1996 г. **Труды ФОРА** **№ 1**

ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В.А. Тешев, М.М. Шумафов

Адыгейский государственный университет, Майкоп

В статье получен частотный критерий абсолютной устойчивости для системы "прямого управления" с гистерезисной нелинейностью в критическом случае.

Исследованию критического случая задачи об абсолютной устойчивости систем "непрямого и прямого управления" посвящены работы ряда авторов, из которых мы отметим лишь оригинальные работы В.М. Попова [1,2] и В.А. Якубовича[3,5].

В работах [1,2] рассматривался случай, когда матрица линейной части в системе "непрямого управления" гурвицева или имеет одно нулевое собственное значение. В этих работах В.М. Попова условия абсолютной устойчивости получены развитым им методом априорных интегральных оценок.

Общий критический случай (когда матрица линейной части системы "прямого управления" имеет произвольное число собственных значений на мнимой оси, а остальные - в левой полуплоскости) рассмотрен в работах [3-5] В.А. Якубовича. Исследования в [3-5] ведутся методом матричных неравенств, развитым В.А. Якубовичем [6].

В настоящей заметке рассматривается критический случай для системы "прямого управления" с гистерезисной нелинейностью и для такой системы получен частотный критерий устойчивости. Используя идею статьи [7] мы сводим критический случай к некритическому. Заметим, что при этом несколько сужается класс рассматриваемых нелинейных характеристик. Отметим, что такое сужение класса нелинейных характеристик в какой-то мере оправдывается практическими соображениями [7].

Следует отметить, что критический случай не является исключительным, а представляет собой общий случай (случай общего положения).

Рассмотрим систему "прямого управления"

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Px + q\xi, \quad \sigma = r^* x, \\ \xi &= \varphi[\sigma,\varphi_0]_t, \end{aligned} \tag{1}$$

где P-особая $(n \times n)$ матрица (т.е. det P=0); q,r - постоянные, n - векторы; $\varphi[\sigma,\varphi_0]_t$ - сильно непрерывная гистерезисная функция [8].

Предположим, что P имеет нулевое собственное значение с кратностью 1, а остальные ее собственные значения лежат в левой полуплоскости. Другими словами, передаточная функция $\chi(\lambda) = r^*(P-\lambda I)^{-1}q$ имеет простой нулевой полюс и представима в виде $\chi(\lambda) = \rho/\lambda + \chi_1(\lambda)$, где $\rho = \lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda\chi(\lambda)$ и все полосы $\chi_1(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части. Предположим, что $\rho > 0$ ($\rho = \operatorname{Res}\limits_{\lambda=0} \chi(\lambda)$).

1. Покажем, что малым шевелением элементов матрицы P можно добиться того, чтобы она стала гурвицевой. Сформулируем это утверждение в виде леммы.

Лемма. *Пусть матрица P имеет нулевое собственное значение с кратностью 1, а у остальных ее собственных значений вещественные части отрицательны. Тогда при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *матрица* $P + \varepsilon qr^*$ *будет гурвицевой.*

Доказательство. Обозначим $\Delta(\lambda) = det\ (P - \lambda I)$ - характеристический полином матрицы P. Передаточная функция $\chi(\lambda)$ имеет вид: $\chi(\lambda) = v(\lambda) / \Delta(\lambda)$, где $v(\lambda)$ - многочлен степени $\leq n$-1, а $\Delta(\lambda)$ - многочлен степени n. Покажем, что характеристический полином матрицы $P+\varepsilon qr^*$ есть полином $\Delta(\lambda)+\varepsilon\nu(\lambda)$. Действительно, применяя следствие леммы Шура [9] ($\det(I_n+qr^*)=1+r^*q$) будем иметь:

$$\det(P+\varepsilon qr^*-\lambda I)=\det(P-\lambda I)(I+\varepsilon(P-\lambda I)^{-1}qr^*)=$$

$$=\det(P-\lambda I)\det(I+\varepsilon(P-\lambda I)^{-1}qr^*)=\Delta(\lambda)(1+\varepsilon r^*(P-\lambda I)^{-1}q)=$$

$$=\Delta(\lambda)(1+\varepsilon\chi(\lambda))=\Delta(\lambda)+\varepsilon\nu(\lambda).$$

Обозначим этот полином через $\Delta_\varepsilon(\lambda)$: $\Delta_\varepsilon(\lambda)=\Delta(\lambda)+\varepsilon\nu(\lambda)$. Очевидно, $\Delta_0(\lambda)=\Delta(\lambda)$. Так как по условию $\lambda=0$ однократный корень полинома $\Delta(\lambda)$, то $\Delta(\lambda)=\lambda\Delta_1(\lambda)$, где $\Delta_1(\lambda)$ - гурвицев полином. Имеем $\Delta_0(\lambda)=\Delta(0)=0$.

Корни полинома $\Delta_\varepsilon(\lambda)$ являются непрерывными функциями от ε (в силу непрерывной зависимости корней полинома от коэффициентов): $\lambda=\lambda(\varepsilon)$. Имеем $\lambda(0)=0$. Выясним характер изменения функции $\lambda(\varepsilon)$ в окрестности $\varepsilon=0$.

Имеем: $\Delta_\varepsilon(\lambda(\varepsilon))\equiv 0$, то есть

$$\Delta(\lambda(\varepsilon))+\varepsilon\,\nu(\lambda(\varepsilon))\equiv 0,\ \lambda(\varepsilon)\Delta_1(\lambda(\varepsilon))+\varepsilon\nu(\lambda(\varepsilon))\equiv 0.$$

Дифференцируя последнее тождество по ε , получим:

$$\lambda'(\varepsilon)\Delta_1(\lambda(\varepsilon))+\lambda(\varepsilon)\Delta_1'(\lambda(\varepsilon))\lambda'(\varepsilon)+\nu(\lambda(\varepsilon))+\varepsilon\nu'(\lambda(\varepsilon))\lambda'(\varepsilon)\equiv 0.$$

Положим в этом тождестве ε=0. Получим (с учетом того, что $\lambda(0)=0$):

$$\lambda'(0)+\Delta_1(0)+\nu(0)\equiv 0,\quad \lambda'(0)=-\nu(0)/\Delta_1(0).$$

Но $\nu(\lambda)/\Delta_1(\lambda)=\lambda\chi(\lambda)$. Поэтому $\nu(\lambda)/\Delta_1(\lambda)=\rho+\lambda\chi_1(\lambda)$, $\nu(0)/\Delta_1(0)=\rho$, $\lambda'(0)=-\rho<0$.

Таким образом, $\lambda(0)=0$ и $\lambda'(0)=-\rho<0$.Следовательно, $\lambda(\varepsilon)<0$ при достаточно малых $\varepsilon>0$. Вещественные части остальных n-1 корней полинома $\Delta_\varepsilon(\lambda)$ при достаточно малых $\varepsilon>0$ останутся отрицательными (в силу упомянутой выше непрерывной зависимости корней полинома от коэффициентов).

Итак, все корни полинома $\Delta_\varepsilon(\lambda)$ при достаточно малых $\varepsilon>0$ будут иметь отрицательные вещественные части, т.е. матрица $P+\varepsilon qr^*$ будет гурвицевой при достаточно малых $\varepsilon>0$. Лемма доказана.

Вернемся к системе (1). Сделаем замену: $\varphi_1=\varphi-s\sigma$,где $0<s<s_0$.Тогда система (1) преобразуется в систему

$$\begin{aligned}&\dot{x}=P_1x+q_1\xi_1,\quad \sigma=r^*x\\&\xi_1=\varphi-s\sigma\equiv\varphi_1\ ,\end{aligned}\tag{1'}$$

где $P_1=P+sqr^*$, $q_1=q$. По лемме матрица P_1 будет гурвицевой, если s>0 достаточно мало. Применим к системе $(1')$ теорему статьи [10]. Получим:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) система $(1')$ *диссипативна и* $4\delta\varepsilon>(\Theta\nu)^2$ *для некоторых* $\delta\geq 0,\varepsilon\geq 0$ *и* Θ;

2) гистерезисная функция φ_1 *удовлетворяет условию* $0\leq\varphi_1/\sigma(t)\leq\mu$ *при* $\sigma(t)\neq 0$ *и для некоторой непрерывной функции* $F_1(\sigma)$ *и числа* ν *выполнено неравенство:* $|\varphi_1[\sigma(t),\varphi_0]_t-F_1(\sigma(t))|\leq\nu|\varphi_1[\sigma(t),\varphi_0]_t|$;

3) выполнено частотное условие: $\mu^{-1} + \mathrm{Re}(1+\Theta i\omega)\chi_s(i\omega) \geq \delta + \varepsilon|i\omega\chi_s(i\omega)|^2 \quad \forall\omega \geq 0$, *где* $\chi_s(\lambda) = \chi(\lambda)/1 + s\chi(\lambda)$.

Тогда для любого решения системы (1′) $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Из теоремы 1 следует:

Теорема 2. *Пусть*

1) система (1) диссипативна и $4\delta\varepsilon > (\Theta\nu)^2$ *для некоторых* $\delta \geq 0, \varepsilon \geq 0$ *и* Θ;

2) $s_0 \leq \varphi/\sigma \leq \mu \quad (\sigma \neq 0)$, $|\varphi - F| \leq \nu(|\varphi| - s_0|\sigma|)$ *для некоторой непрерывной функции* $F(\sigma)$ *и некоторого* $\nu > 0$;

3) выполнено частотное условие $\mu^{-1} + \mathrm{Re}(1+\Theta i\omega)\chi_s(i\omega) \geq \delta + \varepsilon|i\omega\chi_s(i\omega)|^2 \quad \forall\omega \geq 0$, *где* $\chi_s(\lambda) = \chi(\lambda)/1 + s\chi(\lambda)$.

Тогда для любого решения системы (1) $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Литература

1. *Попов В.М.* // Автоматика и телемеханика. 1961. т.XXII. №8 .
2. *Попов В.М.* // Автоматика и телемеханика. 1962. т.XXIII. №1.
3. *Якубович В.А.* // Автоматика и телемеханика. 1963. т.XXIV. №2.
4. *Якубович В.А.* // Автоматика и телемеханика. 1963. т.XXIV. №6.
5. *Якубович В.А.* // Автоматика и телемеханика. 1964. т.XXV. №5.
6. *Якубович В.А.* // Доклады АН СССР. 1962. т.143. №6.
7. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* // Автоматика и телемеханика. 1963. т.XXIV. №6.
8. *Якубович В.А.* // Автоматика и телемеханика. 1965. т.XXVI. №5.
9. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., 1978.
10. *Леонов Г.А., Тешев В.А.* // Дифференциальные уравнения. 1987. т.23. №4.

Frequency condition of stability for systems of differential equations with hysteresis functions in extreme case

V.A. Teshev, M.M. Shumafov

The authors otline the frequency condition of absolute stability for “direct control” system with hysteresis nonlinearity in extreme case.