О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОКРУЖНОСТИ, ПРАВЫЕ ЧАСТИ КОТОРЫХ ПОЛИНОМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

В.Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль

Дифференциальные уравнения второго порядка на окружности, правые части которых полиномы первой и второй степени относительно производной, рассматриваются на цилиндрическом фазовом пространстве. Получены достаточные условия существования устойчивого предельного цикла.

1. Полиномиальные уравнения второго порядка на окружности. Будем рассматривать уравнения второго порядка вида

$$a:\ \ddot{x} = a_0(x) + a_1(x)\dot{x} + a_2(x)\dot{x}^2 + \ldots + a_n(x)\dot{x}^n,$$

с ω-периодическими C^r-функциями ($r \ge 0$) $a_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Мы можем считать, что уравнение задано на окружности $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/\omega\mathbf{Z}$. Обозначим $\mathrm{A}_\omega^{n,r}$ – множество таких уравнений. Уравнение $a \in \mathrm{A}_\omega^{n,r}$ определяет на фазовом пространстве $T\mathbf{S}^1 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \ldots + a_n(x)y^n, \end{cases}$$

которую будем отождествлять с уравнением a.

В работах автора [1 – 5] рассматривались уравнение Льенара $a \in \mathrm{A}_\omega^{1,r}$ и уравнение $a \in \mathrm{A}_\omega^{2,r}$. Были описаны бифуркации рождения предельных циклов из «бесконечности». Кроме того, были получены достаточные условия существования предельных циклов не гомотопных нулю (предельных циклов второго рода). В настоящей работе для таких уравнений в предположении малости части коэффициентов мы дадим еще несколько условий существования предельных циклов.

2. Достаточные условия существования предельных циклов уравнений из $\mathrm{A}_\omega^{2,r}$. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = a_0(x,\mu) + a_1(x,\mu)\dot{x} + a_2(x,\mu)\dot{x}^2, \tag{1}$$

где a_0, a_1, a_2, $a'_{2\mu}$ – непрерывные функции на $\mathbf{S}^1 \times (-\delta, \delta)$.

Теорема 1. *Пусть*

$$a_1(x,0) = 0,\ a_2(x,0) = 0,\ \int_0^\omega a_0(x,0)dx > 0,\ \int_0^\omega a'_{2\mu}(x,0)dx < 0. \tag{2}$$

Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что при $0 < \mu < \varepsilon$ уравнение (1) *имеет в $\mathbf{S}^1 \times (0,+\infty)$ хотя бы один устойчивый предельный цикл.*

Доказательство. Траектории уравнения (1) в $\mathbf{S}^1 \times (0,+\infty)$ являются интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0(x,\mu)}{y} + a_1(x,\mu) + a_2(x,\mu)y \tag{3}$$

в $\mathbf{S}^1\times(0,+\infty)$. Уравнение (3) при $\mu=0$ принимает вид $dy/dx=a_0(x,0)/y$. Его решение $Y_0(x,y_0)$, удовлетворяющее начальному условию $Y_0(0,y_0)=y_0>0$ при

$$y_0^2>2\left|\min_{x\in[0,\omega]}\int_0^x a_0(s,0)ds\right|, \tag{4}$$

имеет вид

$$Y_0(x,y_0)=\sqrt{y_0^2+2\int_0^x a_0(s,0)ds}\,.$$

Оно определено при всех $x\in[0,\omega]$, и ввиду (2)

$$Y_0(\omega,y_0)=\sqrt{y_0^2+2\int_0^\omega a_0(s,0)ds}>y_0\,.$$

Фиксируем число $y_0>0$, удовлетворяющее условию (4). Так как решения уравнения (3) непрерывно зависят от μ, то существует такое число $\varepsilon>0$, что при $|\mu|<\varepsilon$ решение уравнения (3) $y=Y(x,y_0,\mu)$, удовлетворяющее начальному условию $Y(0,y_0,\mu)=y_0$, определено и положительно для всех $x\in[0,\omega]$, аналитически зависит от y_0 и $Y(\omega,y_0,\mu)>y_0$. Так как $a_2(x,\mu)=(a'_{2\mu}(x,0)+r(x,\mu))\mu$, где $r(x,\mu)$ - непрерывная функция, $r(x,0)=0$, то ввиду (2) ε можно выбрать столь малым, что $\int_0^\omega a_2(x,\mu)dx<0$ при $0<\mu<\varepsilon$. Из этого неравенства согласно [5] следует, что при достаточно большом $M>y_0$ $Y(\omega,s,\mu)<s$ для всех $s\ge M$. В результате получаем, что дуга $\{0\}\times[y_0,M]$ отображается по траекториям уравнения (1) внутрь себя. Поэтому уравнение имеет хотя бы одну замкнутую траекторию в $\mathbf{S}^1\times(0,+\infty)$. Поскольку $Y(\omega,s,\mu)$ аналитически зависит от s, и потому все замкнутые траектории изолированы (предельные циклы), то хотя бы одна из этих траекторий – устойчивый предельный цикл.

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}=\mu a_0(x,\mu)+a_1(x,\mu)\dot{x}+a_2(x,\mu)\dot{x}^2, \tag{5}$$

где $a_i(x,\mu)$, $i=0,1,2$ – C^2-функции на $\mathbf{R}\times(-\delta,\delta)$, ω-периодические по x, и

$$h:=\tfrac{1}{\omega}\int_0^\omega a_2(x,0)dx<0\,. \tag{6}$$

Обозначим

$$u(x):=\exp\int_0^x a_2(s,0)ds\,,\quad \Phi(x):=u(\omega)\int_0^\omega a_1(s,0)/u(s)ds+(1-u(\omega))\int_0^x a_1(s,0)/u(s)ds\,,$$

$$F(x):=\int_0^x\left(\frac{a_0(s,0)(1-u(\omega))}{u^2(s)\Phi(s)}+\frac{a'_{1\mu}(s,0)}{u(s)}+\frac{a'_{2\mu}(s,0)\Phi(s)}{1-u(\omega)}\right)ds\,.$$

Теорема 2. *Пусть*

$$\forall x\in[0,\omega]\ \ \Phi(x)>0\,. \tag{7}$$

Тогда при достаточно малых $|\mu|$ *уравнение (5) имеет в* $\mathbf{S}^1\times(0,+\infty)$ *единственную замкнутую траекторию – грубый устойчивый предельный цикл, задаваемый уравнением*

$$y=Y(x,\mu)=Y_0(x)+\mu Y_1(x)+\mu^2Y_2(x,\mu)\,, \tag{8}$$

где

$$Y_0(x)=\frac{u(x)\Phi(x)}{1-u(\omega)}\,, \tag{9}$$

$$Y_1(x)=\frac{u(x)}{1-u(\omega)}\big(u(\omega)F(\omega)+(1-u(\omega))F(x)\big)\,, \tag{10}$$

а $Y_2(x,\mu)$ – непрерывная функция, ω-периодическая по x.

Замечание. Условие (7) очевидно выполняется, если $a_1(x,0)>0$ для всех $x\in\mathbf{R}$.

Доказательство. Перейдем к уравнению

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mu\, a_0(x,\mu)}{y}+a_1(x,\mu)+a_2(x,\mu)y\,. \tag{11}$$

Если выполняется условие (6), то это уравнение при значении $\mu=0$ имеет единственное ω-периодическое решение $y=Y_0(x)$, где $Y_0(x)$ задается формулой (9). Вследствие условий (6) и (7) $\forall x\in[0,\omega]$ $Y_0(x)>0$. Характеристический показатель решения $h<0$, следовательно уравнение (11) при достаточно малых значениях $|\mu|$ имеет единственное ω-периодическое решение $y=Y(x,\mu)$ такое, что $Y\in C^2$, $Y(x,0)=Y_0(x)$, при этом его характеристический показатель отрицателен. Замкнутая кривая $y=Y(x,\mu)$, $x\in[0,\omega]$, – грубый устойчивый предельный цикл уравнения (5), лежащий в $\mathbf{S}^1\times(0,+\infty)$. Функцию $Y_1(x)$ в разложении (8) функции $Y(x,\mu)$ находим из уравнения в вариациях

$$Y_1'=a_2(x,0)Y_1+a_0(x,0)/Y_0(x)+a_{1\mu}'(x,0)+a_{2\mu}'(x,0)Y_0(x)$$

и условия $Y_1(\omega)=Y_1(0)$. Она имеет вид (10).

Согласно [5] из условия (6) следует, что найдутся такие числа $M>0$, $\varepsilon>0$, что при $|\mu|<\varepsilon$, в $\mathrm{S}^1\times(M,+\infty)$ нет замкнутых траекторий. Пусть $N>M$. Поскольку при $\mu=0$ уравнение (11) имеет единственную и грубую замкнутую траекторию, то при достаточно малом ε $\forall\mu\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ в $\mathbf{S}^1\times[0,N]$ будет только одна замкнутая траектория уравнения (1). Поэтому найденный цикл – единственный в $\mathbf{S}^1\times(0,+\infty)$.

3. Достаточные условия существования предельных циклов уравнений Льенара. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}=a_0(x,\mu)+a_1(x,\mu)\dot{x}\,, \tag{12}$$

где a_0, a_1, $a_{1\mu}'$ – непрерывные функции на $\mathbf{S}^1\times(-\delta,\delta)$. Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 3. *Пусть в уравнении* (12)

$$a_1(x,0)=0\,,\ \int_0^\omega a_0(x,0)dx>0\,,\ \int_0^\omega a_{1\mu}'(x,0)dx<0\,.$$

Тогда существует такое число $\varepsilon>0$, что при $0<\mu<\varepsilon$ уравнение (1) имеет в $\mathbf{S}^1\times(0,+\infty)$ хотя бы один устойчивый предельный цикл.

Рассмотрим теперь уравнение, зависящее от двумерного параметра $\mu=(\mu_1,\mu_2)$

$$\ddot{x}=\mu_1 a_0(x,\mu)+(a_{10}(x)+\mu_2 a_{11}(x,\mu))\dot{x}\,, \tag{13}$$

где a_0 и a_{11} – непрерывные функции на $\mathbf{S}^1\times(-\delta,\delta)^2$, a_{10} – непрерывная функция на $\mathbf{S}^1$.

Теорема 4. *Пусть*

$$\int_0^\omega a_0(x,0)dx>0\,,\int_0^\omega a_{10}(x)dx=0\,,\ \int_0^\omega a_{11}(x,0)dx<0\,.$$

Тогда существует такие числа $k_0>0$ и $l>0$, что для любых $k\in(0,k_0]$, $L\in(l,+\infty)$ найдется такое число $\varepsilon>0$, что уравнение (13) *при $0<\mu_1<\varepsilon,\ \mu_2=k\mu_1$ имеет в $\mathbf{S}^1\times[l,\,L]$ единственный, причем устойчивый, предельный цикл.*

Доказательство. Перейдем к уравнению

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mu_1\, a_0(x,\mu)}{y}+a_{10}(x)+\mu_2 a_{11}(x,\mu)\,. \tag{14}$$

При $\mu=0$ оно имеет ω-периодическое решение $Y_0(x,c)=c+\int_0^x a_{10}(s)ds$, удовлетворяющее начальному условию $Y_0(0,c)=c$ для любого числа

$$c>\left|\min_{x\in[0,\omega]}\int_0^x a_{10}(s)ds\right|.$$

При $\mu_1>0,\ \mu_2=k\mu_1,\ k>0$ будем искать ω-периодическое решение уравнения (14), удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=0}=c$, в виде

$$y=Y(x,c,\mu_1,k)=Y_0(x,c)+Y_1(x,c,\mu_1,k)\mu_1 .$$

Для функции Y_1 получаем дифференциальное уравнение

$$Y_1'=\frac{a_0(x,\mu)}{Y_0(x,c)}+ka_{11}(x,\mu),$$

и начальное условие $Y_1(0,c,\mu_1,k)=0$, из которых находим

$$d(c,\mu_1,k):=Y_1(\omega,c,\mu_1,k)=\int_0^\omega \frac{a_0(x,\mu)}{Y_0(x,c)}dx+k\int_0^\omega a_{11}(x,\mu)dx .$$

Запишем $d(l,0,0)$ в виде

$$d(l,0,0)=l^{-1}\int_0^\omega\left(1+l^{-1}\int_0^x a_{10}(s)ds\right)^{-1}a_0(x,0)dx,$$

Так как $\lim\limits_{l\to\infty}\left(1+l^{-1}\int_0^x a_{10}(s)ds\right)^{-1}a_0(x,0)=a_0(x,0)$ равномерно относительно $x\in[0,\omega]$, то $\lim\limits_{l\to+\infty} ld(l,0,0)=\int_0^\omega a_0(x,0)dx>0$ и потому

$$d(l,0,0)>0 \tag{15}$$

при достаточно большом l. Поскольку $d_c'(c,0,k)=-\int_0^\omega \frac{a_0(x,0)}{Y_0^2(x,c)}dx$, то аналогично получаем для достаточно большого l

$$d_c'(c,0,k)<0 \text{ при } c\ge l \text{ и любом } k . \tag{16}$$

Фиксировав l так, чтобы выполнялись неравенства (15) и (16), при достаточно малом $k_0>0$ будем иметь

$$d(l,0,k)>0 \text{ для всех } k\in(0,k_0]. \tag{17}$$

Ясно, что $\lim\limits_{c\to+\infty} d(c,0,k)=k\int_0^\omega a_{11}(x,0)dx<0$. Отсюда и из (16), (17) следует, что $d(\cdot,0,k)$ имеет на промежутке $(l,+\infty)$ единственный нуль $c_0(k)$ и

$$d_c'(c_0(k),0,k)<0. \tag{18}$$

По теореме о неявной функции существуют такие числа $\rho>0$ и $\varepsilon>0$, что при каждом $\mu_1\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ уравнение $d(c,\mu_1,k)=0$, $|c-c_0(k)|<\rho$, имеет единственное решение $c=\eta(\mu_1,k)$, причем $\eta\in C$, $\eta(0,k)=c_0(k)$. Кривая $\Gamma_{\mu_1,k}$: $y=Y(x,\eta(\mu_1,k),\mu_1,k)$, $x\in[0,2\pi]$ – единственная замкнутая траектория, проходящая через точку дуги $\mathbf{S}^1\times(c_0(k)-\rho,\ c_0(k)-\rho)$. Так как

$$Y_c'(\omega,c,\mu_1,k)\big|_{c=\eta(\mu_1,k)}=1+\mu_1 d_c'(c,0,k)\big|_{c=\eta(\mu_1,k)},$$

то в силу (18) при достаточно малом $\varepsilon>0$ для $0<\mu_1<\varepsilon$ $0<Y_c'(\omega,c,,\mu_1,k)\big|_{c=\eta(\mu_1,k)}<1$, то есть замкнутая траектория – устойчивый предельный цикл.

Возьмем любое число $L \in (l, +\infty)$. При $c \in [l, L] \setminus (c_0(k) - \rho, c_0(k) - \rho)$ $|d(c, 0, k)| \geq v > 0$. Поэтому ε можно выбрать столь малым, что при $\mu_1 \in (0, \varepsilon)$ $|d(c, \mu_1, k)| \geq v/2 > 0$, а $|Y(\omega, c, \mu_1, k) - c| \geq \mu_1 v/2 > 0$. Тем самым, $\Gamma_{\mu_1, k}$ – единственная замкнутая траектория в $\mathbf{S}^1 \times [l, L]$.

Теорема доказана.

Литература

1. *Ройтенберг В.Ш.* Об уравнениях Льенара на окружности // Труды X международных Колмогоровских чтений: сб. статей. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2012. – С. 83-85.
2. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях бесконечно удаленных предельных циклов уравнений Льенара с периодическими коэффициентами // Труды ФОРА. – 2012. – Т. 17. – С. 9-12.
3. *Ройтенберг В.Ш.* О предельных циклах уравнений Льенара с периодическими коэффициентами // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. Сб. трудов XXVI международной научной конференции. Нижний Новгород: Нижегородский гос. тех. ун-т, 2013. – Т.1. – С. 5-7.
4. *Ройтенберг В.Ш.* О типичных уравнениях Льенара // Ярославский педагогический вестник. – 2013. – № 1. – Т. 3 (Естественные науки). – С. 74-78.
5. *Ройтенберг В.Ш.* О предельных циклах одного дифференциального уравнения второго порядка на окружности // Научно-технический вестник Поволжья. – 2017. – № 1. – С. 25-28.

ON SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE CYCLE, WHICH RIGHT PARTS ARE POLYNOMIALS RELATIVE TO DERIVATIVE

V.Sh. Roitenberg

The paper considers second order differential equations on the cycle, which right parts are polynomials of first and second degree relative to derivative, on the cylindrical phase space. We obtain sufficient conditions for existence of a stable limit cycle.

