ПРЯМЫЕ ИЗОКЛИНЫ И ОСОБЫЕ ТОЧКИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

В.Б. Тлячев, Д.С. Ушхо, А.Д. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Для плоской полиномиальной системы дифференциальных уравнений рассматривается множество М обладающее двумя свойствами: 1) элементами М являются параллельные между собой прямые изоклины системы; 2) в М нет двух прямых, на которых индуцировано одно и то же направление. На этой основе доказываются теоремы о числе особых точек, прямых изоклин и их свойствах.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j \equiv P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} b_{ij} x^i y^j \equiv Q_n(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где a_{ij}, $b_{ij} \in R$, $(P_n, Q_n) = 1$, $\deg(P_n^2(x,y) + Q_n^2(x,y)) = 2n$.

Под символом $l_i^{m_j}$ будем понимать прямую изоклину l_i, на которой индуцировано направление m_j. Прямые изоклины с различными нижними индексами считаются несовпадающими.

Будем говорить, что множество M обладает свойством (α), если:

1) элементами M являются параллельные между собой прямые изоклины системы (1);
2) в M нет двух прямых, на которых индуцировано одно и то же направление.

Лемма 1. Пусть $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$ – параллельные прямые изоклины системы (1), причем $m_1 \neq m_2$. Тогда на каждой из прямых $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$ расположены не более $n-1$ особых точек системы (1).

Доказательство. Следуя [1], применим к системе (1) преобразование

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \bar{y}, \\ y = m_1\bar{x} + m_2\bar{y}, \end{cases}$$

которое переводит прямую $l_1^{m_1}$ $\left(l_2^{m_2}\right)$ в изоклину нуля (бесконечности) системы дифференциальных уравнений (обозначения переменных x и y оставляем неизменными):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (ax+by+c_1)P_{n-1}(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = (ax+by+c_2)Q_{n-1}(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

где $c_1 \neq c_2$, $(P_{n-1}, Q_{n-1}) = 1$, P_{n-1}, Q_{n-1} – многочлены степени не выше *n-1*.

Из (2) видно, что прямая $ax+by+c_1=0$ $(ax+by+c_2=0)$ имеет с изоклиной нуля (бесконечности) не более $n-1$ общих точек. Это и означает, что на каждой прямой $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$ система (1) имеет не более $n-1$ особых точек. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* $M_1 = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_2}, ..., l_n^{m_n}\}$ *– множество прямых изоклине системы* (1), *обладающее свойством* (α), $M_2 = \{l_{n+1}^{m_{n+1}}, l_{n+2}^{m_{n+2}}, ..., l_{2n}^{m_{2n}}\}$ *– множество параллельных между собой прямых изоклин этой же системы. Тогда* $\forall i \in \{1,2,...,n\}$, $\forall j \in \{n+1, n+2, ..., 2n\}$ $l_i^{m_i} \cap l_j^{m_j} \neq \varnothing$, *и множество* M_2 *обладает свойством* (α).

Доказательство. Согласно теореме 5 [2] система (1) имеет не более $2n-1$ параллельных между собой прямых изоклин. Следовательно, каждая прямая изоклина, принадлежащая множеству M_2, пересекает все прямые изоклины множества M_1. Покажем, что во множестве M_2 нет двух прямых, на которых индуцировано одно и то же направление. Предположим противное. Пусть во множестве M_2 имеются две прямые изоклины $l_s^{m_s}$ и $l_r^{m_r}$ такие, что $m_r = m_s$. На всех прямых, принадлежащих множеству M_2, не может быть индуцировано одно и то же направление m, так как в противном случае по теореме 1 [3] $m \notin \{m_1, m_2, ..., m_n\}$. Поэтому каждая прямая множества M_1 пересекается с прямыми множества M_2 в n особых точках. Приходим к противоречию с леммой 1. Таким образом, во множестве M_2 есть хотя бы одна прямая изоклина $l_p^{m_p}$ такая, что $m_p \neq m_r$. Посредством преобразования

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \bar{y}, \\ y = m_r \bar{x} + m_p \bar{y} \end{cases} \tag{3}$$

переведем систему (1) в систему (обозначения переменных x и y сохраним неизменными)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (ax+by+c_1)P_{n-1}(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = (ax+by+c_2)(ax+by+c_3)Q_{n-2}(x,y), \end{cases} \tag{4}$$

где $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,3\}$, $P_{n-1}(x,y)(Q_{n-2}(x,y))$ многочлен степени не выше $n-1$ ($n-2$).

Согласно [1] прямая изоклина $l_p^{m_p}$ в результате преобразования (3) перешла в изоклину бесконечности $L_1 : ax+by+c_1 = 0$, а прямые $l_s^{m_s}$ и $l_r^{m_r}$ – в изоклины нуля $L_2 : ax+by+c_2 = 0$, $L_3 : ax+by+c_3 = 0$ системы (4). Из (4) видно, что на прямой L_1 система (4) имеет не более $n-2$ особых точек. Но это возможно в том и только в том случае, когда во множестве M_1 найдутся не менее двух прямых изоклин, на которых индуцировано одно и то же направление. Приходим к противоречию с тем, что по условию теоремы M_1 – множество прямых изоклин, обладающее свойством (α). Теорема доказана.

Введем обозначение M^m – множество, состоящее из прямых изоклин, на которых индуцировано направление m.

Очевидным является

Утверждение 1. Если система (1) имеет хотя бы одно подмножество множества M всех прямых изоклин системы (1), состоящее из n прямых изоклин и обладающее свойством (α), то множество M имеет по крайней мере n подмножеств вида M^m.

Пусть система (1) имеет k множеств, состоящих из n прямых изоклин и обладающих свойством (α). Тогда, согласно работе [2] имеет место неравенство

$$k \cdot n \leq 6n-5, \ \ n \geq 2 \tag{5}$$

Из (5) следует неравенство $k \le 6 - \dfrac{5}{n}$, $n \ge 2$, то есть число всех n-элементных подмножеств со свойством (α) во множестве M всех прямых изоклин системы (1) не более пяти. Так, для квадратичной системы число таких подмножеств не более двух.

Из леммы 1 следует

Утверждение 2. Если M_0 – k-элементное множество прямых изоклин системы (1), обладающее свойством (α) и $k \ge n+1$, то эта система не имеет множества прямых изоклин, отличного от M_0 и содержащего две прямые изоклины $l_\nu^{m_\nu}$ и $l_\mu^{m_\mu}$ такие, что $l_\nu^{m_\nu} \,||\, l_\mu^{m_\mu}$ и $m_\nu \ne m_\mu$.

Теорема 2. *Если* M_1 *–* k*-элементное множество прямых изоклин системы* (1), *обладающее свойством* (α) *и* $k \ge n+1$, M_2 *– множество, состоящее из* l *параллельных между собой прямых изоклин этой же системы, то* $2 \le l \le n-1$, *где* $n \ge 3$.

В самом деле, согласно утверждению 2 на всех прямых изоклинах множества M_2 индуцировано одно и то же направление, и в силу теоремы 1 [3] $l \le n$. Поэтому предположение о том, что *l>n-1* допускает наличие во множестве M_1 хотя бы одной прямой изоклины, проходящей через *n* особых точек. С другой стороны, по лемме 1 на прямых изоклинах множества M_1 система (1) имеет не более $n-1$ особых точек.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $M_1 = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_2}, \ldots, l_n^{m_n}\}$ и $M_2 = \{l_{n+1}^{m_{n+1}}, l_{n+2}^{m_{n+2}}, \ldots, l_{2n}^{m_{2n}}\}$ *– множества прямых изоклин системы* (1), *обладающие свойством* (α). *Тогда система* (1) *имеет n(n-1) особых точек, через каждую из которых проходят две прямые изоклины множества* $M_1 \bigcup M_2$, *причем все эти особые точки простые. Если система* (1) *имеет особую точку* $W(x_0, y_0)$, *не принадлежащую ни одной из прямых изоклин множества* $M_1 \bigcup M_2$, *то она простая, и через нее проходят не более* n *прямых изоклин системы* (1), *где* $n \ge 2$.

Доказательство. Согласно работе [2] система (1) имеет не более $2n-1$ параллельных между собой прямых изоклин. Следовательно, прямые изоклины множества M_1 пересекает любая прямая изоклина, принадлежащая множеству M_2. Поэтому согласно лемме 1 на каждой прямой изоклине множества $M_1(M_2)$ система (1) имеет $n-1$ особых точек, то есть общее число особых точек системы (1), через каждую из которых проходят две прямые изоклины множества $M_1 \bigcup M_2$, равно $n(n-1)$. Из леммы 1 следует также, что для любой прямой изоклины множества $M_1(M_2)$ найдется ровно одна прямая изоклина множества $M_2(M_1)$ такая, что на этих двух прямых изоклинах индуцировано одно и то же направление. В этой связи можно переобозначить прямые изоклины множества: $M_2 = \{l_{n+1}^{m_1}, l_{n+2}^{m_2}, \ldots, l_{2n}^{m_n}\}$.

Согласно утверждению 1 существуют множества $M^{m_1}, M^{m_2}, \ldots, M^{m_n}$ прямых изоклин системы (1), причем $l_i^{m_i}, l_{n+i}^{m_i} \in M^{m_i}, i = \overline{1,n}$.. Покажем, что особая точка системы (1), принадлежащая прямым изоклинам множества $M_1 \bigcup M_2$, является простой. Для этого из семейства множеств $\{M^{m_i}\}_{i=1}^{n}$ выберем произвольным образом два множества M^{m_i} и M^{m_j}, $m_i \ne m_j$, где $i \ne j$, $i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Прямые изоклины $l_i^{m_i}, l_{n+i}^{m_i}$ $\left(l_j^{m_j}, l_{n+j}^{m_j}\right)$, принадлежащие множеству M^{m_i} $\left(M^{m_j}\right)$, переведем в изоклины бесконечности (нуля) дифференциальной системы (обозначения переменных x и y оставляем неизменными):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a_i x + b_i y)(a_{n+i} x + b_{n+i} y + c_{n+i})P_{n-2}(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = (a_i x + b_i y + c_j)(a_{n+i} x + b_{n+i} y)Q_{n-2}(x, y), \end{cases} \tag{6}$$

где $c_j \cdot c_{n+i} \neq 0,\ a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i \neq 0$, P_{n-2}, Q_{n-2} – многочлены степени не выше *n-2*.

В системе (6) (0,0) – особая точка, в которую преобразована особая точка системы (1), через которую проходят прямые изоклины множества $M_1 \bigcup M_2$. Предположим, что *(0, 0)* – сложная особая точка системы (6). Тогда $P_{n-2}(0{,}0)Q_{n-2}(0{,}0) = 0$. Если $P_{n-2}(0{,}0) = 0 \quad (Q_{n-2}(0{,}0) = 0)$, то прямая изоклина $a_{n+i} x + b_{n+i} y = 0 \ (a_i x + b_i y = 0)$ пересекает изоклину бесконечности (нуля) не более, чем в *n-2* точках. Но по доказанному на каждой прямой изоклине множества $M_1 \bigcup M_2$ система (1) имеет $n-1$ особых точек. Таким образом, доказано, что любая особая точка системы (1), расположенная на прямой изоклине множества $M_1 \bigcup M_2$ является простой.

Покажем, что и особая точка $W(x_0, y_0)$ системы (1), не принадлежащая прямой из множества $M_1 \bigcup M_2$, является тоже простой. Для этого, не умаляя общности, совершим параллельный перенос $x = \overline{x} + x_0$, $y = \overline{y} + y_0$ в системе (6), учитывая, что $W(x_0, y_0)$ – общая точка кривых $P_{n-2}(x, y) = 0$ и $Q_{n-2}(x, y) = 0$ (обозначения переменных x и y оставляем неизменными):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (A_1 x + B_1 y)(\overline{a_i} x + \overline{b_i} y + \overline{c_i})(\overline{a_{n+i}} x + \overline{b_{n+i}} y + \overline{c_{n+i}})P_{n-3}(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = (A_2 x + B_2 y)(\overline{a_i} x + \overline{b_i} y + \overline{c_j})(\overline{a_{n+i}} x + \overline{b_{n+i}} y + \overline{c_{n+j}})Q_{n-3}(x, y), \end{cases} \tag{7}$$

где $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0,\ \overline{C_i} \neq \overline{C_j}$, $\overline{C_{n+i}} \neq \overline{C_{n+j}}$, $\overline{C_i} \cdot \overline{C_j} \cdot \overline{C_{n+i}} \cdot \overline{C_{n+j}} \neq 0$, P_{n-3}, Q_{n-3} – многочлены степени не выше $n-3$.

Пусть в результате перехода от системы (1) к системе (7) прямые множества $M_1 \cup M_2$ перешли в прямые изоклины множества $\overline{M_1} \cup \overline{M_2}$. Заметим, что ни одна из прямых изоклин $A_1 x + B_1 y = 0$ и $A_2 x + B_2 y = 0$ не параллельна ни прямым множества $\overline{M_1}$ и ни прямым множества $\overline{M_2}$, так как в противном случае допускается наличие во множестве $\overline{M_1} \cup \overline{M_2}$ таких прямых изоклин, на которых система (7) имеет n особых точек. Но это противоречит лемме 1. Итак, каждая прямая изоклина $A_1 x + B_1 y = 0$ и $A_2 x + B_2 y = 0$, проходящая через точку $O(0{,}0)$, проходит через *n* особых точек (7). Предположим, что $O(0{,}0)$ – сложная особая точка, тогда из вида правых частей уравнений системы (7) следует, что $P_{n-3}(0{,}0) \cdot Q_{n-3}(0{,}0) = 0$. Если $P_{n-3}(0{,}0) = 0 \quad (Q_{n-3}(0{,}0) = 0)$, то прямая $A_2 x + B_2 y = 0 \quad (A_1 x + B_1 y = 0)$ пересекает изоклину бесконечности (нуля) системы (7) не более, ч ем в $n-1$ точках, но это противоречит тому, что на каждой прямой $A_s x + B_s y = 0$, *s=1, 2* система (7) имеет *n* особых точек. Тем и доказано, что $W(x_0, y_0)$ - простая особая точка системы (1). Для полноты доказательства теоремы покажем, что через особую точку *(0;0)* системы (7) проходит не более *n* прямых изоклин.

Так как на прямой изоклине $A_1 x + B_1 y = 0$, кроме $O(0{,}0)$, расположены еще $n-1$ особых точек, но при этом прямая $A_1 x + B_1 y = 0$ пересекает *n* параллельных прямых изоклин как множества $\overline{M_1}$, так и множества $\overline{M_2}$, то на прямой $A_1 x + B_1 y = 0$ индуцировано направление $m \in \{m_1, m_2, ..., m_n\}$. Аналогичный вывод можно сделать относительно прямой изоклины

$A_2x + B_2y = 0$ системы (7). Предположим теперь, что через особую точку $O(0,0)$ системы (7) проходит не менее $n+1$ прямых изоклин. В силу того, что направления, индуцированные на прямых изоклинах, инцидентных особой точке $O(0,0)$, принадлежат n-элементному множеству $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$, то среди прямых изоклин, проходящих через точку $O(0,0)$, найдутся хотя бы две, на которых индуцировано одно и то же направление. Пришли к противоречию с тем, что $O(0,0)$ – простая особая точка системы (7). Теорема доказана.

Следствие 1. Если дифференциальная система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^i \equiv P_2(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} b_{ij}x^i y^i \equiv Q_2(x,y), \end{cases} \tag{8}$$

имеет два двухэлементных множества прямых изоклин со свойством (α), то число прямых изоклин этой системы равно пяти, а число особых точек – двум.

В самом деле, по теореме 3 система (8) имеет две особые точки F_1 и F_2 – вершины параллелограмма, образованного прямыми изоклинами множества $M_1 \bigcup M_2$. Так как любая прямая, проходящая через две особые точки системы (8), является ее изоклиной [4], то прямая F_1F_2 – изоклина системы (8). Система (8) не имеет особой точки, через которую не проходит ни одна прямая изоклина множества $M_1 \bigcup M_2$. Действительно, по лемме 1 на каждой прямой из множества $M_1 \bigcup M_2$ система (8) имеет не более одной особой точки. Предположив существование особой точки G, не принадлежащей ни одной из прямых множества $M_1 \bigcup M_2$, мы тем самым допускаем, что G лежит на прямой F_1F_2. Это противоречит свойству системы (8) иметь на прямой не более двух особых точек. Следствие доказано.

Пример 1. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-x-1)(y+x-1), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-x-3)(y+x-3) \end{cases} \tag{9}$$

имеет два множества прямых изоклин $M_1 = \{y-x-1=0, y-x-3=0\}$, $M_2 = \{y+x-1=0, y+x-3=0\}$ со свойством (α) и две особые точки $R(1,2), S(-1,2).$. Следовательно, прямая RS – изоклина системы (9). Других прямых изоклин система не имеет. Она не имеет также особых точек, кроме R и S.

Теорема 4. *Пусть система дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} a_{ij}x^i y^i \equiv P_3(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} b_{ij}x^i y^i \equiv Q_3(x,y), \end{cases} \tag{10}$$

имеет два трехэлементных множества прямых изоклин M_1 *и* M_2 *со свойством* (α). *Тогда эта система имеет не более одной особой точки, которой инцидентна хотя бы одна прямая изоклина системы* (10), *не принадлежащая множеству* $M_1 \bigcup M_2$.

Доказательство. По теореме 3 система (10) имеет шесть особых точек, через каждую из которых проходят две прямые изоклины множества $M_1 \bigcup M_2$, где $M_1 = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_2}, l_3^{m_3}\}$, $M_2 = \{l_4^{m_1}, l_5^{m_2}, l_6^{m_3}\}$. Пусть A – особая точка системы (10), через которую не проходит ни одна прямая изоклина множества $M_1 \bigcup M_2$ и L_A – прямая изоклина системы (10), инцидентная точке A. В процессе доказательства теоремы 3 установлено, что L_A пересекает все прямые изоклины множества $M_1 \bigcup M_2$, и на L_A индуцировано направление $m_A \in \{m_1, m_2, m_3\}$. Предположим, что наряду с особой точкой *A* система (10) имеет особую точку B, не принадлежащую ни одной прямой множества $M_1 \bigcup M_2$, а L_B – прямая изоклина системы (10), проходящая через B. Тогда на L_B индуцировано направление $m_B \in \{m_1, m_2, m_3\}$. Прямая изоклина L_A проходит через две вершины G_1 и G_2 параллелограмма, образованного четырьмя прямыми изоклинами множества $M_1 \bigcup M_2$. Так как G_1 и G_2 – простые особые точки системы (10), то L_B не проходит ни через одну из вершин G_1 и G_2 и по теореме 2 [3] на L_A и L_B индуцировано одно и то же направление. Поскольку во множестве $M_1 \bigcup M_2$ имеются две прямые изоклины, на которых индуцировано одно и то же направление, что и на прямых L_A и L_B, то система (10) имеет не менее четырех прямых изоклин, на которых индуцировано одно и то же направление. Пришли к противоречию с теоремой 1 [3]. Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть система (10) имеет два трехэлементных множества M_1 и M_2 со свойством (α). Тогда число прямых изоклин этой системы не превосходит десяти, а число особых точек, не более семи.

В самом деле, по теореме 4 система (10) имеет не более одной особой точки, не принадлежащей ни одной из прямых изоклин множества $M_1 \bigcup M_2$, а по теореме 3 через такую особую точку проходят не более трех прямых изоклин.

Пример 2. Дифференциальная система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(y+x-1)(y-x-2), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-1)(y+x-2)(y+2x) \end{cases} \tag{11}$$

Имеет десять прямых изоклин, в том числе шесть очевидных главных изоклин, три изоклины: *y-2=0*, *y+x=0*, $y + \frac{1}{2}x - 1 = 0$, на которых индуцировано направление $m_1 = -1$, и одну прямую изоклину *x=0*, на которой индуцировано направление $m_2 = 1$. Таким образом, множество всех прямых изоклин системы (11) имеет два подмножества $M_1 = \{y = 0, y-1 = 0, y-2 = 0\}$, $M_2 = \{y+x-1 = 0, y+x-2 = 0, y+x = 0\}$, обладающих свойством ($\alpha$). Система (11) имеет семь особых точек $A(2;\ 0)$, $O(0;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $C(-1;\ 2)$, $D(-1;\ 1)$, $E(0;2)$, $F\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, причем через особую точку F не проходит ни одна прямая изоклина, принадлежащая множеству $M_1 \bigcup M_2$. Заметим также, что через F проходят три прямые изоклины: $y-x-2=0$, $y+2x=0$, $y + \frac{1}{2}x - 1 = 0$.

Теорема 5. *Пусть система* (10) *имеет не менее девяти прямых изоклин, в том числе две параллельные прямые* $l_1^{m_1}$ *и* $l_2^{m_2}$, *где* $m_1 \neq m_2$. *Если прямая* $l_i^{m_i}$ (*i=1, 2*) *проходит через две простые особые точки системы* (10), *то во множестве прямых изоклин этой системы найдется прямая* $l_3^{m_3}$, *параллельная прямым* $l_1^{m_1}$ *и* $l_2^{m_2}$, *при этом* $(m_3 - m_1)(m_3 - m_2) \neq 0$.

Доказательство. Предположим, что система (10) не имеет прямой изоклины, параллельной прямым $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$. Согласно работе [3] через особую точку системы (10) проходят не более пяти прямых изоклин.

Так как по условию теоремы система (10) имеет не менее девяти прямых изоклин, то хотя бы через одну из особых точек, расположенных на изоклине $l_1^{m_1}$, кроме $l_1^{m_1}$, проходят еще четыре прямые изоклины. По условию особые точки, лежащие на прямой $l_1^{m_1}$, являются простыми. Следовательно, на всех четырех прямых изоклинах, отличных от $l_1^{m_1}$ и пересекающих $l_1^{m_1}$ в простой особой точке системы (10), индуцированы попарно различные направления. Поэтому на прямой изоклине $l_2^{m_2}$ система (10) имеет три особые точки, что противоречит лемме 1. Таким образом, нами доказано существование прямой изоклины $l_3^{m_3}$ системы (10), которая параллельна прямым $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$. Покажем, что $(m_3 - m_1)(m_3 - m_2) \neq 0$. Полагая противное получаем условия: $m_3 = m_1 \vee m_3 = m_2$. Если $m_3 = m_1 (m_3 = m_2)$ переведем прямые $l_3^{m_3}$ и $l_1^{m_1}$ ($l_3^{m_3}$ и $l_2^{m_2}$) в изоклины бесконечности, а прямую $l_2^{m_2}$ ($l_1^{m_1}$) – в изоклину нуля системы (обозначения переменных x и y оставляем неизменными):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (ax+by+c)(ax+by+c_2)(Mx+Ny+L), \\ \dfrac{dy}{dt} = (ax+by+c_3)Q_2(x,y), \end{cases} \tag{12}$$

где $C_i \neq C_j$, если $i \neq j,\ i,j \in \{1,2,3\},\ Q_2(x,y)$ – многочлен степени не выше второй.

Из вида правых частей уравнений системы (12) следует, что на изоклине нуля $ax+by+c_3=0$ эта система имеет не более одной особой точки. Приходим к противоречию с условием теоремы, согласно которому прямые изоклины $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$ проходят через две простые особые точки. Теорема доказана.

Теорема 6. *Существуют системы вида* (10), *имеющие три множества прямых изоклин* M_1, M_2, M_3, *каждое из которых обладает свойством* (α) *и состоит из трех прямых изоклин.*

Доказательство. Рассмотрим систему (10), имеющую два трехэлементных множества M_1 и M_2 прямых изоклин, каждое из которых обладает свойством (α). Если система имеет менее девяти прямых изоклин, то ясно, что у этой системы не может быть трех трехэлементных множеств прямых изоклин со свойством (α). Поэтому полагаем, что система (10) имеет не менее девяти прямых изоклин. При доказательстве теоремы 3 установлено, что множество $M_1 \bigcup M_2$ определяет семейство множеств $\{M^{m_i}\}_{i=1}^3$, каждое из которых содержит две пересекающиеся прямые изоклины, на которых индуцировано направление m_i. Выберем произвольным образом из этого семейства два множества M^{m_i} и M^{m_j}, где $m_i \neq m_j,\ m_i, m_j \in \{m_1, m_2, m_3\}$ и посредством линейного преобразования [1, 4] переведем прямые множества $M^{m_i} (M^{m_j})$ в изоклины бесконечности (нуля) системы (обозначения переменных x и y оставляем неизменными):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(A_1x+B_1y+C_1), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-k_1x-b_3)(y-k_2x-b_4)(A_2x+B_2y+C_2), \end{cases} \tag{13}$$

где $k_1 \neq k_2,\ b_1 \neq b_3,\ b_2 \neq b_4$.

Введем обозначения: $\dfrac{C_1}{B_1} = -b_5$, $\dfrac{C_2}{B_2} = -b_6$, $\dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{A_2}{B_2} = -k_3$, $b_5 \neq b_6$, $(k_3-k_1)(k_3-k_2) \neq 0$.

Систему (13) перепишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = B_1(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_5), \\ \dfrac{dy}{dt} = B_2(y-k_1x-b_3)(y-k_2x-b_4)(y-k_3x-b_6), \end{cases} \tag{14}$$

В системе (13), а значит и в системе (14) считаем, что $l_1: y-k_1x-b_1=0$, $l_3: y-k_1x-b_3=0$ ($l_2: y-k_2x-b_2=0$, $l_4: y-k_2x-b_4=0$) – это те прямые изоклины, в которые в результате линейного преобразования перешли две прямые изоклины множества $M_1(M_2)$. Из (14) видно, что по теореме 3 прямые изоклины $l_5: y-k_3x-b_5=0$ и $l_6: y-k_3x-b_6=0$ проходят через две простые особые точки каждая. Следовательно, l_5 и l_6 удовлетворяют условиям теоремы 5, и система (14) имеет прямую изоклину l_7, параллельную прямым l_5 и l_6. В силу теоремы 1 [3] l_7 не является главной изоклиной системы (14), а значит, множество $M_3=\{l_5,l_6,l_7\}$ обладает свойством (α). Теорема доказана.

Пример 3. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-1)(y-x)(x-1), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-x-1)(x-2) \end{cases} \tag{15}$$

имеет три множества прямых изоклин со свойством (α):

$M_1=\{y=0, y-1=0, y-2=0\}$, $M_2=\{y-x=0, y-x-1=0, y-x+1=0\}$, $M_3=\{x=0, x-1=0, x-2=0\}$.

Теорема 7. *Система* (10) *имеет не более трех трехэлементных множеств прямых изоклин, каждое из которых обладает свойством* (α).

Доказательство. Предположим, что система (10) имеет не менее четырех трехэлементных множеств прямых изоклин со свойством (α). Выберем из них четыре множества M_1, M_2, M_3, M_4. Каждая прямая изоклина множества M_i, $i\in\{1,2,3,4\}$ пересекается со всеми прямыми изоклинами множества M_j, $j\in\{1,2,3,4\}\setminus\{i\}$. Пусть на прямой $l\in M_i$ индуцировано направление m. По лемме 1 любой прямой изоклине множества $\bigcup_{s=1}^{4} M_s$ инцидентны две особые точки, которые являются простыми в силу теоремы 3. Поэтому в каждом множестве M_j, $j\in\{1,2,3,4\}\setminus\{i\}$ найдется в точности одна прямая изоклина, на которой индуцировано направление m. Иначе говоря, существует множество M^m, состоящее по меньшей мере из четырех прямых изоклин. Это противоречит теореме 1 [3]. Теорема доказана.

Теорема 8. *Если система* (10) *имеет три трехэлементных множества* M_1, M_2, M_3 *прямых изоклин со свойством* (α), *то число прямых изоклин этой системы равно девяти, а число особых точек – шести.*

Доказательство. Так как система (10) имеет три трехэлементных множества прямых изоклин со свойством (α), то согласно утверждению 1 во множестве M всех прямых изоклин системы (10) есть три подмножества: $M^{m_1}=\{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}, l_3^{m_1}\}$, $M^{m_2}=\{l_4^{m_2}, l_5^{m_2}, l_6^{m_2}\}$, $M^{m_3}=\{l_7^{m_3}, l_8^{m_3}, l_9^{m_3}\}$. Не нарушая общности, считаем, что

$$M_1=\{l_1^{m_1}, l_4^{m_2}, l_7^{m_3}\},\ M_2=\{l_2^{m_1}, l_5^{m_2}, l_8^{m_3}\},\ M_3=\{l_3^{m_1}, l_6^{m_2}, l_9^{m_3}\}.$$

Посредством линейного невырожденного преобразования [1, 4] переведем прямые множества $M^{m_1}\left(M^{m_2}\right)$ в изоклины бесконечности (нуля) системы (обозначения переменных x и y оставляем неизменными):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_5) \equiv P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = B(y-k_1x-b_4)(y-k_2x-b_5)(y-k_3x-b_6) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{16}$$

где $k_1 \neq k_2$, $k_1 \neq k_3$, $k_2 \neq k_3$, $(b_1-b_4)(b_2-b_5)(b_3-b_6) \neq 0$, $AB \neq 0$.

Введем обозначения: $l_1^{\infty}: y-k_1x-b_1=0$, $l_2^{\infty}: y-k_2x-b_2=0$, $l_3^{\infty}: y-k_3x-b_3=0$, $l_4^{0}: y-k_1x-b_4=0$, $l_5^{0}: y-k_2x-b_5=0$, $l_6^{0}: y-k_3x-b_6=0$, $l_7^{m}: y-k_1x-b_7=0$, $l_8^{m}: y-k_2x-b_8=0$, $l_9^{m}: y-k_3x-b_9=0$.

Отметим, что прямые изоклины множества M^{m_3} системы (10) преобразованы в прямые изоклины l_7^m, l_8^m и l_9^m где $m \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Так как прямые l_7^m, l_8^m и l_9^m – изоклины системы (16), то имеют место равенства

$$Q(x,y) - mP(x,y) \equiv (y-k_1x-b_7)R_2(x,y), \tag{17}$$

$$Q(x,y) - mP(x,y) \equiv (y-k_2x-b_8)S_2(x,y), \tag{18}$$

$$Q(x,y) - mP(x,y) \equiv (y-k_3x-b_9)U_2(x,y), \tag{19}$$

где $R_2(x,y)$, $S_2(x,y)$, $U_2(x,y)$ – многочлены степени, не выше второй. Из (17) – (19) следует, что

$$Q(x,y) - mP(x,y) \equiv C(y-k_1x-b_7)(y-k_2x-b_8)(y-k_3x-b_9), \; C \neq 0. \tag{20}$$

С учетом (20) перепишем систему (16).

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_3), \qquad (21) \\ \dfrac{dy}{dt} = mA(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_3) + C(y-k_1x-b_7)(y-k_2x-b_8)(y-k_3x-b_9). \end{cases}$$

Покажем, что система (21) не имеет прямой изоклины $L \notin M_1 \cup M_2 \cup M_3$. Пусть вопреки утверждению теоремы система (21) имеет прямую изоклину $L: y-kx-b=0$, и на ней индуцировано направление m_0, причем $m_0 \notin \{\infty, 0, m\}$. Тогда выполняется равенство

$$\begin{aligned} & mA(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_3) + \\ & + C(y-k_1x-b_7)(y-k_2x-b_8)(y-k_3x-b_9) - \\ & - m_0A(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_3) \equiv (y-kx-b)T_2(x,y), \end{aligned} \tag{22}$$

где $T_2(x,y)$ – многочлен степени, не выше второй. Функция $T_2(x,y)$ в точках всех прямых $l_1^{\infty}, l_2^{\infty}, l_3^{\infty}$ не может являться многочленом первой степени относительно x. В самом деле, полагая противное, запишем условия:

$$T_2(x,y) \equiv M_1x + N_1 + (y-k_1x-b_1)r_1(x,y), \tag{23}$$

$$T_2(x,y) \equiv M_2x + N_2 + (y-k_2x-b_2)s_1(x,y), \tag{24}$$

$$T_2(x,y) \equiv M_3x + N_3 + (y-k_3x-b_3)u_1(x,y), \tag{25}$$

где $r_1(x,y)$, $s_1(x,y)$, $u_1(x,y)$ – многочлены не выше первой степени. Из (23) – (25) следуют равенства:

$$M_1x+N_1+(y-k_1x-b_1)r_1(x,y)\equiv M_2x+N_2+(y-k_2x-b_2)s_1(x,y), \tag{26}$$

$$M_1x+N_1+(y-k_1x-b_1)r_1(x,y)\equiv M_3x+N_3+(y-k_3x-b_3)u_1(x,y). \tag{27}$$

Из (26) и (27) следуют равенства

$$M_1x+N_1+\left[(k_2-k_1)x+b_2-b_1\right]r_1(x,k_2x+b_2)\equiv M_2x+N_2, \tag{28}$$

$$M_1x+N_1+\left[(k_3-k_1)x+b_3-b_1\right]r_1(x,k_3x+b_3)\equiv M_3x+N_3. \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует, что

$$r_1(x,y)\equiv \mu(y-k_2x-b_2)+\nu, \tag{30}$$

$$r_1(x,y)\equiv \eta(y-k_3x-b_3)+\varpi. \tag{31}$$

Из (30) и (31) получаем соотношения $\mu=\eta$, $k_2=k_3$, но по предположению $k_2\neq k_3$. Таким образом, $T_2(x,k_ix+b_i)$ – многочлен второй степени хотя бы для одного значения $i\in\{1,2,3\}$. Подставим в равенство (22) вместо y выражение k_ix+b_i, для которого $T_2(x,y)$ – многочлен второй степени. В результате получим в левой части (22) многочлен второй степени, а в правой части-многочлен третьей степени относительно x, так как $k_i-k\neq 0\forall i\in\{1,2,3\}$. Тем самым доказано, что система (21) не имеет прямых изоклин, не принадлежащих множеству $\{l_1^{\infty},l_2^{\infty},l_3^{\infty},l_4^{0},l_5^{0},l_6^{0},l_7^{m},l_8^{m},l_9^{m}\}$, то есть число прямых изоклин системы (10) равно девяти. Принимая во внимание теорему 3, приходим к выводу, что число особых точек системы (10) равно шести.

Теорема доказана.

Далее рассмотрим систему

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_3),\\ \dfrac{dy}{dt}=\beta(y-k_4x-b_4)r(y-k_4x-b_5)\end{cases} \tag{32}$$

где $\beta\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $(r-1)(r-2)=0,b_4\neq b_5$.

Лемма 2. Пусть система (32) имеет хотя бы одну особую точку. Тогда она не имеет прямой изоклины $l_6^{m}: y-k_4x-b_6=0$, где $(b_6-b_4)(b_6-b_5)\neq 0, m\notin\{0;\infty\}$.

Доказательство. Предположим, что l_6^{m} – изоклина системы (32). Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned}&\beta(y-k_4x-b_4)^r(y-k_4x-b_5)\equiv m(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_3)+\\&+(y-k_4x-b_6)Z_2(x,y),\end{aligned} \tag{33}$$

где $Z_2(x,y)$ – многочлен не выше второй степени. Согласно работе [5] система (32) имеет не более пяти параллельных между собой прямых изоклин. Поэтому, полагая в равенстве (33) $y=k_4x+b_6$, в левой его части имеем постоянное число, а в правой части – многочлен не ниже первой степени. Это противоречие и доказывает лемму.

Лемма 3. если система (32) имеет прямую изоклину $l_6^{m}: y-k_6x-b_6=0,\quad m\notin\{0;\infty\}$, то l_6^{m} пересекает не менее двух прямых изоклин бесконечности этой системы.

Доказательство. По лемме 2 $k_6\neq k_4$. Так как l_6^{m} – прямая изоклина системы (32), то выполняется равенство

$$\begin{aligned}&\beta(y-k_4x-b_4)^r(y-k_4x-b_5)\equiv m(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_3)+\\&+(y-k_4x-b_6)V_2(x,y),\end{aligned} \tag{34}$$

где $V_2(x,y)$ – многочлен степени, не выше второй. Вопреки утверждению леммы предположим, что $l_6^{\,m}$ пересекает не более одной прямой изоклины бесконечности. Тогда $l_6^{\,m}$ либо не пересекает ни одну из прямых изоклин бесконечности, либо пересекает только одну из них. Если $k_1 = k_2 = k_3 = k_6$, то согласно [5] $l_6^{\,m}$ пересекает обе прямые изоклины нуля системы (32). Поэтому, полагая в равенстве (34) $y = k_6 x + b_6$ в левой его части получим многочлен второй степени относительно x, а в правой его части постоянное число. Если $l_6^{\,m}$ пересекает только одну прямую изоклину бесконечности, то полагаем $k_1 = k_2 = k_6$. Полагая при этом в равенстве (34) $y = k_6 x + b_6$, приходим к тождеству относительно x, где левая часть – многочлен не ниже второй степени, а правая часть – многочлен не выше первой степени. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 4. Если система (32) имеет прямую изоклину $l_6^{\,m}:\ y - k_6 m - b_6 = 0$, $\quad m \notin \{0;\infty\}$, то ни одна из ее прямых изоклин бесконечности не параллельна изоклинам нуля.

Доказательство. Вопреки утверждению леммы предположим, что $k_4 = k_1$ и $l_6^{\,m}$ - изоклина системы (32). Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned}&\beta(y-k_4x-b_4)^r(y-k_4x-b_5) \equiv m(y-k_4x-b_1)(y-k_2x-b_2)(y-k_3x-b_3)+\\&+(y-k_6x-b_6)W_2(x,y),\end{aligned} \tag{35}$$

где $W_2(x,y)$ – многочлен не выше второй степени, $(b_1-b_4)(b_1-b_5) \neq 0$. Пусть в равенстве (35) $y = k_4 x + b_1$. Тогда в левой части (35) имеет место постоянное число, отличное от нуля. С другой стороны, по лемме 2 $k_6 \neq k_4$, следовательно, в правой части (35) имеет место многочлен не ниже первой степени относительно x. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 5. Если через особую системы (32) проходят три прямые изоклины бесконечности, то эта система не имеет прямой изоклины $l_6^{\,m}: y - k_6 x - b_6 = 0, \quad m \notin \{0;\infty\}$.

Доказательство. Не сужая общности, рассмотрим вместо (32) систему:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = (y-k_1x)(y-k_2x)(y-k_3x),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = \beta(y-k_4x)^{r_1}(y-k_4x-b_5)^{r_2},\end{cases} \tag{36}$$

где $\beta \cdot b_5 \neq 0, \quad r_1, r_2 \in \{1,2\}, \quad r_1 + r_2 \in \{2,3\}, \qquad (k_1-k_2)(k_1-k_3)(k_2-k_3) \neq 0$.

Пусть $l_6^{\,m}$ – изоклина системы (36), то есть выполнено равенство

$$\beta(y-k_4x)^{r_1}(y-k_4x-b_5)^{r_2} \equiv m(y-k_1x)(y-k_2x)(y-k_3x)+(y-k_6x-b_6)F_2(x,y), \tag{37}$$

где $F_2(x,y)$ – многочлен не выше второй степени.

По лемме 4 $k_4 \neq k_i \quad \forall i \in \{1,2,3\}$, поэтому при $y = k_4 x$ по необходимости следует выполнение условий: $F_2(0;0) = 0,\ b_6 = 0$. Следовательно, через особую точку $O(0,0)$ системы (36) проходит, кроме трех изоклин бесконечности, еще одна прямая изоклина $l_6^{\,m}: y - k_6 x = 0.$ Приходим к противоречию с тем, что на прямой изоклине $y - k_4 x - b_5 = 0$ система (36) имеет не более трех особых точек. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть система (32) имеет три различные изоклины бесконечности, две из которых проходят через одну и ту же особую точку этой системы. Тогда система (32) имеет не более одной прямой изоклины, не являющейся главной изоклиной.

Доказательство. Пусть система (32) имеет две прямые изоклины бесконечности, проходящие через одну и ту же особую точку (32). Тогда не уменьшая общности, считаем, что (32) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - k_1x)(y - k_2x)(y - k_3x - b_3), \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta(y - k_4x)^{r_1}(y - k_4x - b_5)^{r_2} \end{cases} \tag{37}$$

где $\beta \cdot b_3 \cdot b_5 \neq 0, \quad r_1, r_2 \in \{1{,}2\}, \quad r_1 + r_2 \in \{2{,}3\}, k_1 \neq k_2$.

Допустим, что система (37) имеет две прямые изоклины: $l_6^{m_6} : y - k_6x - b_6 = 0$, $l_7^{m_7} : y - k_7x - b_7 = 0$, где $m_6, m_7 \notin \{0; \infty\}$. По лемме 4 $k_4 \neq k_i \quad \forall i \in \{1{,}2{,}3\}$, поэтому $b_6 = b_7 = 0$. Это означает, что через особую точку O(0;0) системы (37), кроме двух изоклин бесконечности $y - k_1x = 0, y - k_2x = 0,$ проходят еще две прямые изоклины $l_6^{m_6}$ и $l_7^{m_7}$, а следовательно, на прямой $y - k_4x - b_5 = 0$ система (37) имеет не менее четырех особых точек. Это невозможно. Лемма доказана.

Из лемм 2-6 следует

Теорема 9. *Система* (32), *имеющая хотя бы одну особую точку, имеет не более шести прямых изоклин.*

Пример 4. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - 2x + 1)(y - x)(y - x + 2), \\ \dfrac{dy}{dt} = (x - 2)(x - 4) \end{cases}$$

удовлетворят условиям теоремы 9, имеет шесть прямых изоклин: $y - 2x - 1 = 0, \quad y - x = 0,$ $y - x + 2 = 0$ – изоклины бесконечности, $x - 2 = 0, \quad x - 4 = 0$ – изоклины нуля и прямую $y - 2x + 4 = 0$, на которой индуцировано направление $m = -1/3$.

Литература

1. *Ушхо Д.С.* О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы / Д.С. Ушхо // Труды ФОРА. – 2003. - №8.- С. 7-21.
2. *Тлячев В.Б.* Оценка числа прямых изоклин полиномиальных векторных полей на плоскости / В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия «Естественно–математические и технические науки». – Майкоп: Изд-во АГУ, 2013. – С. 18-27.
3. *Тлячев В.Б.* О прямых изоклинах векторных полей на плоскости / В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2014. – №2.(1). – С. 148-156.
4. *Ушхо Д.С.* Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости / Д.С. Ушхо. – Майкоп, 2007. – 93 с.
5. *Ушхо А.Д.* Параллельные прямые изоклины кубических дифференциальных систем на плоскости /А.Д. Ушхо // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. «Естественно – математические и технические науки». – 2009. – Вып. 2(49). – С.16-25.

STRIGHT LINE ISOCLINES AND SINGULAR POINTS OF POLYNOMIAL VECTOR FIELDS

V.B. Tlyachev, D.S. Ushkho, A.D. Ushkho

For planar polynomial systems of differential equations we consider the set M with two properties: 1) the elements of M are parallel to each other straight line isoclines of system; 2) no two straight lines in M, which is induced by one and the same direction. On this basis, we prove theorems on the number of singular points, straight line isoclines and their properties.

