ОЦЕНКА СУММЫ ИНДЕКСОВ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

А.Д. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Показано, что сумма индексов состояний равновесия квадратичной системы, расположенных на экваторе сферы Пуанкаре, принадлежит интервалу [-1;3].

В данной заметке доказывается, что сумма Σ индексов состояний равновесия квадратичной системы, расположенных на экваторе сферы Пуанкаре, удовлетворяет неравенству $-1 \le \Sigma \le 3$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q_n(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P_n(x,y)$ и $Q_n(x,y)$ – взаимно простые многочлены n-ой системы над полем R.

Следуя [1], будем говорить, что гладкая кривая

$$F(x,y)=0 \tag{2}$$

имеет контакт в точке $K(x,y)$ с траекторией системы (1), если имеет место равенство

$$\frac{Q_n(x,y)}{P_n(x,y)} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \tag{3}$$

или

$$F'_y(x,y)Q_n(x,y) + F'_x(x,y)P_n(x,y) = 0 \tag{4}$$

Предположим, что $F(x,y)=0$ – алгебраическая гладкая кривая порядка m. Тогда кривая (4) является алгебраической кривой порядка $m+n-1$.

Система уравнений

$$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ F'_x(x,y)P_n(x,y) + F'_y(x,y)Q_n(x,y) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

имеет с кривой (2) не более $m(m+n-1)$ общих точек, если разумеется, кривая (2) не состоит из траекторий системы (1). Наряду с контактами системе (5) также удовлетворяют состояния равновесия системы (1), расположенные на кривой (2). Таким образом, справедлива

Лемма. *Сумма числа контактов и числа состояний равновесия системы* (1) *на гладкой алгебраической кривой m-го порядка, не являющейся инвариантной кривой этой системы, не превосходит числа* $m(m+n-1)$.

Следствие 1. Сумма числа контактов и числа состояний равновесия квадратичной системы, на прямой, не являющейся инвариантной, не превосходит двух.

Пусть дана система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij} x^i y^j \equiv P_2(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j \equiv Q_2(x, y), \end{cases} \qquad (6)$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, $(P_2, Q_2) = 1$.

Применим к системе (6) первое преобразование Пуанкаре [2]

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{z}, \\ y = \dfrac{u}{z} \end{cases} \qquad (7)$$

Преобразование (7) переводит систему (6) в систему

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = b_{20} + (b_{11} - a_{20})u + b_{10}z + (b_{02} - a_{11})u^2 + (b_{01} - a_{10})uz + b_{00}z^2 - a_{02}u^3 - a_{01}u^2 z - a_{00}uz^2, \\ \dfrac{dz}{dt} = -a_{20}z - a_{11}uz - a_{10}z^2 - a_{02}u^2 z - a_{01}uz^2 - a_{00}z^3. \end{cases} \qquad (8)$$

С помощью второго преобразования Пуанкаре

$$\begin{cases} x = \dfrac{v}{z}, \\ y = \dfrac{1}{z} \end{cases} \qquad (9)$$

придадим системе (6) вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = a_{02} + (a_{11} - b_{02})v + a_{01}z + (a_{20} - b_{11})v^2 + (a_{10} - b_{01})vz + a_{00}z^2 - b_{20}v^3 - b_{10}v^2 z - b_{00}vz^2, \\ \dfrac{dz}{dt} = -b_{02}z - b_{11}vz - b_{01}z^2 - b_{20}v^2 z - b_{10}vz^2 - b_{00}z^3. \end{cases} \qquad (10)$$

Состояния равновесия системы (6) на бесконечности удовлетворяют системам уравнений

$$\begin{cases} b_{20} + (b_{11} - a_{20})u + (b_{02} - a_{11})u^2 - a_{02}u^3 = 0, \\ z = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

$$\begin{cases} a_{02} + (a_{11} - b_{02})v + (a_{20} - b_{11})v^2 - b_{20}v^3 = 0, \\ z = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Согласно [2] все бесконечно удаленные состояния равновесия системы (6), кроме «концов» оси oy, удовлетворяют системе (11). Таким образом, если $(v = z = 0)$ не является состоянием равновесия системы (10), а именно, если $a_{02} \neq 0$, то для исследования поведения траекторий системы (6) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости достаточно пользоваться системой (8).

Теорема 1. *Система* (6) *не может иметь на экваторе сферы Пуанкаре три четырехсепаратрисных седла.*

Доказательство. Предположим, что система (6) имеет на бесконечности три четырехсепаратрисных седла. Заметим, что система (6) имеет на экваторе сферы Пуанкаре не более трех состояний равновесия.

Не ограничивая общности, положим, что $W_1(u = 0, z = 0)$, $W_2(u = 1, z = 0)$,

$W_3(u = u_0, z = 0)$, где $u_0 > 1$, – состояния равновесия системы (6) на экваторе сферы Пуанкаре, и все они являются четырехсепаратрисными седлами.

Изобразим на окружности круга Пуанкаре состояния равновесия $W_i(i = \overline{1,3})$ (рис.1).

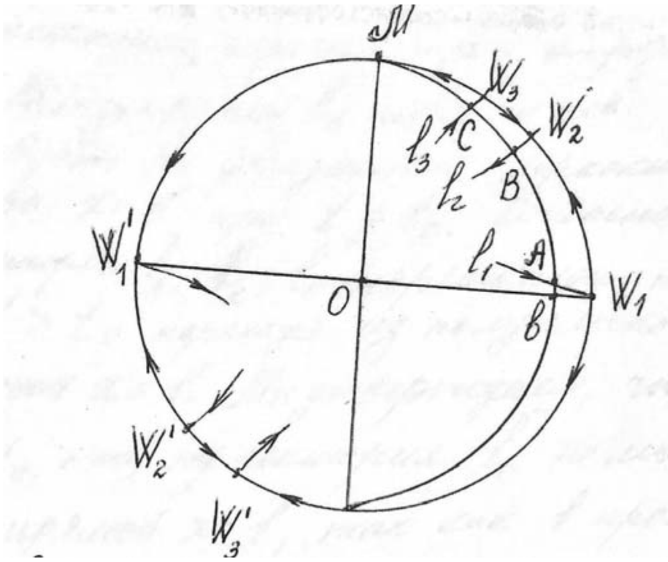

Рис. 1. Состояния равновесия типа «четырехсепаратрисное седло» $W_i(i = \overline{1,3})$ на бесконечности

Проведем на фазовой плоскости прямую $x = b$, не являющуюся инвариантной прямой системы (6), такую, чтобы все состояния равновесия системы (6) в ограниченной части фазовой плоскости лежали в полуплоскости $x < b$.

В силу выбора прямой $x = b$ всегда можно добиться того, чтобы сепаратрисы, примыкающие к седлам $W_i(i = \overline{1,3})$ и расположенные в первом квадранте, пресекали прямую $x = b$. Сепаратрису, примыкающую к седлам W_1, W_2 и W_3 обозначим соответственно l_1, l_2 и l_3. Точки пресечения прямых l_1, l_2 и l_3 с прямой $x = b$ обозначенной соответственно A, B и C. Введем обозначения: l_A – траектория, пересекающая отрезок $[AB]$ прямой $x = b$ вблизи точки A; l_C^+ – траектория, пересекающая отрезок $[BC]$ прямой $x = b$ вблизи прямой l_3 справа от нее; l_C^- – траектория, пересекающая луч $[CM)$ прямой $x = b$ вблизи прямой l_3 слева от нее.

Пусть все указанные траектории пересекают прямую $x = b$ при $t = t_0$. Согласно рис.1 все три траектории l_A, l_C^+, l_C^- пересекают прямую $x = b$ при $t > t_0$ переходя из полуплоскости $x < b$ в полуплоскость $x > b$. Мы утверждаем, что при всех $t \in (t_0, +\infty)$ траектория l_C^- не может оставаться правее прямой $x = b$, так как в противном случае она при $t \to +\infty$ входит в точку M, либо стремится к некоторому ω-предельному множеству, расположенному, в ограниченной части полуплоскости $x > b$. Но M не является состоянием равновесия и правее прямой $x = b$ нет состояний равновесия. Таким образом, с учетом непрерывности векторного поля системы (6) на луче $[CM)$ можно утверждать, имеется, по крайней мере, один контакт. Аналогичными рассуждениями убеждаемся в том, что траектория l_C^+ касается прямой $x = b$ между точками B и C, а траектория l_A касается прямой $x = b$ в точке, расположенной между A и B. Следовательно, на прямой $x = b$ система (6) имеет не менее трех контактов, что противоречит следствию 1 из леммы. Теорема доказана.

Следствие 2. Если система (7) имеет на бесконечности три простых состояния равновесия, то по крайней мере одно из них является узлом.

Теорема 2. *Сумма* $\sum$ *индексов Пуанкаре всех бесконечно удаленных состояний равновесия системы* (6) *удовлетворяют условию*

$$-1 \le \Sigma \le 3\,. \tag{13}$$

Доказательство. Сумма индексов Пуанкаре состояний равновесия системы (6), расположенных в ограниченной части фазовой плоскости, в силу работы [3] принадлежат множеству $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Принимая во внимание работу [4], согласно которой сумма индексов всех состояний равновесия системы (6), как конечных, так и бесконечно удаленных, равна +1, убеждаемся в выполнении неравенства (13). Теорема доказана.

Замечание. Для сравнения отметим, что сумма индексов Пуанкаре кубической системы, расположенных на экваторе сферы Пуанкаре, принадлежит множеству $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ [5].

Пример 1. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x-1)(3y-1), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-1)(y+1) \end{cases} \tag{14}$$

имеет на бесконечности одно простое седло $D(v=0, z=0)$ и одно сложное состояние равновесия, достаточно малая окрестность которого состоит из двух гиперболических и двух параболических секторов. В ограниченной части фазовой плоскости состояниями равновесия являются простой устойчивый узел B и простой неустойчивый узел A. Фазовый портрет системы в круге Пуанкаре изображен на рис. 2.

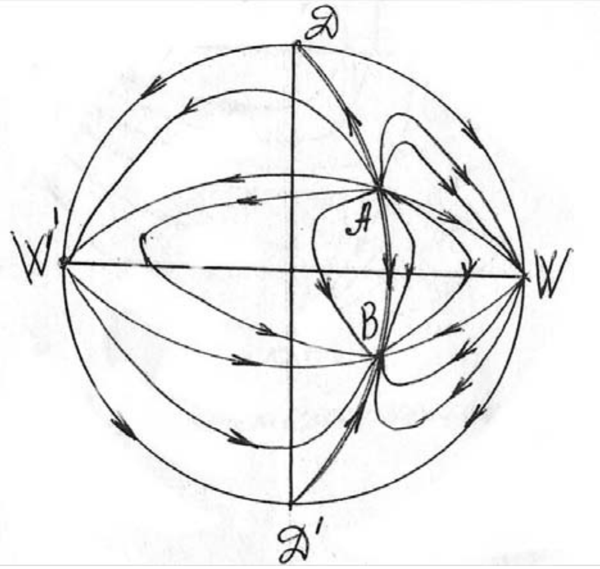

Рис. 2. Фазовый портрет системы (15) в круге Пуанкаре.

Пример 2. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x-1)(3y-1), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-1)(y+1) \end{cases} \tag{16}$$

имеет в ограниченной части фазовой плоскости два простых седла $A(1, 1)$, $B(1, -1)$, а на бесконечности – неустойчивый простой узел $D(v=0, z=0)$ и сложное состояние равновесия $W(u=0, z=0)$, достаточно малая окрестность которого состоит из двух параболических и двух эллиптических секторов (Рис. 3).

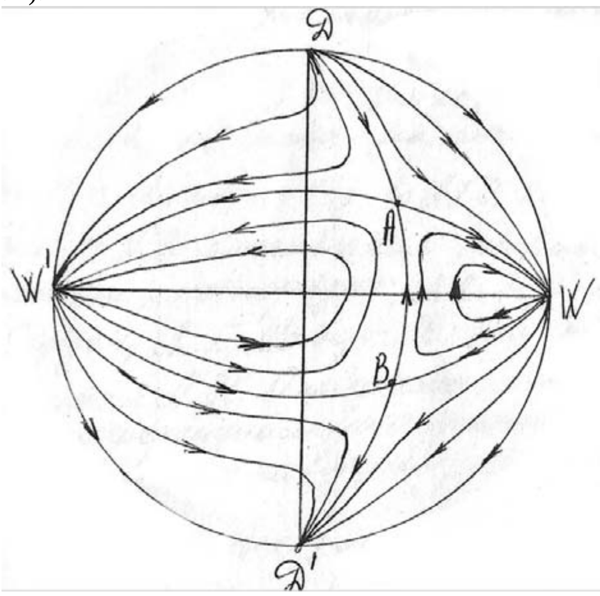

Рис. 3. Фазовый портрет системы (16) в круге Пуанкаре

Литература

1. *Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С.* Полиномиальные векторные поля на плоскости. Избранные вопросы. – Майкоп: Изд-во АГУ, 2012. – 326 с.
2. *Андронов А.А.* Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.
3. *Берлинский А.Н.* О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения//Известия высших учебных заведений. – 1960. – № 2(15). – С.3-18.
4. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М. – Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947. – 392 с.
5. *Ушхо Д.С., Ушхо А.Д.* Исследование бесконечно удаленных особых точек кубической дифференциальной системы в одном случае // Труды ФОРА. – 2007. – №12. – С.19-29.

ESTIMATION OF THE SUM OF INDICES OF INFINITELY DISTANT EQUILIBRIUM STATES OF A QUADRATIC SYSTEM

A.D. Ushkho

It is shown that the sum of the indices of the equilibrium states of a quadratic system located at the equator of the Poincare sphere belongs to the interval [-1;3].

