ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОТСУТСТВИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

Д.С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Показано, что при определенных условиях у квадратичной дифференциальной системы с двумя состояниями равновесия отсутствуют предельные циклы. Доказательство основано на использовании прямых изоклин и на аффинных преобразованиях переменных.

В решении различных вопросов качественной теории дифференциальных уравнений заметную роль играют изоклины. Так, например, широко известен «метод двух изоклин» (метод Н.П. Еругина), который используется и в наши дни [1]. О том, что использование главных изоклин дает широкие возможности качественного исследования автономных дифференциальных систем на плоскости особо подчеркивается в фундаментальной работе В.В. Немыцкого [2].

Среди изоклин системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P(x,y),\ Q(x,y)$ – аналитические функции в области $G \subset R^2$, определенную роль играют прямолинейные изоклины (кратко прямые изоклины).

Справедливости ради следует отметить, что изучением вопросов, связанных с прямыми изоклинами квадратичных векторных полей, первыми занимались еще в 60-е годы прошлого столетия А.Н. Берлинский, Л.В. Шахова, Тун-Цзинь-чжу [3-5]. Впоследствии в течение почти трех десятилетий публикаций, посвященных прямым изоклинам полиномиальных векторных полей, не было в печати. Лишь в 1994 году появилась работа [6] В.М. Чересиза «Об изоклинах полиномиальных векторных полей», в которой дается оценка сверху числа прямых изоклин системы специального вида, проходящих через состояние равновесия. Следствием этой работы является утверждение автора статьи [5] о том, что через каждое состояние равновесия квадратичной системы проходит хотя бы одна прямая изоклина.

Сотрудниками физического факультета и факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета в течение последних двух с лишним десятилетий выполнен цикл работ, посвященных различным аспектам теории прямых изоклин плоских полиномиальных векторных полей (см., например, работы [7-12]).

В данной работе доказывается отсутствие предельных циклов системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij} x^i y^j \equiv P_2(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j \equiv Q_2(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R, (P_2, Q_2) = 1$, при условии, что на прямой l:

$$P'_{2x}(x,y) + Q'_{2y}(x,y) = 0 \tag{3}$$

эта система имеет два состояния равновесия. Доказательство основано на аффинных преобразованиях переменных x, y, в результате которых прямая (3) трансформируется в прямую в соответствии с утверждением ниже доказанной леммы.

Будем говорить, что на изоклине L системы (1) индуцировано направление m, если угловой коэффициент касательных к фазовым траекториям этой системы в точках L, отличных от состояний равновесия, равен m, то есть $\left(\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}\right)_{(x,y)\in L} \equiv m$, $m - const$.

Обозначим дивергенцию векторного поля системы (1)

$$D(x,y) = P'_x()x, y + Q'_y(x,y).$$

Применим к системе (1) преобразование

$$\begin{cases} x = \alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + \gamma, \\ y = \delta\overline{x} + \eta\overline{y} + \omega, \ \Delta = \alpha\eta - \beta\delta \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

В результате система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \dfrac{1}{\Delta}\left[\eta P(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}+\gamma, \delta\overline{x}+\eta\overline{y}+\omega) - \beta Q(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}+\gamma, \delta\overline{x}+\eta\overline{y}+\omega)\right] \equiv \overline{P}(\overline{x},\overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \dfrac{1}{\Delta}\left[-\delta P(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}+\gamma, \delta\overline{x}+\eta\overline{y}+\omega) + \alpha Q(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}+\gamma, \delta\overline{x}+\eta\overline{y}+\omega)\right] \equiv \overline{Q}(\overline{x},\overline{y}). \end{cases} \tag{5}$$

Дивергенция векторного поля системы (5) имеет вид

$$\overline{D}(\overline{x},\overline{y}) = D(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}+\gamma, \delta\overline{x}+\eta\overline{y}+\omega). \tag{6}$$

Таким образом, имеет место

Лемма. *Если к системе* (1) *применить невырожденное преобразование* (4), *то дивергенция векторного поля этой системы переходит в дивергенцию* (6) *системы* (5).

Теорема 1. *Пусть дивергенция векторного поля системы*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j \equiv P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} b_{ij}x^i y^j \equiv Q_n(x,y), \end{cases} \tag{7}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R, (P_n, Q_n) = 1$, *удовлетворяет условию* $D_n(x,y) = P'_{nx}(x,y) + Q'_{ny}(x,y) \not\equiv 0$, *и на кривой* $L: D_n(x,y) = 0$ *эта система имеет* $n^2 - n$ *состояний равновесия. Тогда посредством преобразования* (4) *система* (7) *может быть приведена к системе*

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = (A\overline{x} + B\overline{y} + C)\overline{P}_{n-1}(\overline{x},\overline{y}) \equiv \overline{P}_n(\overline{x},\overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{Q}_n(\overline{x},\overline{y}), \end{cases} \tag{8}$$

где $\overline{P}_n(\overline{x},\overline{y}), \overline{Q}(\overline{x},\overline{y})$ *– многочлены степени* n, $\overline{P}_{n-1}(\overline{x},\overline{y}) \equiv \overline{P}'_{n\overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) + \overline{Q}'_{n\overline{y}}(\overline{x},\overline{y})$.

Доказательство. Так как на L расположены $n^2 - n$ состояний равновесия, то L – изоклина системы (7) [12]. Пусть на L индуцировано направление $m \in R \setminus \{0\}$. Посредством преобразования

$$\begin{cases} x = \overline{x} + \overline{y}, \\ y = m\overline{y} \end{cases} \tag{9}$$

приведем систему (7) к системе

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \dfrac{1}{m}\left[mP_n(\overline{x}+\overline{y}, m\overline{y}) - Q_n(\overline{x}+\overline{y}, m\overline{y})\right], \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \dfrac{1}{m}Q_n(\overline{x}+\overline{y}, m\overline{y}). \end{cases} \tag{10}$$

Согласно теореме 2.3 [9] преобразование (9) переводит кривую L в изоклину бесконечности $\overline{L} : \overline{D_n}(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ системы (10). По доказанной лемме $\overline{D_n}(\overline{x}, \overline{y}) = D(\overline{x}+\overline{y}, m\overline{y})$, то есть $\dfrac{1}{m}\left[mP_n(\overline{x}+\overline{y}, m\overline{y}) - Q_n(\overline{x}+\overline{y}, m\overline{y})\right] \equiv (A\overline{x} + B\overline{y} + C)\overline{P}_{n-1}(\overline{x}, \overline{y})$,

где $\overline{P}_{n-1}(\overline{x}, \overline{y}) = D_n(\overline{x}+\overline{y}, m\overline{y})$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть система* (2) *имеет на прямой* $l : P'_{2x}(x, y) + Q'_{2y}(x, y) = 0$ *два состояния равновесия, но при этом не имеет инвариантной прямой. Тогда эта система не имеет изолированных периодических решений.*

Доказательство. Согласно теореме 1 вместо системы (2) рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) \equiv \overline{P}_2(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \overline{Q}_2(x, y),\ B_1B_2 \neq 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $P'_{2x}(x, y) + Q'_{2y}(x, y) \equiv \mu(A_2x + B_2y + C_2),\ \mu \neq 0$.

Пусть точки M и N – состояния равновесия системы (11), расположенные на изоклине бесконечности $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Предположим, что индексы Пуанкаре состояний равновесия M и N удовлетворяют равенству $J(M)J(N) = 1$. Тогда по теореме 36 [13] прямые l_2 и $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ пересекаются в некоторой внутренней точке T отрезка $[M, N]$, а значит, выполняется неравенство

$$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0. \tag{12}$$

Совершим в системе (11) преобразование

$$\begin{cases} \overline{x} = A_1x + B_1y + C_1, \\ \overline{y} = A_2x + B_2y + C_2, \end{cases} \tag{13}$$

которое не вырождено в силу (12). В результате получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = A_1\overline{xy} + B_1\tilde{Q}_2(\overline{x}, \overline{y}) \equiv \overline{\overline{P}}_2(\overline{x}, \overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = A_2\overline{xy} + B_2\tilde{Q}_2(\overline{x}, \overline{y}) \equiv \overline{\overline{Q}}_2(\overline{x}, \overline{y}) \end{cases} \tag{14}$$

Согласно лемме дивергенция системы (14) имеет вид

$$\overline{\overline{P_{2\overline{x}}}}'(\overline{x}, \overline{y}) + \overline{\overline{Q}}'_{2\overline{y}}(\overline{x}, \overline{y}) \equiv \nu\overline{y},\ \nu \neq 0. \tag{15}$$

Решениями функционального уравнения $\alpha(\bar{x},\bar{y})\overline{\overline{Q}}_2(\bar{x},\bar{y})-\beta(\bar{x},\bar{y})\overline{\overline{P}}_2(\bar{x},\bar{y})=\nu\bar{y}$ являются функции $\alpha(\bar{x},\bar{y})=\dfrac{B_1}{\bar{x}}$, $\beta(\bar{x},\bar{y})=\dfrac{B_2}{\bar{x}}$, $\nu=A_2B_1-A_1B_2$.

$$\alpha'_{\bar{x}}+\beta'_{\bar{y}}=-\frac{B_1}{\bar{x}^2}\neq 0. \tag{16}$$

Здесь ($\bar{x}=0$ – прямая без контактов).

Неравенство (16) получено в предположении, что $J(M)=J(N)=1$, то есть что точки M и N – состояния равновесия второй группы.

По теореме 4.4 [14] предельный цикл системы (11), если он существует, то грубый. С другой стороны, так как на цикле системы (14), если он есть, выражение (16) отлично от нуля, то цикл является двукратным, то есть негрубым [14, с. 97]. Полученное противоречие доказывает отсутствие предельных циклов системы (11), окружающих состояния равновесия M и N .

Если предположить, что $J(M)=J(N)=-1$,то циклы, если есть у системы (14), то могут быть расположены разве что в одной из полуплоскостей $y>0$ и $y<0$. Но в этих полуплоскостях выражение (15) имеет постоянный знак, и по признаку Бендиксона [15] замкнутых траекторий система не имеет.

Далее рассмотрим случай $J(M)J(N)=-1$. Относительно изоклины бесконечности системы (11) возможны предположения [9]: 1) $\overline{P}_2(x,y)=0$ распадается на две прямые l_1 и l_2, где а) $l_1 \| l_2$ или $l_1\cap l_2=W, W\notin[M,N]$; 2) $\overline{P}_2(x,y)\equiv A_2x+B_2y+C_2$.

Пусть имеет место случай 2), то есть система (11) имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=A_2x+B_2y+C_2\equiv\tilde{P}_2(x,y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dy}=\tilde{Q}_2(x,y).\end{cases} \tag{17}$$

С учетом того, что $\tilde{P}'_{2x}(x,y)+\tilde{Q}'_{2y}(x,y)\equiv A_2x+B_2y+C_2$ произведем в системе (17) преобразование

$$\begin{cases}\bar{x}=x,\\ \bar{y}=A_2x+B_2y+C_2.\end{cases} \tag{18}$$

В результате система (17) приводится к системе

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}}{dt}=\bar{y},\\[2mm] \dfrac{d\bar{y}}{dt}=2b_{00}b_{02}+\dfrac{A_2^2-b_{01}^2}{2}+(2b_{02}b_{10}-A_2b_{01})\bar{x}+(2b_{02}b_{20}-\dfrac{A_2^2}{2})\bar{x}^2+\dfrac{\bar{y}^2}{2}.\end{cases} \tag{19}$$

Так как векторное поле системы (19) симметрично относительно прямой $\bar{y}=0$, то состояние равновесия второй группы, расположенное на прямой $\bar{y}=0$, может быть только центром. Таким образом, система (11) в случае 2) не имеет предельных циклов.

В случае 1а) систему (11) можно записать в виде

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(Ax+By+C_1)(Ax+By+C_2)\equiv F_2(x,y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=G_2(x,y),\end{cases} \tag{20}$$

где $C_1\neq C_2$, $|C_1|+|C_2|>0, B\neq 0,$ $F_{2x}'(x,y)+G_{2y}'(x,y)\equiv\xi(Ax+By+C_2)$, $\xi\neq 0$.

Преобразование (18), где $A_2 = A,\ B_2 = B,$ приводит систему (20) к системе

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \overline{y}(\overline{y} + C_1 - C_2), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = A\overline{y}(\overline{y} + C_1 - C_2) + B\overline{G}_2(\overline{x}, \overline{y}), \end{cases} \tag{21}$$

где $B \neq 0,\ C_1 \neq C_2,\ \overline{G}_2(\overline{x}, \overline{y}) -$ многочлен второй степени.

Посредством преобразования

$$\begin{cases} \tilde{x} = B\overline{x} + \overline{y}, \\ \tilde{y} = \overline{y} \end{cases} \tag{22}$$

система (21) приводится к системе

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{y}(\tilde{y} + C_1 - C_2)(A + B) + B\tilde{G}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) \equiv H_2(\tilde{x}, \tilde{y}), \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = A\tilde{y}(\tilde{y} + C_1 - C_2) + B\tilde{G}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) \equiv S_2(\tilde{x}, \tilde{y}), \end{cases} \tag{23}$$

где $B \neq 0,\ C_1 \neq C_2,\ \tilde{G}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) -$ многочлен второй степени.

Согласно доказанной нами лемме в результате преобразований (18) и (22) дивергенция векторного поля системы (20) принимает вид

$$H'_{2\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}) + S'_{2\tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \equiv r\tilde{y}, r \neq 0. \tag{24}$$

Решениями функционального уравнения $\alpha(\tilde{x}, \tilde{y})S_2(\tilde{x}, \tilde{y}) - \beta(\tilde{x}, \tilde{y})H_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = r\tilde{y}$ (с учетом (24)) являются функции $\alpha(\tilde{x}, \tilde{y}) = \beta(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\dfrac{r}{B(\tilde{y} + C_1 - C_2)}$. Поэтому

$$\alpha'_{\tilde{x}} + \beta'_{\tilde{y}} = \frac{r}{B(\tilde{y} + C_1 - C_2)^2} \neq 0. \tag{25}$$

В неравенстве (25) нами по умолчанию учтен тот факт, что прямая $\tilde{y} + C_1 - C_2 = 0$ является прямой без контактов для траекторий системы (23).

В силу неравенства (25) и на основании теоремы 4.4 [14] снова приходим к выводу о том, что система не имеет замкнутых траекторий.

В случае 1б) рассуждаем так же, как при доказательстве справедливости теоремы при выполнении условия $J(M)J(N) = 1$. Теорема доказана.

Замечание 1. В статье [16] доказано отсутствие предельных циклов системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 + xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \end{cases}$$

при наличии у этой системы двух негрубых фокусов или негрубого фокуса и седла с равными по модулю характеристическими числами, или двух седел, каждое из которых имеет характеристические числа, равные по модулю. При этом доказательство основано на нелинейных преобразованиях фазовых переменных.

Таким образом, результаты, полученные нами для квадратичной системы общего вида (2), аналогичны выводам, сделанным авторами работы [16] .

Замечание 2. В формулировке теоремы 2 требование отсутствия инвариантной прямой у системы (2) обусловлено тем, что ее наличие уже гарантирует отсутствие предельных циклов системы (2) в соответствии с результатами [17].

Литература

1. *Gaiko V.A.* Limit Cycle Bifurcation in a Quadratic System with Two Parallel Straight Lene-Jsoclines // Reports 08-06 of the Department of Applied Mathematical Analysis Delft: Delft University of Technology, 2008, 13p.
2. *Немыцкий В.В.* Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук, 1965. Т. 20. Вып. 4(124). – С. 3-36.
3. *Берлинский А.Н.* О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения // Известия высших учебных заведений. – 1960. – № 2(15). – С. 3 – 18.
4. *Тун–Цзинь–чжу.* Расположение предельных циклов системы $\frac{dx}{dt} = X_2(x, y), \frac{dy}{dt} = Y_2(x, y)$ // Периодический сборник переводов иностранных статей: Математика. – 1962. – Т. 6,№ 6. – С. 150 – 168.
5. *Шахова Л.В.* О прямых изоклинах // Труды Самаркандского государственного университета им. Алишера Навои. – Самарканд: Изд – во гос. Университета. – 1964. – Вып. № 144. – С. 93 – 105.
6. *Чересиз В.М.* Об изоклинах полиномиальных векторных полей // Сибирский математический журнал. – 1994. – Том 35, № 6. – С. 1392 – 1396.
7. *Ушхо Д.С., Горних М.И.* Прямые изоклины и канонические формы квадратичной дифференциальной системы на плоскости // Труды ФОРА. – 2002. –№ 7. – С. 72 -82.
8. *Ушхо Д.С.* О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы // Труды ФОРА. – 2003. - № 8. – С. 7 – 21.
9. *Ушхо Д.С.* Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. – Майкоп, 2007. – 93 с.
10. *Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С.* К вопросу о прямых изоклинах дифференциальных систем на плоскости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2010. – № 1. – С. 156 – 162.
11. *Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С.* О прямых изоклинах векторных полей на плоскости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2014, № 2(1). – С. 148 -156.
12. *Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С.* Состояния равновесия и смежные вопросы теории плоских полиномиальных векторных полей //Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2020. – № 1. – С. 30 – 54.
13. *Андронов А.А.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости /А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 488 с.
14. *Отроков Н.Ф.* Аналитические интегралы и предельные циклы. – Горький: Волго-Вятское книжное издательство, 1972. – 216 с.
15. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
16. *Черкас Л.А., Жилевич Л.И.* Об отсутствии предельных циклов у одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Том 8, № 12. – С. 2271 – 2273.
17. *Черкас Л.А.* Об отсутствии предельных циклов одного дифференциального уравнения, имеющего негрубый фокус // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Том 6, № 5. – С. 779–783.

ON ONE METHOD OF PROVING THE ABSENCE OF ISOLATED PERIODIC SOLUTIONS OF A QUADRATIC SYSTEM

D.S. Ushkho

It is shown that under certain conditions, a quadratic differential system with two equilibrium states has no limit cycles. The proof is based on the use of straight-line isoclines and on affine transformations of variables.

