СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЭЛЕЯ МОЛЕКУЛ ПО СКОРОСТЯМ

И.Н. Жукова, М.В. Ершова

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Выведена формула для распределения молекул двухмерного газа по скоростям и установлено ее соответствие статистическому распределению Рэлея. Вычислены характерные скорости движения молекул. Получены основные статистические характеристики распределения.

Рассмотрим систему из большого количества молекул, но двигаться они будут только в плоскости X,Y. Тогда вероятность того, что проекция скорости молекулы на ось X лежит в интервале от v_x до $v_x + dv_x$ равна [1]:

$$dP_{v_x,v_x+dv_x}(v_x) = \frac{dN_{v_x,v_x+dv_x}}{N} = \varphi(v_x)dv_x ,$$

а вероятность того, что проекция скорости молекулы на ось Y лежит в интервале от v_y до $v_y + dv_y$ равна:

$$dP_{v_y,v_y+dv_y}(v_y) = \frac{dN_{v_y,v_y+dv_y}}{N} = \varphi(v_y)dv_y .$$

Вероятность одновременного наступления этих двух событий равна:

$$dP_{v_x,v_x+dv_x;v_y,v_y+dv_y}(v_x,v_y) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)dv_x dv_y .$$

С другой стороны, эта же самая вероятность нахождения скорости точки в пределах элементарной площадки $dv_x dv_y$ является функцией модуля скорости:

$$dP_{v_x,v_x+dv_x;v_y,v_y+dv_y}(v_x,v_y) = f(v)dv_x dv_y .$$

Получаем функциональное уравнение $\varphi(v_x)\varphi(v_y) = f(\sqrt{v_x^2+v_y^2})$.

Чтобы выявить вид функции φ от v_x и v_y, логарифмируем полученное уравнение, а затем дифференцируем его сначала по v_x, а потом и по v_y:

$$ln\,\varphi(v_x) + ln\,\varphi(v_y) = ln\, f\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right),$$

$$\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} + 0 = \frac{f'\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)}{f\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)} \cdot \frac{\partial}{\partial v_x}\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right) = \frac{f'\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)}{f\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)} \cdot \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} ,$$

$$0 + \frac{\varphi'(v_y)}{\varphi(v_y)} = \frac{f'\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)}{f\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)} \cdot \frac{\partial}{\partial v_y}\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right) = \frac{f'\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)}{f\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)} \cdot \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} .$$

Теперь поделим полученные выражения, соответственно, на v_x и v_y. Обратим внимание на то, что правые части полученных после деления выражений одинаковы, а, значит, можно приравнять левые части:

$$\frac{1}{v_x} \cdot \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} = \frac{1}{v_y} \cdot \frac{\varphi'(v_y)}{\varphi(v_y)} .$$

Так как v_x и v_y - независимые аргументы, то при изменении v_x левая часть полученного равенства должна оставаться равной любому определенному значению правой части, например: $\frac{1}{v_{y1}} \cdot \frac{\varphi'(v_{y1})}{\varphi(v_{y1})} = \alpha_1 = const$.

Имеем теперь дифференциальное уравнение: $\frac{1}{v_x} \cdot \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} = \alpha_1$. Решая его, находим: $\varphi(v_x) = Ae^{\frac{\alpha_1 v_x^2}{2}}$.

Постоянная α_1 не может быть положительным числом, так как в этом случае вероятность как угодно больших скоростей молекул стремилась бы к бесконечности, что противоречит факту ограниченности кинетической энергии системы реальных молекул. Таким образом, $\alpha_1 = -\alpha$, причем величина α уже является положительной: $\alpha > 0$.

Окончательно перепишем выражение для $\varphi(v_x)$: $\varphi(v_x) = Ae^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}}$.

Нормируем полученную функцию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v_x) dv_x = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\alpha v_x^2}{2}} dv_x = 1 \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}.$$

Вводя σ_0:

$$\alpha = \frac{1}{\sigma_0^2}, \tag{1}$$

можем функцию распределения молекул по проекции скорости v_x переписать в виде, соответствующем распределению Гаусса:

$$\varphi(v_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} e^{-\frac{v_x^2}{2\sigma_0^2}}. \tag{2}$$

Вычислим постоянную α. Для этого найдем давление газа на стенку сосуда. Сила, усредненная по времени, с которой молекула с проекцией скорости v_x действует на стенку, равна: $f = \frac{mv_x}{\Delta t} = \frac{mv_x^2}{\ell}$, где ℓ - расстояние, соответствующее длине свободного пробега молекулы.

Средняя по ансамблю сила равна $\langle f \rangle = \frac{m}{\ell} \langle v_x^2 \rangle$.

В результате действия на стенку N молекул, сила давления на стенку:

$$F = \langle f \rangle N = \frac{m}{\ell} \langle v_x^2 \rangle nS\ell .$$

С другой стороны, давление на стенку равно $P = mn\langle v_x^2 \rangle$.

Среднее значение квадрата проекции скорости $\langle v_x^2 \rangle$ вычислим, используя распределение (2):

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \varphi(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}} dv_x = \frac{1}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$P = mn \cdot \frac{1}{\alpha}. \tag{3}$$

Из эксперимента известно, что давление идеального газа определяется уравнением состояния:

$$P = \frac{mRT}{\mu V} = nkT. \tag{4}$$

Сопоставляя выражения (3) и (4), получим: $\alpha = \frac{m}{kT}$, а с учетом связи параметров α и σ_0 (1):

$$\sigma_0^2 = \frac{kT}{m}. \tag{5}$$

Окончательно $A=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$, а значит функция распределения Гаусса (2) по одной проекции скорости имеет вид:

$$\varphi(v_x)=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}. \qquad (2a)$$

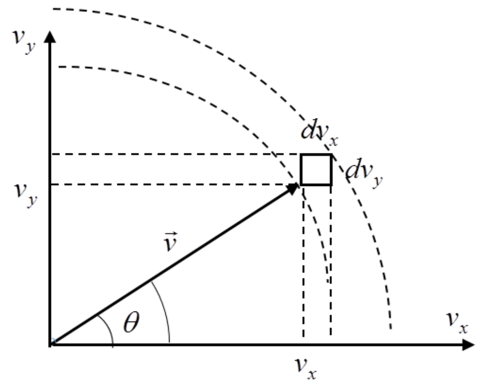

Рис. 1. Область возможных значений вектора скорости молекулы

Функция распределения по векторам скоростей $\vec{v}$ имеет вид:

$$f(\vec{v})=f\left(v_x,v_y\right)=\varphi\left(v_x\right)\varphi\left(v_y\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}e^{-\frac{\left(v_x^2+v_y^2\right)}{2\sigma_0^2}}.$$

В полярных координатах (рис. 1) вероятность того, что значения скорости частицы не будут выходить за рамки области $vdvd\theta=dv_xdv_y$:

$$dP(\vec{v})=\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}e^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}}dv_xdv_y=\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}e^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}}vdvd\theta.$$

Интегрируя по углу θ, получим вероятность того, что конец вектора скорости будет находиться в области кольца толщиной dv:

$$dP(v)=\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}e^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}}vdv\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{1}{\sigma_0^2}e^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}}vdv.$$

Следовательно, функция распределения молекул двухмерного газа по модулю скорости v имеет вид:

$$f(v)=\frac{dP(v)}{dv}=\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot v\cdot e^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}}=\frac{m}{kT}\cdot v\cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \qquad (6)$$

Полученное распределение (6) совпадает с распределением Рэлея [2, с. 68]:

$$f(x)=\frac{x}{\sigma_0^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}},\ x\geq 0 \qquad (7)$$

широко применяемым в радиолокации при оценке погрешности обнаружения целей.

Основные сведения о статистических характеристиках распределения Рэлея приведены в таблице 1 [2, с. 68].

Таблица 1

Основные свойства распределения Рэлея	
Среднее значение	$M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_0 = 1{,}253\sigma_0$;
Дисперсия	$D[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot(x - M[x])^2 dx = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma_0 = 0{,}429\sigma_0^2$;
Медиана	$\int_0^{x_м} f(x)dx = \int_{x_м}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$, $Me = 1{,}177\sigma_0$;
Мода	$\frac{df(x)}{dx} = 0$, $Mo = \sigma_0$;
Коэффициент асимметрии	$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{2\sqrt{\pi}(\pi - 3)}{\sqrt{(4-\pi)^3}} = 0{,}631$;
Коэффициент эксцесса	$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{24\pi - 16\pi^2 - 16}{(4-\pi)^2} = 0{,}254$.

Найдем основные статистические характеристики распределения (6) и сравним их с характеристиками распределения Рэлея, приведенными в таблице 1.

1. Наиболее вероятная скорость (мода распределения) находится из условия экстремума функции распределения:

$$f'_{(x,y)}(v) = 0 \Rightarrow \quad v_{в(x,y)} = \sigma_0 = \sqrt{\frac{kT}{m}}. \tag{8}$$

2. Средняя арифметическая скорость равна:

$$\langle v \rangle_{(x,y)} = \int_0^{+\infty} v f_{(x,y)}(v)dv = \frac{1}{\sigma_0^2}\cdot\int_0^{+\infty} v^2 e^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}} dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sigma_0 = \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}}. \tag{9}$$

3. Среднеквадратичная скорость:

$$\left\langle v^2 \right\rangle_{(x,y)} = \int_0^{+\infty} v^2 f_{(x,y)}(v)dv = \frac{1}{\sigma_0^2}\cdot\int_0^{+\infty} v^3 e^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}} dv = \frac{1}{2\sigma_0^2}\int_0^{+\infty} y e^{-\frac{y}{2\sigma_0^2}} dy = \Im_k = 2\sigma_0^2 = \frac{2kT}{m}. \tag{10}$$

Следовательно, среднеквадратичная скорость равна:

$$v_{кв(x,y)} = \sqrt{\left\langle v^2 \right\rangle_{(x,y)}} = \sigma_0\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \tag{10a}$$

4. Дисперсию модуля скорости найдем по формуле:

$$D[v]_{(x,y)} = \left\langle v^2 \right\rangle_{(x,y)} - \langle v \rangle_{(x,y)}^2 = 2\sigma_0^2 - \frac{\pi}{2}\cdot\sigma_0^2 = \frac{(4-\pi)}{2}\cdot\sigma_0^2, \tag{11}$$

что совпадает со значением дисперсии для распределения Рэлея, приведенным в таблице 1.

5. Стандартное отклонение $\sigma_{(x,y)} = \sqrt{D[v]_{(x,y)}}$ найдем из формулы (11):

$$\sigma_{(x,y)} = \sigma_0\sqrt{\frac{(4-\pi)}{2}}. \tag{12}$$

Перейдем от параметра σ_0 к стандартному отклонению $\sigma_{(x,y)}$ в записи формулы (6):

$$f_{(x,y)}(v) = \frac{(4-\pi)}{2\sigma_{(x,y)}^2}\cdot v\cdot e^{-\frac{v^2(4-\pi)}{4\sigma_{(x,y)}^2}}. \tag{6a}$$

6. Для вычисления коэффициента асимметрии распределения (6) нам понадобится третий момент распределения, связанный с коэффициентом асимметрии:

$$\mu_{3(x,y)} = \int_0^{\infty} (v - \bar{v})^3 f_{(x,y)}(v)dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\pi - 3)\sigma_0^3. \tag{13}$$

Коэффициент асимметрии с учетом связи (12) стандартного отклонения $\sigma_{(x,y)}$ и параметра σ_0 принимает вид:

$$A_{(x,y)}=\frac{\mu_{3(x,y)}}{\sigma^3_{(x,y)}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\pi-3)\sigma_0^3\cdot\left(\frac{2}{4-\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sigma_0^3}=\frac{2\sqrt{\pi}(\pi-3)}{(4-\pi)^{\frac{3}{2}}}=0{,}631\,, \qquad (14)$$

что совпадает со значением коэффициента асимметрии, приведенным в таблице 1.

7. Вычислим коэффициент эксцесса для распределения (6). Четвертый момент распределения μ_4:

$$\mu_{4(x,y)}=\int_0^\infty(v-\bar{v})^3 f_{(x,y)}(v)dv=\left(32-3\pi^2\right)\frac{\sigma_0^4}{4}\,, \qquad (15)$$

тогда коэффициент эксцесса с учетом связи (12) стандартного отклонения $\sigma_{(x,y)}$ и параметра σ_0 принимает вид:

$$E_{(x,y)}=\frac{\mu_{4(x,y)}}{\sigma^4_{(x,y)}}-3=\frac{\left(32-3\pi^2\right)\sigma_0^4}{4\sigma_0^4}\cdot\left(\frac{2}{4-\pi}\right)^2-3=\frac{24\pi-6\pi^2-16}{(4-\pi)^2}=0{,}245\,, \qquad (16)$$

что совпадает со значением эксцесса, приведенным в таблице 1.
При вычислении формул (9), (10), (13), (15) использовались интегралы [3, 4]:

$$\Im_1=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,,\qquad \Im_5=\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty y^n e^{-\alpha y}dy,\, y=x^2,\, n=0,1\ldots,$$

$$\Im_{2k}=\int_0^\infty x^{2k}e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2^{k+1}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2k+1}}}\,,\qquad \Im_k=\int_0^\infty y^k e^{-\alpha y}dy=\frac{k!}{\alpha^{k+1}}\,.$$

Вычисленные характеристики (8) – (16) для распределения (6) совпали с табличными значениями из таблицы 1 для распределения Рэлея (3).

Таким образом, распределение молекул двухмерного газа по скоростям представляет собой распределение Рэлея и характеризуется одним параметром σ_0, который однозначно связан со средним значением скорости $\bar{v}_{(x,y)}$ и стандартным отклонением $\sigma_{(x,y)}$ формулами (9) и (12).

Распределение Рэлея (3) через $\sigma_{(x,y)}$ мы уже записали в (6а), теперь запишем его через среднюю скорость $\bar{v}_{(x,y)}$:

$$f_{(x,y)}(v)=\frac{\pi v}{2\bar{v}^2_{(x,y)}}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{v^2}{\bar{v}^2_{(x,y)}}}\,. \qquad (6б)$$

В виде (6б) распределение Рэлея (6) встречается в работе [5] при анализе скорости ветра, правда автор называет распределение (6б) распределением Максвелла.

Распределение (6) при переходе к относительной скорости молекул $u=\frac{v}{v_в}$ принимает вид $f_{(x,y)}(u)$:

$$f_{(x,y)}(u)=\frac{dn}{ndu}=u\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\,. \qquad (17)$$

Найдем среднее значение, дисперсию и стандартное отклонение распределения (17).

$$\langle u\rangle=\int_0^\infty uf(u)du=\int_0^\infty u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}du=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,. \qquad (18)$$

Для нахождения дисперсии вычислим среднее значение квадрата относительной скорости:

$$\langle u^2\rangle=\int_0^\infty u^2 f(u)du=\frac{1}{2}\int_0^\infty u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}du^2=\frac{1}{2}\int_0^\infty ye^{-\frac{y}{2}}dy=2\,.$$

$$D[u] = \langle u^2 \rangle - (\langle u \rangle)^2 = 2 - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^2 = 0{,}43 \,. \tag{19}$$

Тогда стандартное отклонение равно:

$$\sigma = \sqrt{D[u]} = 0{,}66 \,. \tag{20}$$

Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики: учебное пособие. В 5 т. Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика. – М.: Физматлит, 2006. – 544 с.
2. *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.
3. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.- мат. лит., 1986. – 544 с.
4. *Шпольский Э.В.* Атомная физика: Учебное пособие в 2-х томах. Т.II. Основы квантовой механики и строение электронной оболочки атома. – М.: Наука, Гл. ред. физ.- мат. лит., 1984. – 440 с.
5. *Рыхлов А.Б.* Анализ применения различных законов распределения для выравнивания скоростей ветра на юго-востоке европейской территории России // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Науки о Земле. – 2010. – Т. 10. Вып. 2. – 25-30 с.

STATISTICAL PROFILE OF THE RAYLEIGH DISTRIBUTION OF MOLECULES BY VELOCITY

I.N. Zhukova, M.V. Yershova

A formula for the velocity distribution of two-dimensional gas molecules is derived and its correspondence to the statistical Rayleigh distribution is established. The characteristic velocities of the molecules are calculated. The main statistical characteristics of the distribution are obtained.

