – постоянные, функции $f(x)$ и $g(y)$ являются непрерывно дифференцируемыми от своих аргументов, $f(0) = g(0) = 0$; $\dot{\xi}(t)$ – случайный процесс типа "белого"шума. Точки над символами обозначают дифференцирование по времени.

Будем понимать систему(1) как систему стохастических уравнений в смысле Ито [4-6]:

$$\begin{cases} dx(t) = [f(x) + ay(t)]dt + \sigma x(t)d\xi(t), \\ dy(t) = [bx(t) + g(y)]dt, \end{cases} \tag{2}$$

где $\xi(t)$ - винеровсий процесс.

Детерминированный случай $\sigma = 0$ был рассмотрен Н.П. Егуриным [1] и Н.Г. Малкиным [2] в случае, когда $g(y)$ – линейная функция и Н.Н. Красовским [3] в случае, когда $g(y)$ – нелинейная функция.

Цель настоящей статьи – распространить на стохастический случай для системы (1) результаты работ [1-3].

Исследование устойчивости стохастический системы (1) будем вести модифицированным методом функций Ляпунова [4,6].

Напомним некоторые понятия стохастической теории устойчивости [4-6].

Определение 1. *Случайным процессом, определенным на промежутке $T \subset \mathbb{R}$ со значениями из $\mathbb{R}$, называется измеримая функция $x(t, \omega)$ такая, что при каждом фиксированном $t \in T$ $x(t, \omega)$ – случайная величина.*

(Здесь t интерпретируется как время, а ω – как элементарное событие).

Определение 2. *Случайный процесс $x(t, \omega), t \in T$ называется гауссовским, если его значения $x(t_1, \omega), ..., x(t_n, \omega)$ при любых $t_1, ..., t_n \in T$ в совокупности являются гауссовскими (нормальными) случайными величинами.*

Определение 3. *Случайным процессом белого шума $x(t) = x(t, \omega), t \in T$ называется гауссовский процесс, для которого*

$$Mx(t, \omega) = 0 \; \forall \; t \in T,$$

$$M[x(s) \cdot x(t)] = \delta(t - s).$$

Здесь δ обозначает дельта-функцию Дирака, а – знак математического ожидания.

Определение 4. *Винеровским случайным процессом $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ называется случайный процесс, у которого*

1) $\xi(0) = 0$;

2) на любом интервале (s,t) *приращение* $\xi(t) - \xi(s)$ *является гауссовским с нулевым средним и дисперсией, являющейся линейной функцией от* $t - s$*, причем величина* $\xi(t) - \xi(s)$ *имеет такое же распределение вероятностей, что и* $\xi(t - s)$*;*

3) для любых $0 < t_1 < ... < t_n$ *приращения* $\xi(t_1) - \xi(0), ..., \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ *являются независимыми.*

Далее, по заданному винеровскому процессу $\xi(t,\omega)$ определяется понятие *стохастического интервала Ито* по стохастической мере, порожденной процессом $\xi(t,\omega)$ и понятие *стохастического дифференциала* в смысле Ито (см.[4-6]).

Стохастическими дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые связывают стохастические дифференциалы искомых и заданных винеровских процессов.

Решение системы (2) определяется как решение соответствующей системы интегральных уравнений.

Через $(x(t,\omega;t_0,x_0), y(t,\omega;t_0,x_0))$ будем обозначать векторный случайный процесс, выходящий при $t = t_0$ из точки (x_0, y_0).

Определение 5. *Тривиальное решение* $(x(t,\omega) \equiv 0, y(t,\omega) \equiv 0)$ *системы (2) называется асимптотически устойчивым в целом, если:*

1) для любых t_0 *и* $\varepsilon > o$

$$\lim P\{\sup_{t>t_0}[(x(t,\omega;t_0,x_0))^2 + (y(t,\omega;t_0,x_0))^2] > \varepsilon\} = 0,$$

2) для всех t_0, x_0 *и* y_0

$$P\{\lim_{t\to+\infty} x(t,\omega;t_0,x_0,y_0) = 0\} = 1,$$

$$P\{\lim_{t\to+\infty} y(t,\omega;t_0,x_0,y_0) = 0\} = 1.$$

Здесь P обозначает вероятность.

Определение 6. *Решение* $(x(t,\omega) \equiv 0, y(t,\omega) \equiv 0)$ *системы (2) называется экспоненциально устойчивым в среднем квадратическом, если существуют такие положительные константы* A *и* α*,* что

$$M[(x(t,\omega))^2 + (y(t,\omega))^2] \le A(x_0^2 + y_0^2)\exp\{-\alpha(t - t_0)\}.$$

Пусть L – производящий дифференциальный оператор процесса $(x(t,\omega), y(t,\omega))$, определяемого системой (2):

$$L = [f(x) + ay]\frac{\partial}{\partial x} + [bx + g(y)]\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

(В классе функций C^1 значение оператора L совпадает с соответствующим значением оператора "производной в силу системы(2)".

Приведем одно общее утверждение из стохастической теории устойчивости, которое нам понадобится в дальнейшем.

Лемма [4]. *Для того, чтобы тривиальное решение* $(x(t,\omega) \equiv 0, y(t,\omega) \equiv 0)$ *было асимптотически устойчивым в целом, достаточно, чтобы существовала положительно-определенная дважды непрерывно дифференцируемая функция* $V(x,y)$ *такая, что функция* $LV(x,y)$ *отрицательно определена, причем*

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} V(x,y) = +\infty.$$

Заметим, что это утверждение обобщает хорошо известную теорему Барбашина-Красовского (в ее частном виде) на стохастические системы.

2. Формулировка результата и доказательство теоремы об устойчивости системы (1).

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема. *Предположим, что существуют константы* $\delta_0 > 0, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0$ *и* Δ *такие, что выполнены условия:*

$$1)\ c_1\frac{f(x)}{x} - ab > \delta_0\ \forall x \neq 0,$$

$$2)\ c_1 + \frac{f(x)}{x} < -\delta_1\ \forall x \neq 0,$$

$$3)\ c_2\frac{g(y)}{y} - ab > \delta_2\ \forall y \neq 0,$$

$$4)\ c_2 + \frac{g(y)}{y} < -\delta_3\ \forall y \neq 0,$$

$$5)\ c_1 f'(x) - ab < \Delta\ \forall x,$$

$$6)\ \frac{\sigma^2}{2}(\Delta + C_1^2) < \delta_0\delta_1,$$

где константы c_1 *и* c_2 *выбраны так, что* $c_1c_2 = ab$.

Тогда тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Если, кроме условий 1)–6), выполнены еще неравенства

$$7)\ c_1\frac{f(x)}{x} - ab < \delta_4\ (\delta_4 > 0),$$

$$8)\ c_2\frac{g(y)}{y} - ab < \delta_5\ (\delta_5 > 0),$$

то тривиальное решение системы (1) экспоненциально-устойчиво в среднем квадратическом.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V(x,y) = (c_1^2 - ab)x^2 + (a^2 - \gamma ab)y^2 + 2c_1\int\limits_0^x f(\xi)d\xi + 2\gamma c_2\int\limits_0^y g(\eta)d\eta - 2ac_1xy, \qquad (3)$$

где $\gamma = a^2/c_1^2,\ c_1 \cdot c_2 = ab$.

Вычислим LV. Имеем

$$\frac{1}{2}LV = \frac{\partial V}{\partial x}[f(x) + ay] + \frac{\partial V}{\partial y}[bx + g(y)] + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} =$$

$$= [c_1^2xf(x) - abxf(x) + c_1f^2(x) - c_1abx^2 + \frac{\sigma^2}{2}c_1^2x^2 - \frac{\sigma^2}{2}abx^2 + \frac{\sigma^2}{2}c_1x^2f'(x)] +$$

$$+ [a^2yg(y) - c_1a^2y^2 + \gamma c_2g^2(y) - \gamma abyg(y)] + \{c_1^2axy - \gamma ab^2xy + \gamma c_2bxg(y) - c_1axg(y)\}. \qquad (4)$$

Учитывая, что $\gamma = a^2/c_1^2$ и $c_1c_2 = ab$, находим, что в (4) значение выражения, стоящее в фигурных скобках равно нулю. Далее, после некоторых элементарных преобразований получим

$$\frac{1}{2}LV = [(c_1 + \frac{f(x)}{x})(c_1\frac{f(x)}{x} - ab) + \frac{\sigma^2}{2}(c_1f'(x) - ab) + \frac{\sigma^2c_1^2}{2}] \cdot x^2 +$$

$$+ [\frac{a^2}{c_2^2}(c_2 + \frac{g(y)}{y})(c_2\frac{g(y)}{y} - ab)] \cdot y^2\ (x \neq 0, y \neq 0). \qquad (5)$$

В силу условий 1)–6) теоремы из равенства (5) имеем

$$LV \leq -2\aleph(x^2 + y^2)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (6)$$

где

$$\aleph = \min\{\delta_0\delta_1 - \frac{\sigma^2}{2}(\Delta + c_1^2), \frac{\delta_2\delta_3a^2}{c_1^2}\},\ \aleph > 0.$$

Таким образом, LV отрицательно определена.

Установим теперь положительную определенность функции $V(x,y)$. Для этого преобразуем выражение в правой части равенства (3) к виду

$$V = (c_1x - ay)^2 + 2\int_0^x [c_1 f(x) - abx]dx + 2\gamma \int_0^y [c_2 g(y) - aby]dy. \quad (7)$$

С учетом условий 1) и 3) теоремы из равенства (7) получаем следующую оценку снизу для V :

$$V(x,y) \geq 2\int_0^x [c_1\frac{f(x)}{x} - ab]xdx + 2\gamma \int_0^y [c_2\frac{g(y)}{y} - ab]ydy \geq \delta_0 x^2 + \gamma\delta_2 y^2 \geq \alpha(x^2+y^2), \quad (8)$$

где $\alpha = \min\{\delta_0, \gamma\delta_2\}, \alpha > 0$.

Из (8) следует,что $V(x,y) \to +\infty$ при $x^2+y^2 \to +\infty$.

Итак, выполнены все условия леммы, приведенной выше в п.1. Следовательно, решение $(x(t,\omega) \equiv 0, y(t,\omega) \equiv 0)$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Для доказательства второй части утверждения достаточно заметить, что в силу условий 7) и 8) функция V допускает также следующую оценку сверху

$$V(x,y) \leq (c_1x - ay)^2 + \delta_4 x^2 + \gamma\delta_5 y^2 \leq \beta(x^2+y^2),$$

где $\beta > 0$ – некоторая константа.

Остается сослаться на общую теорему из [4,с.232] (аналогичную вышеприведенной лемме) об экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом. Это завершает полное доказательство теоремы. Теорема доказана.

Замечание . Для детерминированного ($\sigma = 0$) линейного случая ($f(x) = cx, g(y) = dy$) условия доказанной теоремы превращаются в необходимое и достаточные условия Рауса-Гурвица.

Литература

1. *Еругин Н.П.* О некоторых вопросах теории устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений //Прикл. матем. и мех.. 1950. Т.14. Вып. 5. – С. 459-512.
2. *Малкин Н.Г.* Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования // Прикл. матем. и мех.. 1952. Т.16. Вып.3. – С. 365-368.
3. *Красовский Н.Н.* Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений // Прикл.матем и мех..1953. Т.27.Вып.6. – С. 651-672.
4. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
5. *Гихман Н.Н., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наукова думка, 1968.
6. *Кушнер Г.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. – М.: Мир, 1969. – 199 с.

On Asymptotical Stability of a Two-dimensional Nonlinear Dynamical System Perturbed by White Noise

M.M. Shumafov

In present paper sufficient conditions for asymptotic stability of a two-dimensional nonlinear dynamical system are given.

КъеIолIэн

Мы тхылъым къытетэIуатэ, сыд фэдэ икъоу кондициерхэр ищыкIагъа шэпхъитIу зиIэ мылинейнэ стабиль шIыпIэ ихьаным пае уахътэр кIуатэ къэс.

