ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ РЕЛАКСАЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.И. Куев

Адыгейский республиканский институт гуманитарных исследований, г. Майкоп

Рассмотрены оптимизационные задачи линейного и квазилинейного программирования. Математически обоснованы методы формирования функций релаксации в модели квазилинейного программирования и описаны этапы их построения.

Введение

При построении математических моделей в экономике наиболее разработанным и развитым методом является линейное программирование. Методами линейного программирования можно решать задачи, в которых требуется определить оптимальные значения многих переменных величин, представляющих масштабы или уровень возможного использования ресурсов различными способами при некоторой системе условий, сформулированных в строго математической форме. При этом качество решения многих экономических задач может быть улучшено на основе аппарата линейного программирования.

В тоже время необходимость отражения многих факторов с обратной связью, наличие нелинейностей требуют совершенствования моделей оптимизации. Среди развиваемых математических инструментов моделирования, учитывающих указанные факторы, весьма полезным может быть метод квазилинейного программирования. Необходимость корректировки параметров математической модели вызвана рядом обстоятельств:

– принципиальная неопределенность ряда параметров: многокритериальность, «устранимая» неопределенность ряда параметров, происходящая из-за недостаточной информации об изучаемом объекте;

– анализ и «доопределение» неопределенных параметров осуществляется с помощью теории игр или методов многокритериальной оптимизации.

В методах стационарной релаксации В.А. Булавского для решения систем неравенств (в общем случае несовместных) параметрическая развязка для несовместности используется путем введения в правую часть подправки, зависящей от параметров Введение параметрической подправки позволило, с одной стороны, ввести понятие решения для случая несовместной системы, с другой стороны, разработать достаточно широкий класс методов типа метода последовательных приближений, пригодных для решения как несовместных, так и совместных систем неравенств [1, 2].

Наличие плохо формализованных факторов, противоречивых ограничений и целевых функций, неопределенности, являются характерными явлениями для задач оптимизации производства сельскохозяйственной продукции.

Рассмотрим классическую ЗЛП:

$$\min \{c'x \mid Ax \geq b,\ x \in R_n+\}; \tag{1}$$

$$\max \{b'y \mid A'y \leq c,\ y \in R_+^m\}, \tag{2}$$

где $x \in R_n+$ – искомый вектор;

c – нормативные затраты на производство различного вида продукции;

$b \in R_m$ – вектор-столбец ограничений, компоненты которого трактуются как наши требования на производство учитываемых факторов.

Как правило степень адекватности разработанных моделей в реальной обстановке во многом зависит от выбора b и c.

Наиболее существенным свойством моделей линейного программирования (МЛП) является то, что с их помощью можно сопоставить результаты производства с затратами. Исходя из этого, можно установить степень некорректности в определении компонентов b и c. Причин недостаточности их уровней существует много.

Но главное – это несоответствие между определенными ресурсами и потребностями. Однако избежать этого достаточно сложно.

Результат несоответствия как правило обнаруживается с помощью оптимальных расчетов. В результате расчетов можно установить также недостаток некоторых ресурсов и невозможность обеспечения требований по производству определенных товаров при ограниченных ресурсах. Привести в соответствие факторов производства и потребления можно зачастую только при корректировке параметров. Это достигается традиционным способом многовариантными расчетами с последовательным уточнением параметров. На практике чаще всего в задаче (1) возникает необходимость корректировки величин b, c. Конкретный выбор требований b и c осуществляется за рамками модели. При этом, очевидно, не учитывается реальная напряженность системы ограничений. Чтобы соразмерить выбор b и c производственными возможностями, нужно установить обратную связь с экономической ситуацией. С этой целью необходимо решить двойственную ЗЛП.

В отличие от известных методов используемых в практических задачах сводящих к оптимизационной модели В.А. Булавским предложена схема, которая заключается в решении систем уравнений и неравенств без определенного критерия оптимизации. Равновесие достигается с помощью функций, корректирующих параметры модели. В зависимости от экономического смысла этих функций можно сформулировать множество различных прикладных задач, направленных на достижение определенного равновесия экономической системы.

Обозначим первоначальные наши требования через b0. В качестве правой части вектор $b_\circ - \beta(\mathrm{y})$, где $\beta(\mathrm{y})$ – функция задания. Осуществим симметричный подход и к выбору c. В данном случае компоненты искомого вектора x трактуются как интенсивности применения некоторых способов деятельности. Компоненты вектора с рассматриваются как нормативные затраты в расчете на единичную интенсивность. Обозначим через c_0 удельные нормативные затраты при нулевой интенсивности. В качестве вектора с примем вектор $c_0 + \gamma(x)$, где $\gamma(x)$ – функция релаксации. Функции $\beta(y), \gamma(x)$ является переменными, компенсируя ограничения задачи.

Исходя из обозначений, получим систему связей между планом x и оценками y

$$Ax \geq b_\circ - \beta(\mathrm{y}), y \geq 0, \qquad A^{'} y \leq c_\circ + \gamma(x). \tag{3}$$

Можно доказать, что подсчитанный по оценкам y результат нашей деятельности $y^{'}(b_0 - \beta(\mathrm{y}))$ не превосходит нормативных затрат $(c_0 + \gamma(x))' x$. В рамках рассматриваемой модели минимизация суммарных нормативных затрат или максимизация валового результата является односторонним подходом. С одной стороны максимизация (y'(b0-β(y)) стимулирует стремление повысить оценки, а следовательно, и нормативные затраты. С другой стороны, минимизация суммарных затрат $(c_0 + \gamma(x))' x$ означает фактически минимизацию нашей деятельности. Исходя из этого наиболее целесообразным является принятие концепции равновесия: факторы, имеющие положительную оценку, не должны производиться в избытке, а нормативные затраты фактически используемых способов деятельности не должны быть завышенными.

Математически это выглядит следующим образом:

$$y^{'}(b_0 - \beta(y)) = y^{'} Ax = (c_0 + \gamma(x))' x. \tag{4}$$

Задача (3), (4) разработанная В.А. Булавским называется задачей квазилинейного программирования (ЗКП). В процессе проведения нами исследования этой задачи она приведена к модели оптимизации.

Введем следующие предположения [1, 2]:

Предположение 1. Существует $\varphi : R_+ \to R_+$ и вектор b_0 удовлетворяющие условиям:

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t)' \text{ и } |\mathrm{b}(\mathrm{x}, \mathrm{y})| \leq \|x\| \varphi(\|x\|) l + b_0,$$

где R+ – неотрицательная ось, l – единичный вектор.

Предположение 2. Для любых $(x, y) \in R_+^n \times R_+^m$, и для каждого $\eta \in R^m$, удовлетворяющего условиям $A'\eta \le 0,\ \eta \ge 0,$ имеет место следующее неравенство: $\eta'(b(x, y) \le 0.$

Предположение 3. Для любых $(x, y) \in R_+^n \times R_+^m$, и для каждого $\xi \in R^n$, удовлетворяющего условиям $\xi \ge 0,\ \mathrm{A}\xi \ge 0,$ выполняется следующее неравенство: $\xi' c(x, y) \ge 0.$

Предположение 1 в данном случае относительно задачи (4.3) – (4.4) означает, что с возрастанием оценок спрос на блага не возрастает, а предположения 2, 3 означают, что при нулевых затратах невозможно производить продукцию, а также выполнить требования, предусматриваемые задачей.

В [1,2] В.А. Булавским доказано существование решения задачи (3)–(4) если для функций $c(x,y)$, $b(x,y)$ выполняются предположения 1, 2, 3 и удовлетворяются условия непрерывности, кроме этого $\|c(x, y)\| \le \delta(x)$, где $\delta: \mathrm{R}_+^n \to R_+$ – непрерывная функция.

Теорема 4.1. *Если функции* $b(x,y)$ *и* $c(x,y)$ *непрерывны, выполнены предположения* 1, 2, 3 и $\|c(x, y)\| \le \delta(x)$, где $\delta: \mathrm{R}_+^n \to R_+$ *– непрерывная функция, то ЗКП имеет решение.*

Определение. Пусть $f: R^k \to R^k$ – непрерывно дифференцируемая и вогнутая (покомпонентно) функция, а $J(\bar{x})$ – ее матрица Якоби в точке $\bar{x}$. Положим $\alpha(t) = \inf\left\{\eta' \cdot J(\bar{x}) \cdot \eta;\ \|\eta\| = 1, \|\bar{\mathrm{x}}\| \le t\right\}$. Функция f называется строго релаксационной, если $\lim t \cdot \alpha(t) = +\infty.$

Теорема 4.2. *Если в ЗКП* $b(x, y) = b_0 - \beta(y),\ c(x,y) = 0$ *при всех* $(x, y) \in R_+^n \times R_+^m$, *а функция* $\beta(y)$ *строго релаксационная, то задача* (3)-(4) *имеет решение.*

Теорема 4.3. Если функции $\beta(y)$ и $\gamma(\mathrm{x})$ являются строго релаксационными, то задача (3), (4) имеет решение.

Поставленная ЗКП В.А. Булавским можно трактовать также как способ решения модели равновесия с одним участником, уравновешивающим свои предпочтения. При этом предпочтения зависят как от получаемого набора благ b, так и от производимых затрат c.

Можно предположить, что локальные предпочтения участника определяются дифференциальной формой

$$(b_0 - \beta(y)) - Ax)'dy - (c_0 + \gamma(x) - A'y)'dx \qquad (5)$$

в том случае, что движение по некоторой кривой в пространстве $R^m \times R^n$ пар $(y,\ x)$ соответствует локальным предпочтениям, если дифференциальная форма (5) вдоль этой кривой положительна.

В этом случае решение задачи (3)–(4) соответствует стационарной точке наших локальных предпочтений на множестве $R_+^m \times R_+^n$.

Если дифференциальная форма

$$(b_0 - \beta(y))'dy - (c_0 + \gamma(x))'dx \qquad (6)$$

является точной, т.е. существуют функции $\varphi(y),\ \psi(x),$ для которых

$$b_0 - \beta(y) = \frac{d\varphi}{dy},\ \mathrm{c}_0 + \gamma(x) = \frac{d\psi}{dx},$$

то получаем обычную задачу равновесия для функции

$$F(x, y) = \varphi(y) + \psi(x) - y'Ax.$$

В этом случае ЗКП сводится к отысканию седловой точки функции F(x, y) на $R_+^m \times R_+^n$.

На рис. 1 видно отличие традиционной схемы корректировки от ЗКП.

В процессе решения практических задач нами установлено, что для более широкого использования теории В.А. Булавского необходимо разработать модели, основанные на обобщении задачи (3)–(4).

Некоторые свойства задачи квазилинейного программирования

Рассмотрим задачу квазилинейного программирования. Необходимо найти пару $z=(x,y)\in R_{+}^{n}$, удовлетворяющую условиям (3) – (4).

Традиционная схема корректировки параметров

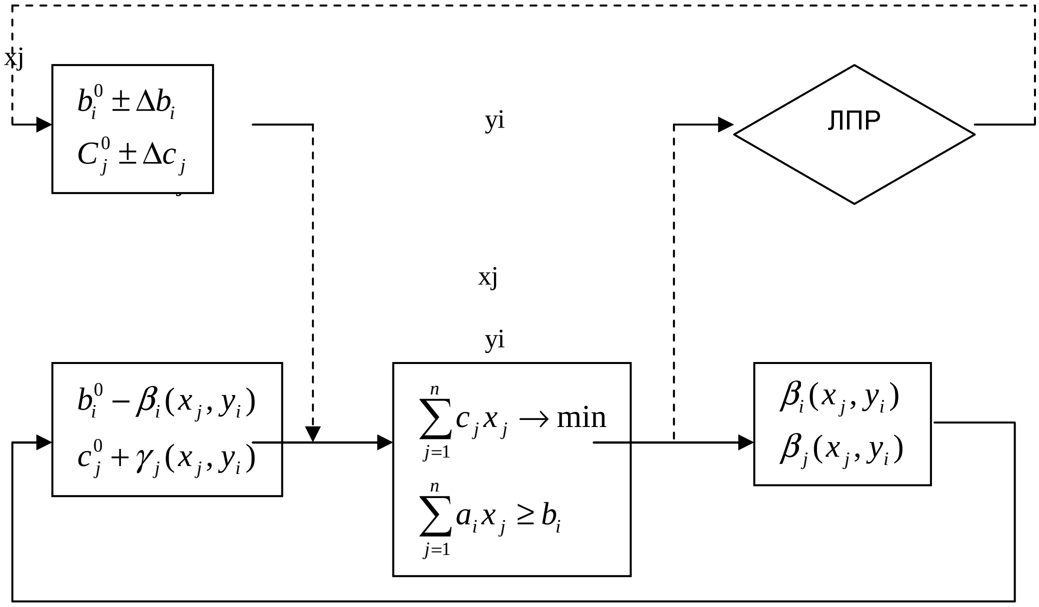


Схема квазилинейного программирования

Рис. 1. Схемы корректировок параметров модели

Важное свойство ЗКП, их эквивалентность следующей нелинейной задаче математического программирования (ЗМП) [1, 2]

$$\delta(x^*, y^*) = \min_{x,y}\left\{ c_0 + \vec{\gamma}(z))' x - (b_0 - \vec{\beta}(y))' y \,\middle|\, \begin{array}{c} Ax \ge b_0 - \vec{\beta}(z),\ x \ge 0 \\ \mathrm{A}' \mathrm{y} \le \mathrm{c}_0 + \vec{\gamma}(z),\ \mathrm{y} \ge 0 \end{array} \right\}. \qquad (7)$$

Задача (7) называется обобщенной задачей квазилинейного программирования (ОЗКП). В случае δ(x,y)=0 она сводится к задаче В.А. Булавского.

Пусть, как и прежде, через R_1 обозначают множество решений ЗКП (3) – (4), а через R_2 – множество решений задачи (4.7). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.4. Множество R ЗКП совпадает с множеством неподвижных точек оператора

$$T : R = \left\{ z^* \middle| z^* \in T(c(z^*), b(z^*) \right\}$$

Теорема 4.5. *ЗКП (4.3) – (4.4) разрешима тогда и только тогда, когда оптимальное значение целевой функции в ЗМП (4.7)* $\delta(x^*, y^*) = 0,$ *при этом их решения совпадают: R1 = R2.*

Доказательство. Для произвольных ограничений вектор-функций $\vec{\beta}(\cdot), \vec{\gamma}(\cdot)$ и допустимого множества Z, определяемого (4.3), (4.4), имеет место неравенство:

$$\forall z \in Z : (c_0 + \vec{\gamma}(z))' x \ge (b_0 - \vec{\beta}(z))' y. \qquad (8)$$

Причем равенство достигается только для решения ЗКП $z^* \in R_1$.

Действительно, умножая скалярное неравенство $Ax \ge b_0 - \vec{\beta}(y)$ – слева на неотрицательный вектор y’, а неравенство $A' y \le c_0 + \vec{\gamma}(x)$ на $x' \ge 0$, получим:

$$y' Ax \ge y'(b_0 - \vec{\beta}(z)),\ \ x' A' y \le x'(c_0 + \vec{\gamma}(z)).$$

Поскольку $y'Ax \geq x'Ay$, т $x'(c_0 + \vec{\gamma}(z)) \geq y'Ax = x'A'y \geq y'(b_0 - \vec{\beta}(z))$, и неравенство (4.8) доказано. Из неравенства (4.8) следует, что $\delta(x^*, y^*) \geq 0$.

Пусть $z^* \in R_1$. Тогда $z^* \in Z$ и $\delta(z^*) = 0$, т.е. z* – глобальный минимум (4.7) и, следовательно, $R_1 \subset R_2$. И наоборот, если $\delta(x^*, y^*) = 0$, из (4.8) следует, что $R_2 \subset R_1$, теорема доказана.

Решение ЗМП (4.7) являющееся одновременно решением ЗКП, обладает определенной спецификой, оно совпадает с одним из значений множителей Лагранжа.

Пусть $\vec{\lambda}_y \in R_+^m$ – множитель Лагранжа в задаче (4.7), соответствующие ограничениям $Ax \geq b_0 - \vec{\beta}(z)$, а $\vec{\lambda}_x \in R_+^n$ – ограничениям $A'y \leq c_0 + \vec{\gamma}(z)$ в точке $z^* = (x^*, y^*)$.

Теорема 4.6. *Пусть* $z = (\tilde{x}, \tilde{y})$ – *допустимая точка в задаче* (4.7), *функции* $\vec{\beta}(\cdot), \vec{\gamma}(\cdot)$ – *непрерывно дифференцируемые в окрестности* $\tilde{z}$. *Для того чтобы* $\tilde{z}$ *было решением квазилинейного программирования* (4.7), *необходимо и достаточно, чтобы* $\tilde{z}$ *удовлетворяло необходимым условиям экстремума Куна-Таккера с множителями Лагранжа* $\tilde{\vec{\lambda}}_x, \tilde{\vec{\lambda}}_y$, *удовлетворяющими соотношению*

$$\tilde{\vec{\lambda}}_x = \tilde{x},\ \tilde{\vec{\lambda}}_y = \tilde{y}.$$

Доказательство теоремы сводится к простому использованию определения (4.3) – (4.4).

Условия единственности решения ЗКП. С помощью теоремы 4.5 проблема единственности решения задачи квазилинейного программирования сводится к анализу условий единственности решений нелинейной ЗМП(4.7), что позволяет использовать ряд достаточно общих результатов. В качестве примера приведем следующее утверждение.

Теорема 4.7. *Если в ЗКП компоненты вектор-функции* $\gamma(x, y)$, $\beta(x, y)$ *вогнуты, а функция* $\delta(x, y) = (c_0 + \vec{\gamma}(x, y))'x - (b_0 - \vec{\beta}(x, y))'y$ *строго выпукло, то множество решений ЗКП состоит из единственной точки* $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Функции релаксации и методы их построения

Рассмотрим важный частный случай, когда схема квазилинейного программирования используется для анализа многокритериальных задач линейного программирования $(\overrightarrow{\gamma(x)} \equiv 0)$ и функции $\beta_i(y)$ «сепарабельные» – $\beta_i(y) \equiv \beta_i(y_i), i = 1, ..., m.$ В этом случае естественное требование к функциям релаксации $\beta_i(y_i)$ – чтобы они были монотонно неубывающими – автоматически обеспечивает выпуклость множества R1 решений ЗКП (при этом множество R1 будет состоять более чем из точек лишь в вырожденных ситуациях).

ФР являются определяющими факторами в ЗКП равновесия. Адекватность решения ЗКП зависит от возможностей формализации экспертом направления корректировки параметров.

Для построения ФР необходимо преобразовать полученную от эксперта информацию о принимаемых решениях в соответствующую форму, привести ее к более удобному функциональному описанию.

В разработке ФР с помощью эксперта-проектировщика, маркетолога много общего с построением ПФ. Проведем некоторые сравнения ФР с ПФ. Для этого необходимо выявить отличительные и сходные свойства по признакам: объект моделирования, системное описание объекта, цели моделирования, аппарат моделирования, области определения и изменения функции, экономическое содержание, идентификация и интерпретация моделей.

ПФ с одной стороны являются ЭММ. С другой – являясь некоторой составной частью системы моделей, не могут быть приняты как самостоятельные математические модели.

В большинстве случаев для ПФ в качестве параметров принимаются ресурсы. Выходными параметрами являются объемы продукций.

ПФ имеют широкое применение во многих отраслях народного хозяйства.

Число и состав аргументов ФР определяется конкретной ситуацией. Предварительно проводится системный анализ изучаемого объекта и проводится оптимизационные расчеты. После анализа полученного решения определяется аналитический вид ФР. Далее рассматривается система показателей по корректирующим параметрам и осуществляется выбор способа сравнения. Из теории ПФ таких методов несколько. На последнем этапе производится вычисление неизвестных параметров ФР.

Можно рассмотреть несколько способов построения ФР.

Область определения этих функций рассматривается исходя из условий, которые должны быть выполнены для разрешимости ОЗКП. В данном случае $\beta(y)$ выражает направление корректировок компонентов вектора-столбца ограничений задачи.

Подобно ПФ $\beta(y)$ строятся подбором из определенного класса $\beta_\varepsilon(y)$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$ вектор неизвестных параметров с аппаратом моделирования параметрических классов.

Процесс построения ФР носит аппроксимационный характер. Сначала предполагается существование идеального описания зависимостей ФР, затем производится последовательное приближение.

Для выбора способа построения ФР предварительно выбираются некоторые характеристики на основе анализа решения ЗЛП. При этом эксперт делает прикидки по некоторым направлениям корректировок параметров в зависимости от решений прямой и двойственной задач. Далее выводится аналитический вид ФР.

При построении функции, которая использована в последующих главах, нами были приняты некоторые показатели сравнения с двойственной оценкой.

Рассмотрим один из простейших методов который нами предложен. Сначала выводится аналитическое выражение ФР, которая содержит три неизвестных параметра. Составляется система из трех уравнений с тремя неизвестными. Предложим ФР для частного случая:

$$\beta_i(x_j, y_i) = \beta_i(y_i);$$

$$\beta(y) = \lambda - \frac{k}{\delta + y}. \tag{4.29}$$

Неизвестные λ, k, δ можно найти, если известны три показателя: максимальное и минимальное изменение корректирующего параметра, значение двойственной оценки, при котором ФР принимает нулевое значение. Иначе говоря, для построения ФР достаточно получить с помощью лица, принимающего решение, информацию такого характера, как допустимые верхние и нижние границы изменения объема производства и значения двойственной оценки, при котором отсутствует необходимость корректировки.

Равенства, из которых определяются свободные параметры, описаны следующим образом:

$$\lim_{y\to+\infty} \beta(y) = \beta_{\max} = b_0 - b_{\max}; \tag{4.30}$$

$$\beta(y^*) = \lambda - \frac{k}{\delta + y^*} = 0; \tag{4.31}$$

$$\beta(0) = \lambda - \frac{k}{\delta} = \beta_{\min} = b_0 - b_{\max}, \tag{4.32}$$

где bmax – максимально допустимое значение корректируемой компоненты вектора столбца свободных членов;

bmin – минимально допустимое значение корректируемой компоненты;

y* - двойственная оценка, при которой ФР принимает нулевое значение;

b0 – первоначальное значение параметра, подвергающееся корректировке.

Для наглядности ФР, которая использована для расчетов в последующих главах изображена на рис. 4.2. Эта функциональная зависимость показывает взаимосвязь степени напряженности ограничения на производство продукции с ее объемным показателем исходя из внутренних возможностей предприятия.

В качестве критерия оптимизации ЗЛП принята минимизация производственных затрат. y* – цена реализации продукции.

Из рис. 4.2. видно, что если затраты больше цены, ФР принимает положительное значение. При этом разность оценки и цены показывает, какой объем убытка хозяйство несет при увеличении объема производства продукции на 1 единицу. Положительное значение функции показывает на сколько необходимо снизить объем производства продукции для обеспечения безубыточности. Из рис 4.2 видно, что если значение оценки меньше, чем y*, то ФР принимает отрицательное значение. В данном случае понятно, что целесообразно увеличить корректируемый показатель.

ФР изображенная на рис. 2 отражает тот факт, что, чем больше значение оценки, тем менее эффективным становится производство. Обратим внимание, что функция неприемлема в некоторых случаях. Например, если осуществляется максимизация целевой функции в ЗЛП. В этом случае трудно учесть оценки смежных видов продукции (молоко – говядина, мясо птицы – яйца, баранина – шерсть и т.д.). Нулевые оценки получают те виды продукции, которые наращиваются. Для них нами разработаны другие ФР (рис. 3).

Эта функция не удовлетворяет условиям существования решения ОЗКП. Она имеет разрыв в точке y = 0. Исходя из этого, можно предложить более приемлемую непрерывную функцию.

Следует сказать, что в ЗЛП всегда можно определить нижнюю границу оценки (yп). Опираясь на это, любые значения ε, удовлетворяющие условию ε < (yп), можно установить определенные уровни приращения b0 +Δb для нулевых оценок. Этот фактор является важным для разработки ЗКП в случае, если в базовой модели целевой функцией принимается критерий максимизации.

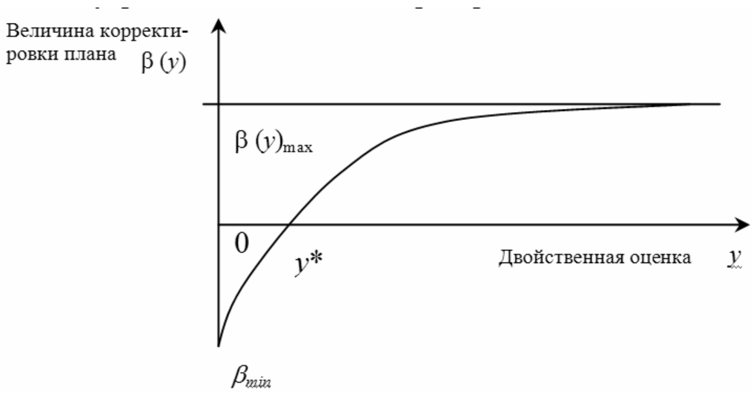


Рис. 2. Функция предпочтительности производства продукции

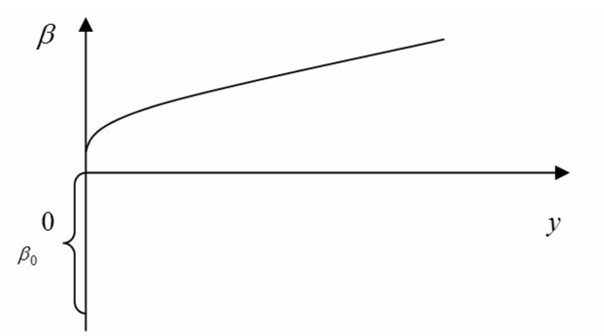


Рис. 3. ФР для критерия максимизации смежных видов продукции

Общий вид ФР выглядит следующим образом:

$$\beta(y) = \beta_{\max} + \frac{(\beta_{\max} - \beta_{\min})\varepsilon\beta_{\max}}{y\beta_{\min} - \varepsilon\beta_{\max}}, \quad y\beta_{\min} \neq \varepsilon\beta_{\max}.$$

При y → ε функция принимает нулевое значение. При y → ∞ функция стремится к βmax.

В проведении исследования построения ФР можно использовать процедуру, основанную на теории деловых игр, (проигрыш) корректировки параметров, в которой диалоговым способом экспертная группа осуществляет процедуру улучшения модели.

Функции релаксации является определяющими в задачах квазилинейного программирования. Они устанавливают функциональную зависимость, характеризующую направление корректировок параметров управляющим лицом. Возможность практической реализации равновесных моделей зависит во многом от того можно ли удачно формализовать желание экспорта в смысле корректировки недостаточно обоснованных экономических параметров. Кроме того, очень важно преобразование: полученную от эксперта информацию о принимаемых решениях привести в соответствующую форму, более удобную функциональному описанию. Этот процесс имеет много общего с построением производственных функций. Если материалом ПФ в экономике принимаются ресурсы, то по отношению функции релаксации принимается экономическая оценка ограничения объемов производства и ресурсов.

Область определения ФР определяется исходя из условий, которые должны быть выполнены для разрешимости ОЗКП.

Для общего случая процесс построения ФР осуществляется несколькими этапами.

На первом этапе производится первоначальный выбор параметров задачи, подвергающихся корректировке и осуществляется анализ решения задачи.

На втором этапе определяется схема корректировки, выбор способа сравнения и вычисление неизвестных параметров функции релаксации.

Для расчетов нами используется ранее рассмотренная функция, имеющая следующий вид:

$$\beta(y) = \lambda - \frac{K}{\delta + y}; \beta(y): R^1 \to R^1 \qquad (8.38)$$

где λ, K, δ – свободные параметры, которые определяются из следующих уравнений.

$$\lim_{y \to +\infty} \beta(y) = \beta_{\max} = b_0 - b_{\min} \; ; \qquad (8.39)$$

$$\beta(y^*) = \lambda - \frac{K}{\delta + y^*} = 0\,; \qquad (8.40)$$

$$\beta(y)|y = 0 = \lambda - \frac{K}{\delta} = \beta_{\min} = b_0 - b_{\max}\,, \qquad (8.41)$$

где bmin – минимально допустимый объем производства продукции;
bmax - максимально допустимый объем производства продукции;
y*- цена реализации продукции;
b0- первоначальный объем производства продукции.

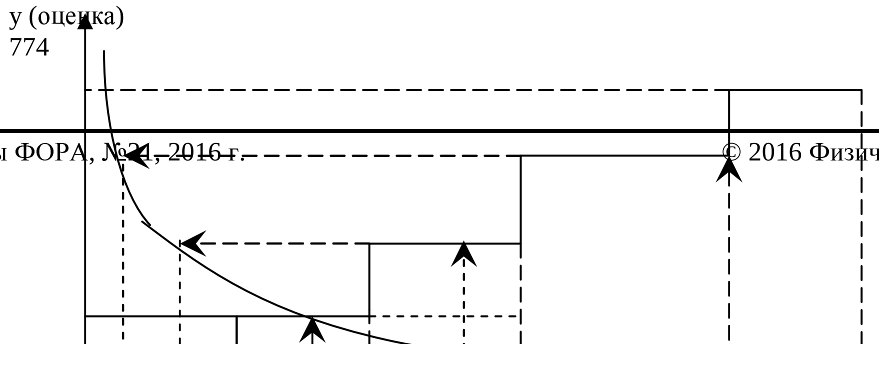
Формула (8.8) показывает взаимосвязь напряженности ограничения на производство продукции от соответствующей оценки.

Следует обратить внимание, что для рассматриваемой ФР чем большее значение оценки, тем менее эффективным становится производство. В данном случае эта ФР неприемлема для расчетов в случае максимизации целевой функции. Кроме того, для условия смежных видов продукции должна быть определенная модификация. Такие случаи имеют место для отражения в математической модели требовании объемных показателей в цехе производства товарных яиц. В этом случае, смежные виды продукции получают нулевые оценки, которые наращиваются в силу технологических связей.

Анализ результатов решения обобщенной задачи квазилинейного программирования

Рассмотрим анализ равновесного решения задачи многокритериальной оптимизации, его приемлемость с экономической точки зрения, а также взаимосвязь со всевозможными другими планами, отличающиеся только объемами производства яиц и мяса.

По результатам решения задачи определены оптимальное поголовье птиц по всем группам и соответственно по каждому цеху. Для сравнения равновесного плана с отдельными вариантами проведем параметрический анализ. На основе этого можно установить преимущества постановки многокритериальных задач по сравнению с однокритериальными. Кроме того, после параметрического анализа зачастую выбирается компромиссный план. Однако трудоемкость этого процесса является одним из причин, которая приводит к тому, что не каждый раз проводится такого рода анализ.



766

763

604

0	1882	1915	2625	3227	b (объем)

Рис. 4. Ход итерационного процесса вычисления решения ОЗКП

Процедура поиска компромиссного плана на основе схемы КП осуществляется несколько иначе. В данном случае заранее предполагается изменение и зависимость параметров модели. Далее на основе этих функциональных зависимостей и автоматическом режиме выбирается решение задачи векторной оптимизации.

Анализ проводился в следующем порядке. На первом этапе решались однокритериальные задачи по минимуму производственных затрат, максимум производства мяса. Далее, были введены максимизируемые критерии в разряд ограничений, назначив для них найденные оптимальные значения. И, наконец, на последнем этапе проводится оптимизация по критерию минимума производственных затрат. Варианты отмечались параметром ограничения плана производства мяса.

Введем обозначение b*I-bi = λ, где λI – принимается в качестве подвижного параметра i-го планового ограничения.

b*I- максимально возможный уровень планового задания i-го ограничения, в случае максимизации bi.

Анализ решения однокритериальных задач проводится с критерием минимума производственных затрат, с изменением параметров δI соответствует определенным уровням производственных затрат Fi.

Они представлены на рис. 8.5. Функциональные зависимости производственных затрат от объема производства мяса являются кусочно-линейными. Точки перелома характеризуют изменение базиса решения ЗЛП и соответствуют различным опорным планам.

Изменения λI приводит к изменению базисных решений, в результате которого происходит перебор вершин многогранника решений. Эти вершины называются критическими.

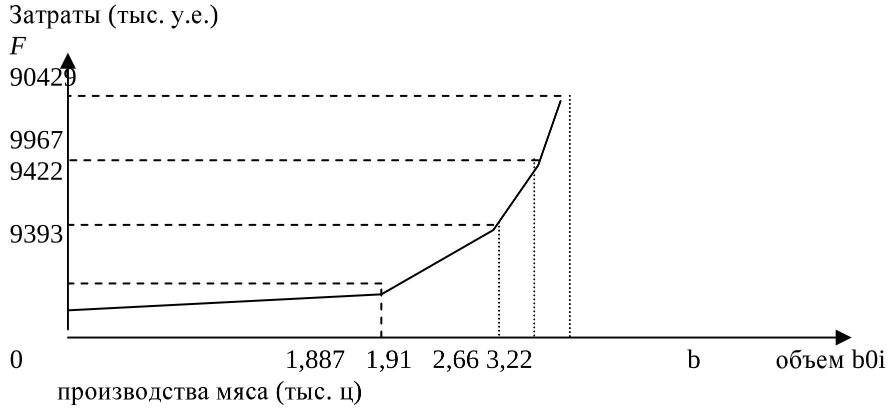


Рис. 5. Множество Парето решения двухкритериальной задачи.

Анализ паретооптимального множества доказывает, что выбор планов больших, чем равновесные, ничем не оправдан. Действительно, выбор планового объема производства мяса больше, чем 18,82 ц, не представляет интереса для хозяйства в силу того, что предприятие несет определенные убытки от дополнительной продукции.

Сверхплановое производство этого вида продукции на 1 ц приводит к увеличению затрат в целом по хозяйству. Это говорит о том, что для более полного использования ресурсов, предприятию целесообразно снижение планового задания по объему производства мяса.

Сравнивая полные затраты на единицу продукции с закупочными ценами, делаем вывод, что объемы производства мяса, которые запланированы, нерентабельны.

Проводя анализ с помощью вышеуказанных рисунков можно найти компромиссный план. Выбор окончательного варианта с помощью КП, осуществляется в автоматизированном режиме без участия эксперта. В результате находится эффективный единственный план из множества Парето. В качестве равновесных решений соответственно по производству мяса с помощью алгоритма, разработанного нами, выбирается критическая точка соответствующая определенному объему продукции производства.

В заключение отметим, что в настоящее время квазилинейное программирование, как инструмент решения задачи многокритериальной равновесной оптимизации представляет собой эффективный инструмент математического моделирования ситуаций, связанных с исследованием операций, задачами автоматизации проектирования, регулирования и управления и многими другими проблемами [4-5]. В тоже время хорошее согласие с практикой линейных моделей сделала их незаменимым инструментом численных методов решения задач оптимизации. фундаментальный труд, посвященный методам оптимизации как конечномерных, так и дифференциальных задач для функций и функционалов.

Литература

1. *Булавский В.А.* Квазилинейное программирование и векторная оптимизация // Докл. АН СССР. – 1981. – Том 257. – № 4. – С. 788—791.
2. *Булавский В.А.* Методы релаксации для систем неравенств. – Новосибирск: НГУ, 1981. – 82 с.
3. *Куев А.И.* Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. – Майкоп : Изд-во МГТУ, 2004. – 447 с.
4. *Антипин А.С.* Многокритериальное равновесное программирование: экстрапроксимальные методы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Том 47. – № 12. – С. 1998–2013.
5. *Юдин А.Д.* Квазилинейное программирование / Вопросы моделирования и анализа в задачах принятия решений. – М.: ВЦ РАН, 2003. – С. 113–125.
6. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. Кн. 1. – М.: МЦНМО, 2011. – 624 с.

FORMATION OF RELAXATION FUNCTION IN THE MATHEMATICAL MODEL OF QUASILINEAR PROGRAMMING

A.I. Kuev

The optimization problem of linear and quasi-linear programming are considered. Mathematically proved methods of forming relaxation functions in a quasi-linear programming model and describes the stages of their construction.

