

ОБ ОТСУТСТВИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

А.Д. Ушхо, В.Б. Тлячев, Д.С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Рассмотрен класс квадратичных дифференциальных систем на плоскости, имеющих четыре состояния равновесия, два из которых являются негрубыми фокусами, а два других – седлами. Доказывается, что такие системы не имеют предельных циклов.

1 Введение

Период активного изучения вопроса о предельных циклах и сепаратрисах квадратичных дифференциальных систем приходится на 70-е годы прошлого столетия. Однако были отдельные публикации по этой тематике и ранее. Например, в работе казанского математика М.И. Альмухамедова [1] решается задача отыскания гладкого предельного цикла. В работе [2] горьковский (нижегородский) математик Н.Н. Баутин указал достаточные условия существования устойчивого предельного цикла системы нелинейных колебаний

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \alpha y + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x^2. \end{cases}$$

Авторами работы [3] приводится доказательство того, что дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где P и Q – многочлены второй степени, имеет не более трех предельных циклов. Эта оценка числа предельных циклов оказалась ошибочной. Китайскими математиками была построена квадратичная система, имеющая четыре предельных цикла [4]. В [5] был исследован вопрос о взаимном расположении предельных циклов квадратичной системы.

Авторы статьи [6] привели достаточные условия существования единственного предельного цикла для дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dx} = \frac{-x + ax^2 + (bx + c)u + du^2}{u(u + 1)}. \quad (1)$$

Позже Г.С. Рычковым в работе [7] было доказано, что уравнение (1) имеет не более одного предельного цикла.

Одним из первых рассмотрел задачу о конструировании дифференциального уравнения, имеющего своими предельными циклами заданные кривые, М.И. Альмухамедов [8]. В 1970 году белорусским математиком А.И. Яблонским была впервые построена квадратичная дифференциальная система, имеющая предельный цикл в виде алгебраической кривой четвертого порядка [9]. Для такой системы в [10] были сформулированы достаточные условия существования предельного цикла.

В заметке [11] для системы вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -my + y^2, \\ \frac{dy}{dt} = ax + by + cx^2 + dxy + cy^2 \end{cases}$$

найлены достаточные условия существования петли сепаратрисы седла и предельного цикла, которые одновременно окружают одно и то же состояние равновесия.

Интересна в этом отношении работа [12], в которой построено все множество квадратичных систем, из траекторий которых состоит улитка Паскаля. При этом доказано, что такие системы алгебраически интегрируемы, то есть не имеют предельных циклов.

Большой вклад в решение различных проблем, связанных с предельными циклами квадратичных систем внесли Л.А. Черкас и его ученики. Этому посвящена его обзорная статья [13], а также более поздние работы [14–16]. В [16] строятся квадратичные системы с четырьмя предельными циклами, причем три из них окружают один фокус, а четвертый – второй фокус системы. Отмечается, что у квадратичной системы не может быть предельного цикла, окружающего более одного состояния равновесия. При этом автор ссылается на статью [14]. В этой связи следует заметить, что указанный факт был доказан ранее в работе [5] и может быть доказан элементарными средствами на основании следствия 4 из теоремы 6 работы [17].

В данной работе рассматривается класс квадратичных систем, имеющих четыре состояния равновесия, два из которых являются негрубыми фокусами, а два других – седлами. Доказывается, что такие системы не имеют предельных циклов.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют непрерывные частные производные не ниже первого порядка в области $G \subset \mathbb{R}^2$.

Применим к системе (2) линейное преобразование

$$\begin{cases} x = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \\ y = \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}, \end{cases} \quad (3)$$

где $\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta \neq 0$.

В результате действия (3) система (2) переходит в систему вида

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{1}{\Delta} \left[\delta P(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}) - \beta Q(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}) \right] \equiv \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{1}{\Delta} \left[-\gamma P(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}) + \alpha Q(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}) \right] \equiv \bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (4)$$

Дивергенция векторного поля системы (4) имеет вид

$$\bar{D}(\bar{x}, \bar{y}) = P'_x(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}) + Q'_y(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}).$$

Таким образом, справедлива

Лемма 1. Если к системе (2) применить невырожденное преобразование (3), то дивергенция $D(x, y)$ векторного поля системы (2) переходит в дивергенцию

$$\bar{D}(\bar{x}, \bar{y}) = D(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}).$$

Лемма 2. Пусть $D_n(x, y) = P'_{nx}(x, y) + Q'_{ny}(x, y) \neq 0$, и на кривой $L : D_n(x, y) = 0$ система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^n a_{i,j} x^i y^j \equiv P_n(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^n b_{i,j} x^i y^j \equiv Q_n(x, y), \end{cases} \quad (5)$$

где $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$, $(P_n, Q_n) = 1$, имеет $n^2 - n$ состояний равновесия. Тогда посредством невырожденного преобразования (3) систему (5) можно привести к системе вида

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (A\bar{x} + B\bar{y} + C)\bar{P}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (6)$$

где $\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}), \bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y})$ — многочлены n -ой степени, причем $\bar{P}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \bar{P}'_{n\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{Q}'_{n\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y})$.

Доказательство. Так как на L расположены $n^2 - n$ состояний равновесия, то L — изоклина этой системы [17]. Пусть система (5) индуцирует на L направление $m, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Учитывая этот факт, применим к системе (5) преобразование

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \bar{y}, \\ y = m\bar{y}. \end{cases} \quad (7)$$

Согласно лемме 1 в силу (7) дивергенция $D_n(x, y)$ векторного поля системы (5) преобразуется в дивергенцию $\bar{D}_n(\bar{x}, \bar{y}) = D_n(\bar{x} + \bar{y}, m\bar{y})$ векторного поля системы

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{1}{m} \left[mP_n(\bar{x} + \bar{y}, m\bar{y}) - Q_n(\bar{x} + \bar{y}, m\bar{y}) \right], \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{1}{m} Q_n(\bar{x} + \bar{y}, m\bar{y}). \end{cases} \quad (8)$$

По теореме 2.3 [18] преобразование (7) переводит кривую L в кривую $\bar{L} : \bar{D}_n(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ — изоклину бесконечности системы (8). Поэтому имеет место равенство

$$\frac{1}{m} \left[mP_n(\bar{x} + \bar{y}, m\bar{y}) - Q_n(\bar{x} + \bar{y}, m\bar{y}) \right] \equiv (A\bar{x} + B\bar{y} + C)\bar{P}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}),$$

где $\bar{P}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \bar{D}_n(\bar{x}, \bar{y})$. Лемма доказана. \square

2 Основные результаты. О состояниях равновесия квадратичной системы

Теорема 3. Пусть система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^2 a_{i,j} x^i y^j \equiv P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^2 b_{i,j} x^i y^j \equiv Q_2(x, y), \end{cases} \quad (9)$$

где $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}, (P_2, Q_2) = 1$, имеет четыре состояния равновесия, в том числе два состояния равновесия второй группы по терминологии [19] и два седла. Тогда посредством невырожденного преобразования (3) систему (9) можно привести к системе

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = M_1(\bar{x}, \bar{y}) \cdot N_1(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \bar{P}_2(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (10)$$

где $N_1(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \mu[\bar{P}'_{2\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{Q}'_{2\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y})], \mu \neq 0$.

Доказательство. По известной теореме А.Н. Берлинского [20] четыре состояния равновесия системы (9) образуют выпуклый четырехугольник A, B, C, D , две противоположные вершины которого являются состояниями равновесия второй группы, а две другие — седлами. Для определенности, считаем, что A и C — состояния равновесия второй группы, D и B — седла. В силу следствия 3 [17] прямые AC и BD — изоклины системы (9).

Заметим, что на прямых AC и BD индуцировано одно и то же направление. В самом деле, допуская противное, мы имеем по теореме 2.6 [16] [18] в точке пересечения прямых AC и BD состояние равновесия системы (9). Это противоречит свойству квадратичной системы иметь на прямой не более двух состояний равновесия.

Пусть система (9) индуцирует на прямых AC и BD направление m_1 . По предположению точки A и C — состояния равновесия второй группы, следовательно, они принадлежат прямой

$$l : a_{10} + b_{01} + (2a_{20} + b_{11})x + (a_{11} + 2b_{02})y \equiv D_2(x, y) = 0.$$

Согласно лемме 2 посредством преобразования (7), где $m = m_1$, система (9) приводится к системе (10), где $N_1(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \mu D_2(\bar{x} + \bar{y}, m\bar{y})$, $\mu \neq 0$. Теорема доказана. \square

Теорема 4. Пусть система (9) имеет два состояния равновесия второй группы и два седла. Тогда состояния равновесия второй группы являются сложными фокусами.

Доказательство. По теореме 3, не уменьшая общности, вместо системы (9) рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (A_1x + B_1y)(A_2x + B_2y + C_2) \equiv \tilde{P}_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \tilde{Q}_2(x, y), \end{cases} \quad (11)$$

при этом считаем, что точка $O(0; 0)$ — седло системы (10).

Покажем, что состояния равновесия W_1 и W_2 , расположенные на прямой $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, являются негрубыми фокусами системы (11).

Как известно [17], [21] для состояний равновесия W_1 и W_2 возникает проблема различения центра и фокуса. Очевидно, ни замкнутая траектория, ни траектория, стремящаяся к фокусу системы (11) не могут пересекать изоклину бесконечности $A_1x + B_1y = 0$. Поэтому рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = A_2x + B_2y + C_2, \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{A_1x + B_1y} \tilde{Q}_2(x, y), \end{cases} \quad (12)$$

где $d\tau = (A_1x + B_1y)dt$.

Согласно монографии [22] траектории систем (11) и (12) совпадают на всей фазовой плоскости, исключая точки прямой $A_1x + B_1y = 0$, отличаясь, разве что параметризацией.

Пусть $L_1 : \begin{cases} x = \varphi_1(\tau), \\ y = \psi_1(\tau) \end{cases}$ — замкнутая траектория системы (12), причем T_0 — период функций $\varphi_1(\tau)$ и $\psi_1(\tau)$.

Тогда справедливо равенство

$$\int_0^{T_0} (A_2x + B_2y + C_2)d\tau = 0. \quad (13)$$

Из (13) следует, что L_1 — негрубая траектория (12), или другими словами любая замкнутая траектория системы (11), если она имеется, непременно является негрубой.

Для дальнейшего изложения приведем теорему 4.3 [23]. Пусть в односвязной или многосвязной области G правые части системы (2) однозначные аналитические функции. Если можно найти функции α и β , регулярные в области G , за исключением, быть может, состояний равновесия, удовлетворяющие функциональному уравнению $\alpha Q - \beta P = P'_x + Q'_y$ и такие, что всюду в G функция $\alpha'_x + \beta'_y \geq 0$ (≤ 0), причем обращается в нуль лишь в конечном числе точек и кривых, среди которых нет замкнутых траекторий, то система (2) не имеет замкнутых траекторий, либо имеет только простые или двойные циклы. В частности, в G система (2) не имеет состояний равновесия типа "центр". Отметим, что в системе (11) $B_1 \neq 0$, ибо в противном случае эта система не имеет предельных циклов [24], [25].

Пара функций $\alpha = 0$, $\beta = \frac{-\nu}{A_1x + B_1y}$ является решением функционального уравнения $\alpha \tilde{Q}_2 - \beta \tilde{P}_2 = \tilde{P}'_{2x} + \tilde{Q}'_{2y}$. Отметим, что постоянная ν фигурирует в равенстве

$$\tilde{P}'_{2x}(x, y) + \tilde{Q}'_{2y}(x, y) \equiv \nu(A_2x + B_2y + C_2), \quad \nu \neq 0.$$

Так как $\alpha'_x + \beta'_y = \frac{\nu B_1}{(A_1 x + B_1 y)^2} > 0$ (< 0) в зависимости от знака числа νB_1 , то по теореме 4.3 [23] система либо вовсе не имеет замкнутых траекторий, либо они простые или двойные, если есть. Тем и доказано, что состояния равновесия второй группы системы (11) могут быть только фокусами. Такие фокусы называются негрубыми [26]. Теорема доказана. \square

Теорема 5. *Если квадратичная система имеет четыре состояния равновесия в ограниченной части фазовой плоскости, в том числе два негрубых фокуса и два седла, то эта система ациклическа.*

Доказательство. Доказательство основано на теореме 2 со ссылкой на теорему 4.4 [23]. \square

Построим систему (9), имеющую два негрубых фокуса и два седла, считая при этом начало координат $(0; 0)$ седлом. В силу теоремы 1, не сужая общности, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (A_1 \bar{x} + B_1 \bar{y})[a_{10} + b_{01} + (b_{11} + 2a_{20})(\bar{x} + \bar{y}) + \\ \quad + (a_{11} + 2b_{02})m_1 \bar{y}] \equiv F_2(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{b}_{10}\bar{x} + \bar{b}_{01}\bar{y} + \bar{b}_{20}\bar{x}^2 + \bar{b}_{11}\bar{x}\bar{y} + \bar{b}_{02}\bar{y}^2 \equiv G_2(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (14)$$

где m_1 – направление, индуцированное системой (9) на изоклине

$$P'_{2x}(x, y) + Q'_{2y}(x, y) = 0.$$

Так как $F'_{2\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) + G'_{2\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) = a_{10} + b_{01} + (2a_{20} + b_{11})\bar{x} + [b_{11} + 2a_{20} + (a_{11} + 2b_{02})m_1]\bar{y}$, то коэффициенты второго уравнения системы (14) найдем из тождества

$$A_1\{a_{10} + b_{01} + (2a_{20} + b_{11})\bar{x} + S\bar{y}\} + (A_1 \bar{x} + B_1 \bar{y})(b_{11} + 2a_{20}) + \bar{b}_{01} + \bar{b}_{11}\bar{x} + 2\bar{b}_{02}\bar{y} \equiv \mu \{a_{10} + b_{01} + (b_{11} + 2a_{20})\bar{x} + S\bar{y}\}, \mu \neq 0, \quad (15)$$

здесь $S = b_{11} + 2a_{20} + (a_{11} + 2b_{02})m_1$.

В равенстве (15) положим $A_1 = B_1 = \mu = 1$. В результате получим соотношение

$$\begin{cases} \bar{b}_{01} = 0, \\ \bar{b}_{11} = -(b_{11} + 2a_{20}) \\ \bar{b}_{02} = -\frac{(b_{11} + 2a_{20})}{2}, \\ \bar{b}_{10} = \bar{b}_{10} \\ \bar{b}_{20} = \bar{b}_{20} \end{cases} \quad (16)$$

Для удобства дальнейших рассуждений введем обозначения:

$$\alpha = a_{10} + b_{01}, \beta = b_{11} + 2a_{20}, \gamma = a_{11} + 2b_{02}, \bar{b}_{10} = \delta, \bar{b}_{20} = \omega$$

и с учетом (16) перепишем систему (14) (условимся в качестве фазовых переменных использовать x и y):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x + y)[\alpha + \beta x + (\beta + \gamma m_1)y] \equiv \bar{F}_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \delta x + \omega x^2 - \beta xy - \frac{\beta}{2} y^2 \equiv \bar{G}_2(x, y). \end{cases} \quad (17)$$

Потребуем, чтобы изоклина нуля $\bar{G}_2(x, y) = 0$ системы (17) была эллипсом. Для этого необходимо и достаточно выполнения одного из условий [27]

$$\begin{cases} \beta > 0, \\ \omega < -\frac{\beta}{2} \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \beta < 0, \\ \omega > -\frac{\beta}{2} \end{cases} \quad (19)$$

Неравенства $\delta < 0$, $\alpha < 0$ обеспечивают наличие седла в точке $(0; 0)$. Поэтому в дальнейшем будем считать выполненными эти условия, а также условие (18). Кроме этого, полагаем $\gamma m_1 > 0$.

Замечание 1. Коэффициенты преобразования (3) никак не связаны с коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в системе (17).

Исследуем поведение траекторий системы (17) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости. Для этого воспользуемся преобразованием Пуанкаре [21]:

$$\begin{cases} x = 1/z, \\ y = u/z. \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \omega - 2\beta u + \delta z - (\frac{5}{2}\beta + \gamma m_1)u^2 - \alpha u z - (\beta + \gamma m_1)u^3 - \alpha u^2 z, \\ \frac{dz}{dt} = -\beta z - (2\beta + \gamma m_1)uz - \alpha z^2 - (\gamma m_1 + \beta)u^2 z - \alpha u z^2. \end{cases} \quad (20)$$

Так как $\beta + \gamma m_1 \neq 0$, то согласно монографии [21] все состояния равновесия системы (17), расположенные на экваторе сферы Пуанкаре, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} z = 0, \\ \omega - 2\beta u - (\frac{5}{2}\beta + \gamma m_1)u^2 - (\beta + \gamma m_1)u^3 = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Обозначим левую часть второго уравнения системы (21) $f(u)$. Тогда

$$f'(u) = -2\beta - (5\beta + 2\gamma m_1)u - (3\beta + 3\gamma m_1)u^2.$$

Дискриминант многочлена $f'(u)$ имеет вид $H = (\beta - 2\gamma m_1)^2$. Положим $\beta = 2\gamma m_1$. Тогда уравнение $f'(u) = 0$ имеет единственный корень $u = -2/3$ и, следовательно, функция $f(u)$ убывает. Непосредственные вычисления показывают, что единственный корень u_0 второго уравнения системы (21) принадлежит интервалу $(-\infty; -1)$. С учетом равенства $\beta = 2\gamma m_1$ придадим системе (17) вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x + y)(\alpha + \beta x + \frac{3}{2}\beta y), \\ \frac{dy}{dt} = \delta x + \omega x^2 - \beta xy - \frac{\beta}{2}y^2. \end{cases} \quad (22)$$

Отметим, что единственное состояние равновесия $(u_0; 0)$ системы (20) является устойчивым узлом. Расчет показывает, что $M_0 \left(\frac{2\alpha}{\beta}; -\frac{2\alpha}{\beta} \right)$ – точка пересечения прямых $y = -x$ и $\alpha + \beta x + \frac{3}{2}\beta y = 0$. Потребуем, чтобы точка M_0 была расположена внутри эллипса $\delta x + \omega x^2 - \beta xy - \frac{\beta}{2}y^2 = 0$. Тогда по необходимости выполняется неравенство: $\delta < \frac{-\alpha(\beta + 2\omega)}{\beta}$. Таким образом, справедлива

Теорема 6. Если система (22) удовлетворяет условиям

$$\alpha < 0, \beta > 0, \omega < -\frac{\beta}{2}, \delta < \frac{-\alpha(\beta + 2\omega)}{\beta}, \quad (23)$$

то она имеет четыре состояния равновесия, в том числе: A и C – негрубые фокусы, B и O – седла (см. рис. 1)

Вычислениями убеждаемся в том, что координаты сложных фокусов A и C , расположенных на прямой $\alpha + \beta x + \frac{3}{2}\beta y = 0$ задаются формулами

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2\alpha\beta - 9\beta\delta + 3\sqrt{4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^2\delta + 9\beta^2\delta^2 + 8\alpha^2\beta\omega}}{2(9\beta\omega + 4\beta^2)}, \\ y_1 = -\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\beta} + x_1\right) \end{cases} \quad (24)$$

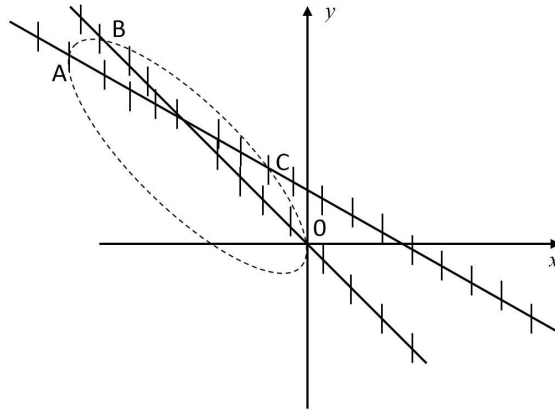


Рис. 1. Взаимное расположение главных изоклин системы (22).
Пунктиром изображена изоклина нуля

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-2\alpha\beta - 9\beta\delta - 3\sqrt{4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^2\delta + 9\beta^2\delta^2 + 8\alpha^2\beta\omega}}{2(9\beta\omega + 4\beta^2)}, \\ y_2 = -\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\beta} + x_2\right) \end{cases}, \quad (25)$$

На рис. 1 показано, что $(x_1; y_1)$ ($(x_2; y_2)$) – координаты точки $A(C)$.
Перенесем начало координат системы (22) в точку $(x_i; y_i), i = 1, 2$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x_i + y_i)\beta x + \frac{3}{2}(x_i + y_i)\beta y + \beta x^2 + \frac{5}{2}\beta xy + \frac{3}{2}\beta y^2 \equiv \tilde{F}_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = (\delta + 2\omega x_i - \beta y_i)x - (x_i + y_i)\beta y + \omega x^2 - \beta xy - \frac{\beta}{2}y^2 \equiv \tilde{G}_2(x, y). \end{cases} \quad (26)$$

Так как $(x_i; y_i), i = 1, 2$ – сложный фокус, то выполняется неравенство (см. поэтому вопросу также [19], [26])

$$\beta(x_i + y_i)^2 + \frac{3}{2}(x_i + y_i)(\delta + 2\omega x_i - \beta y_i) < 0, i = 1, 2. \quad (27)$$

Из рис. 1 видно, что $x_1 + y_1 < 0, x_2 + y_2 > 0$. Поэтому из (27) следуют неравенства

$$\beta(x_1 + y_1) + \frac{3}{2}(\delta + 2\omega x_1 - \beta y_1) > 0, \quad (28)$$

$$\beta(x_2 + y_2) + \frac{3}{2}(\delta + 2\omega x_2 - \beta y_2) < 0. \quad (29)$$

Ляпуновская величина фокуса $(0; 0)$ системы (26) имеет вид [26]:

$$\alpha_3 = -\frac{\pi\beta[\beta(y_i - 2x_i) - 3(\delta + 2\omega x_i)]^2}{24(x_i + y_i)\mu^3}, i = 1, 2, \quad (30)$$

где $\mu = \sqrt{-(x_i + y_i)^2\beta^2 - \frac{3}{2}(x_i + y_i)\beta(\delta + 2\omega x_i - \beta y_i)}, i = 1, 2$.

В силу неравенства (27) $\mu > 0$. Абсциссы точки C и точки пересечения прямой $l_1 : \beta y - (2\beta + 6\omega)x - 3\delta = 0$ с осью абсцисс совпадают при

$$\delta = \frac{6\alpha(\beta + 3\omega)\left(-2\beta + 2\sqrt{-3\beta^2 - 18\beta\omega}\right)}{36\beta^2 + 162\beta\omega} = \delta_1.$$

Неравенство $-(\beta + 2\omega) < \frac{\delta_1}{\alpha} < -2(\beta + 2\omega)$ является условием того, что точка пересечения прямой l_1 с прямой $y = -x$ лежит на прямой $y = -x$ между точками M_0 и O , то есть выражение в квадратных скобках в формуле (30) отлично от нуля.

Тем самым доказана

Теорема 7. Пусть выполняются условия

$$\delta = \delta_1, (\beta + 2\omega) < \frac{\delta_1}{\alpha} < -2(\beta + 2\omega), \alpha < 0, \beta > 0, \beta + 2\omega < 0.$$

Тогда точки O и B – седла, $A(x_1; y_1)(C(x_2; y_2))$ – негрубый неустойчивый (устойчивый) фокус.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{F}_2(x, y) - \eta \tilde{G}_2(x, y) \equiv H_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \eta \tilde{F}_2(x, y) + \tilde{G}_2(x, y) \equiv W_2(x, y). \end{cases} \quad (31)$$

Система (31) имеет те же состояния равновесия, что и система (26). При этом вектор поля системы (31) повернут относительно вектора поля системы (26) на угол $\theta = \arctg \eta$ [2], [21].

Вычислим дивергенцию векторного поля системы (31)

$$\tilde{\sigma}(x, y) = H'_{2x}(x, y) + W'_{2y}(x, y)$$

в точках $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$, обозначив их соответственно $\tilde{\sigma}_1(0; 0), \tilde{\sigma}_2(0; 0)$:

$$\tilde{\sigma}_1(0; 0) = \eta \left[\frac{3}{2}(x_1 + y_1) - (\delta + 2\omega x_1 - \beta y_1) \right], \quad (32)$$

$$\tilde{\sigma}_2(0; 0) = \eta \left[\frac{3}{2}(x_2 + y_2) - (\delta + 2\omega x_2 - \beta y_2) \right]. \quad (33)$$

С учетом неравенств (28) и (29) можно заметить, что выражение в квадратных скобках (32) ((33)) отрицательно (положительно). Следовательно, при сколь угодно малом по модулю положительном (отрицательном) η точка A превращается в грубый устойчивый (неустойчивый) фокус, а фокус C – в грубый неустойчивый (устойчивый) фокус. Таким образом, при сколь угодно малом положительном η фокусы A и C превращаются в грубые фокусы противоположной устойчивости. При этом из точки A появляется один неустойчивый предельный цикл, а из точки C – один устойчивый предельный цикл [26].

Список литературы

1. *Альмухамедов М.И.* К задаче отыскания гладкого предельного цикла // Известия физико-математического общества и Научно-исследовательского института математики и механики при Казанском университете. – 1938. – Сер. 3. – Том 11. – С. 161–179.
2. *Баутин Н.Н.* Об одном дифференциальном уравнении, имеющем предельный цикл // Журнал технической физики. – 1939. – Том 9. – № 7. – С. 601–611.
3. *Петровский И.П., Ландис Е.М.* О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q – многочлены 2-й степени // Матем. сб. – 1955. – Том 37(79). – № 2. – С. 209–250.
4. *Shi S.L.* A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems // Sci. Sinica. – 1980. – Vol. 23. – № 2. – P. 153–158.
5. *Тун-Изинь-Чжю* Расположение предельных циклов системы $\frac{dx}{dt} = \sum_{0 < i+j \leq 2} a_{ik} x^i y^k, \frac{dy}{dt} = \sum_{0 < i+j \leq 2} b_{ik} x^i y^k$ // Период. сб. переводов иностранных статей. Математика. – 1962. – Том 6. – № 2. – С. 150–168.

6. Черкас Л.А., Жилевич Л.И. Некоторые признаки отсутствия и единственности предельных циклов // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Том 6. – № 7. – С. 1170–1178.
7. Рычков Г.С. Доказательство единственности предельного цикла квадратичного уравнения $u(u+1)du = (-x + ax^2 + bxi + cu + du^2)dx$ // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Том 6. – № 12. – С. 2257–2259.
8. Альмухамедов М.И. О конструировании дифференциального уравнения, имеющего своими предельными циклами заданные кривые // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1965. – № 1(44). – С. 12–16.
9. Яблонский А.И. Алгебраические интегралы одной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Том 6. – № 10. – С. 1752–1760.
10. Филиппов В.Ф. Об алгебраических предельных циклах // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Том 9. – № 7. – С. 1281–1288.
11. Тешев Р.М., Ушхо Д.С. О предельных циклах и сепаратрисах одной квадратичной системы // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Том 31. – № 6. – С. 1096–1097.
12. Дружкова Т.А., Сиротина Е.А. Улитка Паскаля как интегральная кривая квадратичного уравнения // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2008. – № 3. – С. 120–125.
13. Черкас Л.А. Методы оценки числа предельных циклов автономных систем // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Том 13. – № 5. – С. 779–802.
14. Cherkas L.A., Dovnar S.I. Some unexpected properties of limit cycles of quadratic systems in the plane // CRM (Centre de Recerca Matematica) Preprint. – Barcelona, 1999. – № 402. – 29 P.
15. Cherkas L.A., Artes J.C., Llibre J. Quadratic systems with limit cycles of normal size // Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat.. – 2003. – № 1(41). – С. 31–46.
16. Сидоренко И.Н. Предельные циклы некоторых классов квадратичных систем на плоскости // Вестник БГУ. Сер. 1. Математика, информатика. – 2008. – № 3. – С. 63–68.
17. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Состояния равновесия и смежные вопросы теории плоских полиномиальных векторных полей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2020. – № 1. – С. 30–54.
18. Ушхо Д.С. Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. – Майкоп: АГУ, 2007. – 93 с.
19. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. – Минск: БГУ, 1982. – 208 с.
20. Берлинский Н.А. О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения // Известия вузов. Математика. – 1960. – № 2. – С. 3–18.
21. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон М.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 568 с.
22. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Изд. 2, доп. – М.: URSS, 1990. – 488 с.
23. Отроков Н.Ф. Аналитические интегралы и предельные циклы. – Горький: Волго-Вятское кн. изд-во, 1972. – 215 с.
24. Черкас Л.А. Об отсутствии предельных циклов для одного дифференциального уравнения, имеющего негрубый фокус // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Том 6. – № 5. – С. 779–783.

25. *Лукашевич Н.А.* Интегральные кривые одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1965. – Том 1. – № 1. – С. 82–95.
26. *Андронов А.А., Леонтович Е. А., Гордон М. И., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1967. – 488 с.
27. *Воднев В.Т., Наумович А. Ф., Наумович Н.Ф.* Основные математические формулы. 2-е изд., испр. и перераб. – Минск: Вышэйшая школа, 1988. – 270 с.

ON THE ABSENCE OF LIMIT CYCLES FOR QUADRATIC SYSTEM

A.D. Ushkho, V.B. Tlyachev, D.S. Ushkho

We consider a class of planar quadratic differential systems that have four equilibrium states, two of which are weak focus and the other two are saddles. It is proved that such systems do not have limit cycles.