2019 г. № 24

Труды ФОРА

ОТСУТСТВИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ПЛОСКОЙ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩЕЙ ИНВАРИАНТНУЮ КРИВУЮ В ВИДЕ ГИПЕРБОЛЫ

В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Доказано отсутствие изолированных периодических решений у автономной квадратичной дифференциальной системы, которая имеет инвариантную кривую в виде гиперболы.

Как известно [1], общей чертой автоколебательных систем является их способность совершать колебания, период и амплитуда которых не зависят от начальных значений, а определяются свойствами самой системы. Такие системы описываются автономными дифференциальными уравнениями. Наличие устойчивых предельных циклов в системе дифференциальных уравнений, описывающей реальную систему, является необходимым и достаточным условием для возможности существования автоколебаний в системе. Этим объясняется большой интерес математиков к проблеме существования, отсутствия изолированных периодических решений (предельных циклов) автономных дифференциальных систем на плоскости.

В данной заметке строится все множество квадратичных систем

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij} x^i y^j \equiv P_2(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j \equiv Q_2(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R, (P_2, Q_2) = 1$, имеющих инвариантную кривую $L: x^2 - y^2 - R^2 = 0$. Пусть $L: \omega(x,y) = 0$ – инвариантная кривая системы (1). Тогда имеет место тождество [2, 3].

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} P_2(x,y) + \frac{\partial \omega}{\partial y} Q_2(x,y) \equiv \omega(x,y)(Ax + By + C) \tag{2}$$

Из (2) получаем соотношения:

$$a_{00} = -a_{20}R^2, a_{01} = b_{10}, a_{11} = b_{20} + b_{02}, a_{02} = b_{11} - a_{20}, b_{00} = b_{02}R^2, b_{01} = 0. \tag{3}$$

С учетом (3) система (1) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y[b_{10} + (b_{20} + b_{02})x + b_{11}y] + a_{20}(x^2 - y^2 - R^2) \equiv \overline{P}_2(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = x[b_{10} + (b_{20} + b_{02})x + b_{11}y] - b_{02}(x^2 - y^2 - R^2) \equiv \overline{Q}_2(x,y) \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. *Система* (1) *имеет инвариантную кривую L тогда и только тогда, когда она имеет вид* (4).

Замечание 1. Так как $(\overline{P_2}, \overline{Q_2}) = 1$, то выполняются условия:

$$|a_{20}| + |b_{02}| > 0, \ |b_{10}| + |b_{20} + b_{02}| + |b_{11}| > 0.$$

Утверждение 1. Прямая $l_0 : b_{10} + (b_{20} + b_{02})x + b_{11}y = 0$ –изоклина системы (4), причем на l_0 индуцировано направление $m = -\frac{b_{02}}{a_{20}}$.

Утверждение 2. Прямая l_0 является инвариантной для системы (4) тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$a_{20}(b_{20} + b_{02}) - b_{11}b_{02} = 0 \tag{5}$$

Лемма 1. Замкнутая траектория системы (4) не пересекает прямую l_0.

В самом деле, если выполняется равенство (5), то в силу утверждения 2 l_0 не пересекает никакая замкнутая траектория системы (4). Если не выполняется условие (5), то l_0 не имеет контакта с траекториями системы (4). Кроме того, всякое состояние равновесия системы (4), принадлежащее прямой l_0, лежит также на инвариантной кривой L. Следовательно, такое состояние равновесия не может быть окружено замкнутой траекторией.

Из леммы 1 следует

Утверждение 3. Если есть замкнутая траектория системы (4), то она непременно расположена в одной из открытых односвязных областей, на которые разбивают фазовую плоскость прямая l_0 и эллипс L.

Теорема 2. *Система дифференциальных уравнений* (4) *не имеет предельных циклов.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Дюлака [1]. Следуя утверждению 3, возьмем в качестве функции Дюлака функцию $D(x,y) = \{[b_{10} + (b_{20} + b_{02})x + b_{11y}](x^2 - y^2 - R^2)\}^{-1}$, тогда

$$(\overline{P}_2 \cdot D)'_x + (\overline{Q}_2 \cdot D)'_y = \frac{b_{11}b_{02} - a_{20}(b_{20} + b_{02})}{[b_{10} + (b_{20} + b_{02})x + b_{11}y]^2} \tag{6}$$

Если выполняется условие (5), то система (4) является гамильтоновой [1] в областях возможного расположения замкнутых траекторий. Как известно, такие системы не имеют изолированных замкнутых траекторий. Если условие (5) не выполняется, то выражение (6) знакопостоянно, и по признаку Дюлака система не имеет предельных циклов. Теорема доказана.

Замечание 2. Автором пособия [4] доказано отсутствие предельных циклов дифференциального уравнения траекторий системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(ax + by + c) - \beta(x^2 -^2 - 1), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(ax + by + c) - \alpha(x^2 - y^2 - 1), \end{cases} \tag{7}$$

имеющей алгебраическую инвариантную кривую $x^2 - y^2 - 1 = 0$. В целях применения критерия Дюлака к системе (7) автор упомянутой работы строит функцию Дюлака в виде $D(x,y) = (x^2 - y^2 - 1)^{\delta}$, где $\delta \in R$, для областей знакопостоянства функции $x^2 - y^2 - 1$. При этом процедура доказательства отсутствия предельных циклов включает в себя доказательство невозможности пересечения замкнутыми траекториями системы (7) асимптот гиперболы $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

Замечание 3. В реальной колебательной системе, моделируемой квадратичной системой (4), невозможен режим автоколебаний.

Литература

1. *Баутин Н.Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоско-сти /Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М: Наука, 1976. – 496с.

2. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений /Н.П. Еругин. – Минск: Изд-во Наука и техника, 1979. – 744с.

3. *Амелькин В.В.* Нелинейные колебания в системах второго порядка /В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 208с.
4. *Дружкова Т.А.* Алгебраические дифференциальные уравнения с алгебраическими интеграла-ми: Изд-во Нижегородского ун-та, 2005. – 37с..

Absence of limit cycles of a plane quadratic system with an invariant curve in the form of a hyperbola

V.B. Tlachev, A.D. Ushkho, D.S. Ushkho

It is proved that there are no isolated periodic solutions for an autonomous quadratic differential system that has an invariant curve in the form of a hyperbola.

