Министерство образования и науки Российской Федерации

Адыгейский государственный университет
Факультет математики и компьютерных наук
Кафедра математического анализа

К.С. Мамий

Асимптотическое поведение решений операторных уравнений

научное издание

Майкоп – 2014

УДК 517.955.8:517.95

ББК 22.162; 22.161.6

М222

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. М.М. Шумафов (Адыгейский государственный университет)

д-р физ.-мат. наук, проф. А.Б. Шишкин (Кубанский государственный университет, филиал в г. Славянск-на-Кубани)

Мамий, К.С.

М222 Асимптотическое поведение решений операторных уравнений / К.С. Мамий. — Майкоп: ИП Солодовников А.Н., 2014. — 169 с.

В книге рассмотрены многообразные вопросы, связанные с операторными уравнениями высших порядков.

В первой части доказаны различные теоремы об априорных оценках решений рассматриваемых уравнений на оси или полуоси, из которых вытекают различные свойства решений: ограниченность, устойчивость, единственность и другие. Некоторые теоремы, полученные автором представляют собой обобщение на бесконечномерный случай соответствующих предположений, установленных для уравнений второго порядка в конечномерном случае.

Вторая часть данной книги содержит конкретную реализацию обобщенного метода Фурье для решения операторного уравнения третьего порядка с неразделяющимися переменными.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основные факты теории дифференциальных уравнений в линейных пространствах группируются в двух основных направлениях. В первом направлении рассматриваются линейные и нелинейные дифференциальные уравнения с ограниченными операторами в банаховом и произвольном локально выпуклом пространствах, а во втором направлении — линейные и нелинейные дифференциальные уравнения с неограниченными операторами в гильбертовом и банаховом пространствах. Круг вопросов из первого направления значительно шире, чем из второго. Это объясняется тем, что в случае уравнений с неограниченными операторами, даже для линейных уравнений, возникают существенные трудности. Основное содержание второго направления связано с изучением абстрактной задачи Коши для рассматриваемых уравнений. При изучении этой задачи используются как метод теории полугрупп, так и другие методы. Применение теории полугрупп к изучению абстрактной задачи Коши стало возможным после основных теорем о полугруппах Хилле, Иосиды, Феллера, Миядеры и Филлипса. Другие методы исследования абстрактной задачи Коши для уравнений с неограниченными операторами тесно связаны с понятием обобщенного решения краевых задач для уравнений с частными производными и с методами доказательства существования таких решений, использующими нефункциональную природу дифференциальных операторов, а лишь их общие свойства как операторов в гильбертовом или банаховом пространстве.

Метод Фурье (метод разделения переменных, метод собственных функций) — один из самых распространенных и эффективных методов решения уравнений с частными производными. Основная идея этого метода состоит в том, что решение уравнения с частными производными сводится к решению вспомогательных уравнений с меньшим числом переменных. Представление решения рядами, к которым приводит этот метод, имеет много естественных преимуществ. Это, во-первых, достаточно простой способ получения решения в явной форме; во-вторых, возможность представить этими рядами чрезвычайно широкий класс функций (например, удовлетворяющих внутри области одним условиям гладкости, а на границе — другим); в-третьих, возможность применить аппарат асимптотического анализа для получения оценок коэффициентов Фурье, что позволяет улучшить сходимость и выделить особенности ряда. Есть много и других преимуществ, специфических для каждой конкретной задачи. Например, яркий физический смысл коэффициентов Фурье, унификация постановки задачи и т.д. Однако все эти чрезвычайно привлекательные достоинства компенсируются одним, но решающим недостатком. Число задач, к которым применим классический метод разделения переменных, не очень велико. Дело в том, что допускать разделение переменных должны не только уравнения, но и границы, а также краевые условия. Другими словами, если уравнение даже допускает разделение переменных, то для применения метода границы должны быть координатными линиями в данной системе координат.

Одной из первых попыток перенесения метода Фурье на задачу с некоординатными границами можно считать классическую работу Ж.С. Рэлея [1]. В ней содержалась простая идея представить решение рядом Фурье в части области, полностью содержащей координатные линии, вдоль которых проводилось разделение переменных. Затем в предположении, что построенный ряд сходится всюду в области вплоть до границы, с помощью заданного краевого условия вычислялись коэффициенты Фурье. Дальнейшие многочисленные исследования показали, что предположение о сходимости ряда всюду в области, сделанное в [1] (гипотеза Рэлея), верно не всегда и, кроме того, его доказательство представляет само по себе трудную задачу, связывать которую с методом разделения переменных нецелесообразно. Таким образом, метод Рэлея нельзя считать строгим, однако его идея представить решение в виде ряда в некоторой части области оказалась содержательной и послужила отправной точкой многих исследований в этом направлении. Например, можно исследовать упрощенную постановку задачи, а именно, ставить вопрос об отыскании не точного выражения коэффициентов Фурье, а его асимптотики. Такой подход позволил распространить метод Рэлея на уравнения с неразделяющимися переменными и представить коэффициенты Фурье при больших значениях номера в виде асимптотических рядов (см. [2]–[5]).

По-видимому С.Н. Бернштейн был первым, кто применил метод Фурье к точному решению уравнений, не допускающих разделения переменных [6]. Позднее появляется серия работ З.И. Халилова, посвященных решению методом Фурье ряда задач математической физики (уравнение колебания струны в среде с переменным коэффициентом сопротивления, уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом теплоотдачи [7]). Следует отметить, что методы, развитые З.И. Халиловым, представляют собой существенный шаг вперед, но требуют жестких ограничений при доказательстве теоремы существования и не дают возможности доказать теорему единственности. Эти трудности во многом были преодолены Ю.Ф. Коробейником. Им разработан обобщенный метод Фурье, решена этим методом смешанная задача для широкого класса операторных уравнений, доказаны общие теоремы существования и единственности. Например, в работе [8] обобщенный метод Фурье был применен к решению задачи Коши для операторного уравнения первого порядка в абстрактном гильбертовом пространстве. Из полученных Ю.Ф. Коробейником общих теорем существования и единственности следует, что в случае уравнений, рассмотренных З.И. Халиловым, можно значительно ослабить требования на начальные функции и коэффициенты уравнений.

Понятно, что метод Фурье не является единственным методом решения абстрактных операторных уравнений. Весьма общие методы (метод, основанный на принципе Шаудера, метод последовательных приближений, метод монотонных операторов, метод неявных функций и др.) решения операторных уравнений 1-го и 2-го порядков параллельно разрабатывались, например, О.А. Ладыженской, М.И. Вишиком, С.Г. Крейном и М.А. Красносельским, В.М. Миллионщиковым, M. Inaba, J. Klsýnski, M. Hukuhara, Z. Kowalski, C. Olech, C. Pulvirenti, F.E. Browder, A. Deleanu (см. работы [9]–[23] и более поздние обзоры [24]–[26]). Однако следует отметить, что примеры применения разрабатываемых методов к операторным уравнениям высших порядков были и остаются весьма редкими. Одним из первых таких примеров является работа К.С. Мамия, представленная во второй части данного издания.

Вторая часть данной книги [1] написана под непосредственным руководством Ю.Ф. Коробейника [2] и содержит конкретную реализацию обобщенного метода Фурье для решения операторного уравнения третьего порядка с неразделяющимися переменными. В ней рассматривается операторное уравнения вида

$$\frac{d^3U}{dt^3} + s_1\frac{d^2U}{dt^2} + s_2(t)\frac{dU}{dt} + s_3(t)U = f(t),\ 0 \leq t \leq l.$$

Здесь s_1 — положительно-определенный оператор в некотором гильбертовом пространстве, операторы $s_1(t), s_2(t)$ специальным образом зависят от оператора s_1. По отношению к этому уравнению ставится задача поиска обобщенного решения (по аналогии с обобщенным решением, введенным О.А. Ладыженской для уравнения первого порядка [9]).

[1] Рассматривается вначале первая часть данной книги, что связано с историей возникновения книги.

[2] Профессор Ю.Ф. Коробейник был научным руководителем К.С. Мамия по дипломной работе в Ростовском государственном университете.

Обобщенное решение разыскивается с помощью метода Фурье. Именно, пусть $\{V_k\}$ — система собственных элементов оператора s_1 (известно, что эта система существует [10]). Обобщенное решение представляется в виде ряда Фурье по элементам V_k:

$$U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) V_k.$$

Процедура определения коэффициентов Фурье $f_k(t)$ приводит к бесконечной системе линейных дифференциальных уравнений, которая рассматривается как операторное уравнение в специальном функциональном пространстве. Функции $f_k(t)$ и их производные до второго порядка включительно оказываются абсолютно-непрерывными. Это предопределяет возможность доказательства теоремы существования и единственности решения операторного уравнения (бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений) и как следствие теоремы существования и единственности решения исходного дифференциального уравнения. Далее, опираясь на теорему существования и единственности, автор дает оценку нормы решения, описывает характер его гладкости и исследуя урезанные системы линейных дифференциальных уравнений дает обоснование известного метода Галерки для приближенного решения исходного уравнения.

Первая часть настоящего издания [3] относится к качественной теории дифференциальных уравнений второго порядка и содержит основные результаты диссертации «Априорные оценки решений операторных дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси и их приложения», выполненной К.С. Мамием под научным руководством профессора МГУ им. М.В. Ломоносова В.В. Немыцкого. Она посвящена исследованию поведения на полуоси или всей оси решений уравнений вида

$$y''(t) + A(t)y(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

[3] См. первую сноску.

в банаховом и гильбертовом пространствах. Здесь $A(t)$ — при каждом фиксированном t линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве Y, $f(t,u,v)$ — нелинейный оператор, действующий из топологического произведения $[0,\infty)\times U\times Y$ в Y, где U — некоторое линейное пространство, плотное в Y, $y(t)$ — функция со значениями в Y.

Впервые вопрос о поведении на оси решений уравнений второго порядка в банаховых пространствах рассмотрел М.Г. Крейн [27]. Им было установлено необходимое и достаточное условие ограниченности всех решений на всей оси ($-\infty < t < +\infty$) однородного дифференциального уравнения

$$y''(t) + Ay(t) = 0$$

с постоянным ограниченным оператором . Позднее О.А. Ладыженская [28], [29] получила априорные оценки («энергетические неравенства») на конечном отрезке $[0,T]$, $T > 0$, для решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными переменными операторами в случае гильбертова пространства. Однако, из этих оценок нельзя получить представления о поведении решений при $t \to +\infty$. З.Б. Сеидов [30] и Я.Д. Мамедов [31] рассмотрели некоторые частные случаи общего уравнения

$$y''(t) + A(t)y(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

с потенциальными нелинейностями в вещественном гильбертовом пространстве. Для таких уравнений ими получены некоторые достаточные условия ограниченности и устойчивости решений на полуоси $[0,+\infty)$. Однако, при этом предполагалось, что область определения оператора $A(t)$ не зависит от параметра t. Кроме того, аналогичные вопросы для уравнений второго порядка в конечномерном случае рассматривались ранее в работах Ф. Беллмана [32], В.Б. Лидского [33], Borg'a [34], Л.И. Камынина [35] и Ю.А. Клокова [36],[37].

В исследовании, проведенном К.С. Мамием установлены различные теоремы об априорных оценках решений рассматриваемых операторных уравнений на оси или полуоси, из которых вытекают различные свойства решений: ограниченность, устойчивость, единственность и другие. Ряд теорем, доказанных автором, обобщают на бесконечномерный случай теоремы, установленных для уравнений второго порядка в конечномерном случае в работах [32]–[37]. Из доказанных теорем, в свою очередь, вытекают различные следствия об ограниченности и устойчивости решений для уравнений в частных производных и интегро-дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных).

Высокое качество исследований, проведенных К.С. Мамием, подчеркивает ряд присущих им новаторских особенностей: отдельные вспомогательные предложения носят самостоятельный характер и вызывают дополнительный интерес; автор не ограничивается вещественной ситуацией и рассматривает случай комплексного гильбертова пространства; существенная доля рассуждений автора не предполагает независимость от параметра t области определения оператора $A(t)$; отдельные доказанные теоремы являются новыми и в конечномерном случае. К последним, например, относятся теоремы, устанавливающие ограниченность решений следующих уравнений

$$y'' + A(t, y') + B(t)P(y) = 0,$$

$$y'' + A(t, y') + a(t)By + b(t)P(y) = 0$$

в вещественном гильбертовом пространстве H. Здесь $a(t)$ и $b(t)$ — скалярные функции, $B(t)$ и B — неограниченные самосопряженные операторы в H, $A(t, v)$ — нелинейный оператор, действующий в H при каждом $t > 0$, $P(u)$ — нелинейный потенциальный оператор в H.

Следует отметить, что многие из представленных в данном издании результатов исследований К.С. Мамия носят законченный характер и не потеряли своей актуальности в настоящее время.

Помню Казбека Сагидовича красивым, доброжелательным, общительным, очень активным человеком, всегда нацеленным на дальнейшие творческие достижения.

А.Б. Шишкин

Литература к предисловию

[1] Rayleigh J.S. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1907. V.79. P. 339.

[2] Баранцев Р.Г., Горбунова Е.Г., Цыганкова И.В. Асимптотические интегральные итерации в неканоническом методе Фурье. // Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики. Ч. II. Владивосток. 1992. С. 49–54.

[3] Баранцев Р.Г., Горбунова Е.Г. Асимптотика коэффициентов Фурье в смешанной задаче для линейного квазиволнового уравнения. //Асимптотические методы в задачах аэродинамики и проектирования летательных аппаратов. Ч. I. Иркутск. 1994. С. 29–33.

[4] Бадюков В.Ф. Об одном методе решения интегральных уравнений в периодических задачах рассеяния / Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики. Владивосток. 1990. С. 7.

[5] Крутинь Ю.И., Тучкин Ю.А., Шестопалов В.П. Дифракция поляризованной электромагнитной волны на периодической гладкой волнистой поверхности. // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37. No 2. С. 202–210.

[6] Бернштейн С.Н. Об одном классе функциональных уравнений с частными производными.// Известия АН СССР. Сер. матем. 1940. Том 4. No 1. С. 17–26.

[7] Халилов З.И. К методу разложения но собственным функциям главной части уравнения в решении смешанных задач. // Доклады АН Азербайджанской ССР. 1954. Том 10. No 4.

[8] Коробейник Ю.Ф. О решении операторных уравнений методом Фурье // Труды Воронежского семинара по функциональному анализу. 1957. Выпуск 6. С. 71–86.

[9] Ладыженская О.А. О решении нестационарных операторных уравнений различных типов. // Доклады АН СССР. 1955. Том 102. No 2. С. 207–210.

[10] Михлин С.Г. Прямые методы в математической физике. М.: ОГИЗ ГТТИ. 1950. 422 с.

[11] Вишик М.И. Задача Коши для уравнений с операторными козффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения Матем. сб. 1956. Том 39(81). No 1. С 51–148.

[12] Красносельский М.А.. Крейн С.Г., Соболевский П.Е. О дифференциальных уравнениях с неограниченными операторами в банаховых пространствах. // Доклады АН СССР. 1956. Том 3. No 1. С. 19–22.

[13] Миллионщиков В. М. К теории дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах. // Докл. АН СССР, 1960, **131**, No 3, 510–513.

[14] Миллионщиков В. М. К теории дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах. // Матем. сб., 1962, **57**, No 4, 385-406.

[15] Inaba M. On differential equations in locally convex spaces of some types. // Kumamoto J. Sci., 1955. **B2**. No 2. P. 119–124.

[16] Kisýnski J. Sur les équations différentielles dans les espaces de Banach. // Bull. Acad, polon. Sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1959. **7**. No 7. P. 381–385.

[17] Hukuhara M. Théorèms fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires dans l'espace vectoriel topologique. // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1959, Sec. I, **8**. No 1. P. 111–138.

[18] Kowalski Z. The poligonal method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$. // Ann. polon. math., 1963, **13**. No 2. P. 173–204.

[19] Olech C. On the existence and uniqueness of solutions of an ordinary differential equation in the case of Banach space. // Bull. Acad, polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1960, **8**. No 10. P. 667–673.

[20] Pulvirenti C. Equazioni differenziali in forma implicita in uno spazio di Banach. // Ann. mat. pura ed appl., 1961. **56**. P. 177–191.

[21] Pulvirenti C. Equazioni differenziali in uno spazio de Banach. Teorema di esistenza e struttura dell pennello delle soluzioni in ipotesi di Caratheodory. // Ann. mat. pura ed appl., 1961. **56**. P. 281–300.

[22] Browder F. E. Non linear equations of evolution. // Ann. Math., 1964. **80**. No 3. P. 485–523.

[23] Deleanu A. O teoremă de existenţă pentru ecuaţii differentiate în spaţii local-convéxe. // Commun. Acad. RPR, 1962. **12**. No 1. P. 23–28.

[24] Немыцкий В.В., Вайнберг М.М., Гусарова Р.С. Операторные дифференциальные уравнения. // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1964, М.: ВИНИТИ, 1966. С. 165–235.

[25] Крейн С.Г., Хазан М.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., 21, М.: ВИНИТИ, 1983. С. 130–264.

[26] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Обзор результатов но разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности. // УМН. 1986. Т.41. Вып.5. С.59–83.

[27] Крейн С.Г. О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости. // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, вып. 3(25). С. 166–169.

[28] Ладыженская О.А. О решении нестационарных операторных уравнений. // Матем. сб. 1956. Том 39 (81). No 4.

[29] Ладыженская О.А. О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики. // Матем. сб. 1958. Том 45(87). No 2.

[30] Сеидов З.Б. Исследование решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. // Ученые записки Азербайджанского ГУ. Сер. физ. мат. и хим. наук. 1962. No 4. С. 49.

[31] Мамедов Я.Д. О некоторых свойствах решений нелинейных уравнений гиперболического типа в гильбертовом пространстве. // Доклады АН СССР. 1964. Том 158. No 1. С. 45–48.

[32] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Перевод с англ. Изд.2. – М.: URSS, 2003. 216 с.

[33] Лидский В.Б. О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений $y'' + P(t)y = Ay$. // Доклады АН СССР. 1954. Том 95. No 2. С. 217–220.

[34] Borg G. Bounded solutions of a system of differential equations. // Ark. Mat. Astr. Fys. 1948. Band 34B. No 24. 7 pp.

[35] Камынин Л.И. Об ограниченности решений дифференциального уравнения $y'' + F(x)y = 0$. // Вестник МГУ. Сер. физ.-матем. 1951. No 5. С. 3–12.

[36] Клоков Ю.А. Некоторые теоремы об ограниченности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. // УМИ. 1958. Том 13. Вып. 2(80). С. 189–194.

[37] Клоков Ю.А. Некоторые теоремы об ограниченности и устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида $\ddot{x}_i + a_i(t)\sum_{k=0}^{n} b_{ik}(t)\dot{x}_k + a_i(t)\frac{\partial F}{\partial x_i}$. // Научные доклады высшей школы. 1958. No 4. С. 55.

ЧАСТЬ I

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Данная часть работы посвящена исследованию поведения на полуоси или всей оси решений уравнений вида

$$y''(t) + A(t)y(t) = f(t, y(t), y'(t)) \tag{0.1}$$

в банаховом и гильбертовом пространствах.

Здесь $A(t)$ — при каждом фиксированном t линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве Y, $f(t, u, v)$ — нелинейный оператор, действующий из топологического произведения $[0, \infty) \times U \times Y$ в Y, где U — некоторое линейное множество, плотное в Y, $y(t)$ — функция со значениями в Y.

В данном исследовании мы устанавливаем различные теоремы об априорных оценках решений рассматриваемых уравнений на оси или полуоси, из которых вытекают различные свойства решений: ограниченность, устойчивость, единственность и другие.

Некоторые теоремы, полученные нами представляют собой обобщение на бесконечномерный случай соответствующих предположений, установленных для уравнений второго порядка в конечномерном случае в работах Ф. Беллмана [14], В.Б. Лидского [15], I. Borg'a [16], Л.И. Камынина [17] и Ю.А. Клокова [18]. Из этих теорем также вытекают различные следствия об ограниченности и устойчивости решений для уравнений в частных производных и интегро-дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных).

М.Г. Крейн [1] впервые исследовал вопрос о поведении на оси решений уравнений второго порядка в банаховых пространствах. Им было установлено необходимое и достаточное условие ограниченности всех решений на всей оси ($-\infty < t < \infty$) однородного дифференциального уравнения

$$y''(t) + Ay(t) = 0$$

с постоянным ограниченным оператором A.

Позднее О.А. Ладыженская [5] получила априорные оценки («энергетические неравенства») на конечном отрезке $[0,T]$, $\quad T>0$, для решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными переменными операторами в случае гильбертова пространства. Однако, при помощи этих оценок нельзя получить представления о поведении решений при $t\to+\infty$.

З.Б. Сеидов [12] и Я.Д. Мамедов [10] рассмотрели некоторые частные виды уравнений (0.1) с потенциальными нелинейностями в вещественном гильбертовом пространстве. Для таких уравнений ими получены некоторые достаточные условия ограниченности и устойчивости решений на $[0,\infty)$. Отметим, что в работе [10] одним из условий на оператор $A(t)$ является независимость его области определения от t.

В некоторых теоремах данной работы не предполагается независимость от t области определения оператора $A(t)$.

Данная работа состоит из двух глав. В первой главе изучаются линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

§ 1 содержит основные понятия и различные вспомогательные предложения. На наш взгляд, некоторые предложения этого параграфа представляют и самостоятельный интерес (см., например, лемму 1.5 и теорему 1.2).

В §§2 и 3 устанавливаются различные теоремы об ограниченности и устойчивости решений линейных однородных и неоднородных уравнений второго порядка. Наиболее интересными, как нам кажется, являются теоремы 2.2, 2.4, 3.2, 3.5. По-видимому, теорема 3.2 является новой и в конечномерном случае (см. теорему 3.3).

Во второй главе (§§4, 5, 6) изучаются нелинейные уравнения второго порядка.

В § 4 изучается поведение решений уравнения (0.1) в банаховом пространстве l, предположении, что $A(t) = A$ — является постоянным оператором. Основным предложением этого параграфа является теорема 4.1.

В § 5 изучаются свойства решений уравнения (0.1) в комплексном гильбертовом пространстве.

Основные результаты этого параграфа содержатся в теоремах 5.1, 5.2 и 5.5.

В § 6 устанавливаются теоремы об ограниченности решений следующих уравнений

$$y^{''} + A(t, y^{'}) + B(t)P(y) = 0,$$

$$y^{''} + A(t, y^{'}) + a(t)By + b(t)P(y) = 0$$

в вещественном гильбертовом пространстве H.

Здесь $a(t)$ и $b(t)$ — скалярные функции, $B(t)$ и B — неограниченные самосопряженные операторы в H, $A(t, v)$ — нелинейный оператор, действующий в H при каждом $t \geq 0$, $P(u)$ — нелинейный потенциальный оператор в H. Теоремы 6.1 и 6.2, по-видимому, являются новыми и в конечномерном случае.

В каждом из параграфов указываются приложения установленных теорем как к уравнениям в частных производных, так и к некоторым интегро-дифференциальным уравнениям.

В заключение благодарен научному руководителю В.В. Немыцкому за постановку задачи и постоянное внимание к научной работе.

Автор книги также глубоко благодарен М.М. Вайнбергу и Р.С. Гусаровой за проявленное внимание и полезные советы.

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В этом параграфе мы приведем некоторые определения и предложения, которые нам понадобятся в дальнейшем, как в первой, так и во второй главах. Отметим, что мы всюду пользуемся терминологией и некоторыми определениями из книг [2] и [3].

1. Пусть Y — произвольное банахово пространство (комплексное или вещественное), а Y^* — сопряженное к нему пространство.

Мы будем рассматривать функции $y(t)$, заданные на некотором интервале (a, b) действительной числовой оси, значения которой принадлежит Y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функцию $y(t)$, определенную на (a, b) и со значениями в Y, называют слабо (сильно) непрерывной в точке $t_0 \in (a, b)$, если

$$\lim_{t \to t_0} |y^*[y(t) - y(t_0)]| = 0 \text{ при любом } y^* \in Y^*,$$

где $y^*[y]$ — значение линейного функционала y^* в точке $y \in Y$, (соответственно,

$$\lim_{t \to t_0} ||y(t) - y(t_0)|| = 0,$$

где $||\ ||$ — норма в Y).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Говорят, что функция $y(t)$, определенная на (a, b) и со значениями в Y, слабо (сильно) дифференцируема в точке $t_0 \in (a, b)$, если существует такой элемент $y'(t_0) \in Y$, к которому слабо (сильно) сходится разностное отношение

$$\frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t},$$

когда $\Delta t \to 0$. При этом $y'(t_0)$ называется слабой (сильной) производной функции в точке t_0.

Отметим, что под выражением "функция непрерывна" мы всегда будем понимать, что функция сильно непрерывна. Под выражением "функция непрерывно дифференцируема на (a, b) (при $t \geq 0$)" будем понимать, что функция сильно дифференцируема на (a, b) (при всех $t \geq 0$) и что ее производная сильно непрерывна на соответствующем промежутке.

ЛЕММА 1.1. Пусть A — постоянный, замкнутый, линейный оператор, действующий в банаховом пространстве Y, а $y(t)$ заданная на $[0, \infty)$ функция со значениями в Y, непрерывно дифференцируемая при $t \geq 0$. Пусть, далее, при $t \geq 0$ $y(t), y'(t) \in D(A)$ ($D(A)$ — область определения оператора A) и функция $Ay'(t)$ непрерывна на $[0, \infty)$. Тогда функция $Ay(t)$ непрерывно дифференцируема и

$$[Ay(t)]' = Ay'(t), \;\; t \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства

$$y(t) = y(0) + \int_0^t y'(\tau)d\tau \qquad (*)$$

следует, что $\int_0^t y'(\tau)d\tau \in D(A)$, так как $y(t) - y(0) \in D(A)$. Следовательно, имеет смысл выражение $A\int_0^t y'(\tau)d\tau$. С другой стороны, имеет смысл и выражение $\int_0^t Ay'(\tau)d\tau$ в силу непрерывности подинтегральной функции $Ay'(t)$. Но тогда из замкнутости оператора A имеем (см., например, [2]) что

$$A\int_0^t y'(\tau)d\tau = \int_0^t Ay'(\tau)d\tau.$$

Применяя теперь оператор A к обеим частям равенства $(*)$, получим, что

$$Ay(t) = Ay(0) + \int_0^t Ay'(\tau)d\tau,$$

откуда следует лемма.

Заметим, что аналогичная лемма доказана в [2] в предположении непрерывной дифференцируемости функции $Ay(t)$.

Обозначим через $L(Y,Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из Y в Y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Операторную функцию $A(t)$, определенную на (a,b) и со значениями в $L(Y,Y)$ называют (1) слабо (сильно) непрерывной в точке $t_0 \in (a,b)$, если функция $A(t)y$ слабо (сильно) непрерывна в точке t_0 при любом $y \in Y$; (2) непрерывной в точке t_0 в равномерной операторной топологии, если

$$\lim_{t \to t_0} ||A(t) - A(t_0)|| = 0.$$

Пусть теперь $\{A(t),\ a < t < b\}$ — семейство линейных неограниченных операторов, действующих в Y, имеющих постоянную область определения $D(A) \subset Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Говорят, что операторная функция $A(t)$ $(a < t < b)$ (1) слабо (сильно) непрерывна в точке $t_0 \in (a,b)$ на $D(A)$, если функции $A(t)y$ слабо (сильно) непрерывна в этой точке при любом $y \in D(A)$; (2) слабо (сильно) дифференцируема в точке t_0 на $D(A)$, если функция $A(t)y$ слабо (сильно) дифференцируема в точке $t_0 \in (a,b)$ при любом $y \in D(A)$.

ЛЕММА 1.2. Пусть при каждом $t \in [a,b]$ $A(t)$ — самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, область определения $D(A)$ которого не зависит от t. Пусть операторная функция $A(t)$ слабо дифференцируема по $t \in [a,b]$ на $D(A)$, а функция $y(t)$, заданная на $[a,b]$ со значениями в H, сильно дифференцируема на $[a,b]$ и $y(t),\ y^{'}(t) \in D(A)$ при любом $t \in [a,b]$.

Тогда функция $A(t)y(t)$ слабо дифференцируема на $[a,b]$ и при всех $t \in [a,b]$ справедливо равенство

$$[A(t)y(t)]^{'} = A^{'}(t)y(t) + A(t)y^{'}(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть h — произвольный постоянный элемент из $D(A)$. Тогда имеем $((\ ,)$ — скалярное произведение в H)

$$\left|\left(\frac{A(t+\Delta t)y(t+\Delta t)-A(t)y(t)}{\Delta t}-A^{'}(t)y(t)-A(t)y^{'}(t),h\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|\left(\frac{A(t+\Delta t)y(t+\Delta t)-A(t+\Delta t)y(t)}{\Delta t}-A(t+\Delta t)y^{'}(t),h\right)\right|+$$

$$+\left|\left(\frac{A(t+\Delta t)y(t)-A(t)y(t)}{\Delta t}-A^{'}(t)y(t),h\right)\right|+$$

$$+\left|\left(A(t+\Delta t)y^{'}(t)-A(t)y^{'}(t),h\right)\right|\leq$$

$$\leq\left\|A(t+\Delta t)h\right\|\cdot\left\|\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}-y^{'}(t)\right\|+$$

$$+\left|\left(\left[\frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}-A^{'}(t)\right]y(t),h\right)\right|+$$

$$+|([A(t+\Delta t)-A(t)]y^{'}(t),h)|\to 0$$

при $\Delta t\to 0$, так как функция $A(t)H$ слабо непрерывна на $[a,b]$ и, следовательно, она ограничена на $[a,b]$ и поэтому $\|A(t+\Delta t)h\|\leq C\quad(t+\Delta t\in[a,b])$, где C — постоянная, зависящая быть может от h и не зависящая от Δt.

Таким образом, для всех $h\in D(A)$ имеем

$$([A(t)y(t)]^{'}-A^{'}(t)y(t)-A(t)y'(t),h)=0,$$

откуда, в силу плотности $D(A)$ в H, следует лемма.

ЛЕММА 1.3. Пусть на $[a,b]$ заданы две функции $x(t)$ и $y(t)$, значения которых принадлежат H. Если при этом $x(t)$ — слабо, $y(t)$ — сильно дифференцируемы на $[a,b]$, то их скалярное произведение $(x(t),y(t)$ дифференцируемо и

$$(x(t),y(t))^{'}=(x^{'}(t),y(t))+(x(t),y^{'}(t))$$

Эта лемма доказывается по той же схеме, что и предыдущая лемма.

ЛЕММА 1.4. Пусть при каждом $t \geq 0$ $A(t)$ — самосопряженный неотрицательный оператор, действующий в H, область определения $D(A)$ которого зависит, вообще говоря, от t, но область определения $D(A^{\frac{1}{2}})$ положительного квадратного корня из $A(t)$ не зависит от t. Пусть $y(t)$ — заданная на $[0,\infty)$ функция со значениями в H, сильно дифференцируема при $t \geq 0$. Тогда, если при любом $t \geq 0$ $y(t) \in D(A(t))$, $y'(t) \in D(A^{\frac{1}{2}})$ и функции $A^{\frac{1}{2}}(t)h$ $(h \in D(A^{\frac{1}{2}}))$, $A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)$ — сильно дифференцируемы на $[0,\infty)$, то дифференцируема и числовая функция $(A(t)y(t),y(t))$, причем

$$(A(t)y(t),y(t))' = 2Re(A(t)y(t),y^{'}(t)) + 2Re(A_t^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)y(t),y(t)),$$

где $A_t^{\frac{1}{2}}(t)h = [A^{\frac{1}{2}}(t)]'h$, $h \in D(A^{\frac{1}{2}})$.

Для доказательства этой леммы достаточно заметить, что

$$(A(t)y(t),y(t)) = (A^{\frac{1}{2}}(t)y(t),\ A^{\frac{1}{2}}(t)y(t))$$

и затем воспользоваться леммами 1.2 и 1.3.

2. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $y(t)$ со значениями в Y. Разделим $[a,b]$ на части точками

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

и составим сумму

$$\bigvee = \sum_{k=0}^{n-1} \|y(t_{k+1}) - y(t_k)\|.$$

Верхняя грань множества всевозможных сумм $\bigvee$ называется *полной сильной вариацией функции* $y(t)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначают $\bigvee\limits_a^b y(t)$ или $\int_a^b \|dy(t)\|$.

Если $\int_a^b \|dy(t)\| < \infty$, *то говорят, что* $y(t)$ *есть функция с ограниченной сильной вариацией.*

Пусть теперь на $[a,b]$ задана операторная функция $A(t)$ со значениями в $L(Y,Y)$.

Тогда верхняя грань множества всевозможных сумм
$$\bigvee = \sum_{k=0}^{n-1} \|A(t_{k+1}) - A(t_k)\|$$
называется полной вариацией операторной функции $A(t)$ на $[a,b]$ в норме пространства $L(Y,Y)$ и обозначают $\bigvee\limits_a^b A(t)$ или $\int_a^b \|dA(t)\|$. *Если $\int_a^b \|dA(t)\| < +\infty$, то говорят, что операторная функция $A(t)$ имеет ограниченную вариацию в равномерной операторной топологии.*

ЛЕММА 1.5. Пусть операторная функция $A(t)$, определенная на $[a,b]$ и со значениями в $L(H,H)$, непрерывна и имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$ в равномерной операторной топологии. Пусть, далее, на отрезке $[a,b]$ функция $y(t)$ со значениями в H сильно непрерывна и имеет ограниченную сильную вариацию. Тогда функция $\varphi(t) = (A(t)y(t), y(t))$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$, причем справедлива следующая формула интегрирования по частям
$$\int_a^b [(A(t)y(t), dy(t)) + (A(t)dy(t), y(t))] =$$
$$= (A(t)y(t), y(t))\Big|_a^b - \int_a^b ([dA(t)]y(t), y(t)), \tag{!}$$
где интегралы понимаются в смысле Стилтьеса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из очевидного тождества
$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = (A(t_2)y(t_2), y(t_2)) - (A(t_1)y(t_1), y(t_1)) =$$
$$= ([A(t_2) - A(t_1)]y(t_2), y(t_2)) + (A(t_1)[y(t_2) - y(t_1)], y(t_2)) +$$
$$+ (A(t_1)y(t_1), y(t_2) - y(t_1))$$
легко получить, что функция $\varphi(t)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$.

Докажем теперь равенство (!). Отметим, что при этом мы будем пользоваться определением и некоторыми свойствами интеграла Стилтьеса от одной абстрактной функции по другой абстрактной функции, которые можно найти, например, в книге М.М. Вайнберга [3].

Пусть

$$M_1 = \max_{a \le t \le b} \|y(t)\|, \quad M_2 = \bigvee_a^b A(t).$$

Так как из сильной непрерывности на отрезке $[a, b]$ функции $y(t)$ следует ее равномерная непрерывность, то по любому заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из неравенства $|t^{''} - t^{'}| < \delta$ будет следовать неравенство $\|y(t^{''}) - y(t^{'})\| < \eta$, где $\eta = \varepsilon/(4M_1M_2)$.

Разделим теперь $[a, b]$ на части при помощи точек

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n < b \tag{1.0}$$

так, чтобы $\lambda = \max(t_{i+1} - t_i) < \delta$ и рассмотрим следующее равенство

$$\sum_{i=0}^{n-1}[(A(t_{i+1})y(t_{i+1}), y(t_{i+1})) - (A(t_i)y(t_i), y(t_i))] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}([A(t_{i+1}) - A(t_i)]y(t_{i+1}), y(t_{i+1}) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1}(A(t_i)[y(t_{i+1}) - y(t_i)], y(t_{i+1})) + \sum_{i=1}^{n-1}(A(t_i)y(t_i), y(t_{i+1}) - y(t_i)),$$

или в символической записи

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \tag{1.1}$$

Формально переходя к пределу в равенстве (1.1) при $\lambda \to 0$ получим формулу (!). Докажем теперь строго возможность такого предельного перехода.

Прежде всего, очевидно, что при любом разбиении (1.0) отрезка $[a, b]$ $\sum$ остается постоянной и равной $(A(t)y(t), y(t))\big|_a^b$. Очевидно так же, в силу наших предположений и теоремы существования интеграла Стилтьеса (см. [3]), что

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_3 = \int_a^b (A(t)y(t), dy(t)) = I_3.$$

Покажем, что

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_1 = \int_a^b([dA(t)]y(t), y(t)) = I_1.$$

Для этого рассмотрим следующую "интегральную" сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1}([A(t_{i+1}) - A(t_i)]y(\tau_i), y(\tau_i)), \tag{1.2}$$

где $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Если мы покажем, что при $\lambda \to 0$ существует предел интегральных сумм σ, не зависящий ни от способа разбиения $[a, b]$ на части, ни от выбора точек τ_i, то этот предел, по определению, и будет I_1. Разделим отрезок $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ на более мелкие части при помощи точек

$$t_i = t_{i,0} < t_{i,1} < ... < t_{i,k_i} = t_{i+1}$$

и составим новую интегральную сумму

$$\sigma' = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{k_i+1}([A(t_{i,\nu+1}) - A(t_{i,\nu})]y(\tau_{i,\nu}), y(\tau_{i,\nu})),$$

где $t_{i,\nu} \leq \tau_{i,\nu} \leq t_{i,\nu+1}$. В равенстве (1.2) заменим каждую разность $A(t_{i+1}) - A(t_i)$ через

$$\sum_{\nu=0}^{k_i-1}[A(t_{i,\nu+1}) - A(t_{i,\nu})]$$

и рассмотрим разность

$$\sigma - \sigma' = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{k_i-1}([A(t_{i,\nu+1}) - A(t_{i,\nu})]y(\tau_i), y(\tau_i)) -$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{k_i-1}([A(t_{i,\nu+1}) - A(t_{i,\nu})]y(\tau_{i,\nu}), y(\tau_{i,\nu}))$$

или, учитывая равенство

$$(Ay_2, y_2) - (Ay_1, y_1) = (Ay_2, y_2 - y_1) + (A(y_2 - y_1), y_1),$$

имеем

$$\sigma - \sigma' = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{k_i-1}([A(t_{i,\nu+1}) - A(t_{i,\nu})]y(\tau_i), y(\tau_i) - y(\tau_{i,\nu}))+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{k_i-1}([A(t_{i,\nu+1}) - A(t_{i,\nu})][y(\tau_i) - y(\tau_{i,\nu})], y(\tau_{i,\nu})).$$

Далее, так как для всякого ν $|\tau_i - \tau_{i,\nu}| < \delta$, то

$$\|y(\tau_i) - y(\tau_{i,\nu})\| < \eta.$$

Поэтому

$$|\sigma - \sigma'| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{k_i-1}\|A(t_{i,\nu+1}) - A(t_{i,\nu})\| \cdot \|y(\tau_i)\| \cdot \|y(\tau_i) - y(\tau_{i,\nu})\|+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{k_i-1}\|A(t_{i,\nu+1}) - A(t_{i,\nu})\| \cdot \|y(\tau_i) - y(\tau_{i,\nu})\| \cdot \|y(\tau_{i,\nu})\| <$$

$$< 2M_1\eta\bigvee_a^b A(t) = 2M_1M_2\eta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для любых двух разбиений (1.0), для которых $\lambda < \delta$, мы получим для соответствующих сумм σ' и σ'' неравенство

$$|\sigma' - \sigma''| \leq |\sigma - \sigma'| + |\sigma - \sigma''| < \varepsilon.$$

Разделим теперь отрезок $[a, b]$ на m $(m = 2, 3, ...)$ равных частей и для каждого m по формуле (1.2) построим определенную интегральную сумму σ_m. Последовательность чисел $\{\sigma_m\}$ будет фундаментальной, так как, по доказанному, каково бы ни было $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что для всякого $n \geq N(\varepsilon)$ и любого натурального P $|\sigma_n - \sigma_{n+p}| < \varepsilon$. Следовательно, последовательность $\{\sigma_m\}$ сходится к некоторому числу I_1'. Покажем, что $I_1' = I_1$. Действительно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число N, что для любого $n \geq N$

$$|I_1' - \sigma_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, заданному $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для всякого разбиения (1.0), для которого $\lambda < \delta$ будет

$$|\sigma - \sigma_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Как только $(b-a)/n < \delta$. Тогда

$$|\sigma - I_1'| \leq |\sigma - \sigma_n| + |\sigma_n - I_1'| < \varepsilon.$$

Значит,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I_1',$$

но по определению, $\lim \sigma = I_1$, поэтому $I_1' = I_1$. Положив теперь в формуле (1.2) $\tau_i = t_{i+1}$, получим, что $\sigma = \Sigma_1$, следовательно,

$$\lim_{\lambda \to 0} \Sigma_1 = I_1.$$

Аналогичным образом доказывается, что при $\lambda \to 0$ существует предел и интегральной суммы

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} (A(\tau_i)[y(t_{i+1}) - y(t_i)], y(\tau_i)). \tag{1.3}$$

Но тогда, по определению интеграла Стилтьеса

$$\lim_{\lambda \to 0} S = I_2 = \int_a^b (A(t)dy(t), y(t)).$$

Переходя в равенстве (1.1) к пределу при $\lambda \to 0$, мы получим, что существует и $\lim\limits_{\lambda \to 0} \Sigma_2$. Но, так как Σ_2 несколько отличается от вида интегральной суммы S, то может оказаться, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} \Sigma_2 \neq I_2$. Покажем, что этого не может быть. Для этого положим в (1.3) $\tau_i = t_{i+1}$ и покажем, что $S - \Sigma_2$ стремится к нулю при $\lambda \to 0$.

Так как $\lambda < \delta$, то

$$|S - \Sigma_2| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |(A(t_{i+1})[y(t_{i+1}) - y(t_i)], y(t_{i+1})) -$$

$$-(A(t_i)[y(t_{i+1}) - y(t_i)], y(t_{i+1}))| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|A(t_{i+1}) - A(t_i)\| \cdot \|y(t_{i+1}) - y(t_i)\| \cdot \|y(t_{i+1})\| <$$

$$< M_1 \eta \bigvee_a^b A(t) = M_1 M_2 \eta = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Значит,

$$\lim_{\lambda \to 0} \Sigma_2 = \lim_{\lambda \to 0} S = I_2.$$

Лемма доказана.

Сформулируем еще одну известную лемму, которая нам будет часто нужна.

ЛЕММА 1.6. (см. например, [14]). Если две непрерывные неотрицательные функции $u(t)$ и $v(t)$, заданные при всех $t \geq t_0$ удовлетворяют интегральному неравенству

$$u(t) \leq c_0 + \int_{t_0}^{t} V(\tau) U(\tau) d\tau, \;\; t \geq t_0,$$

где $c_0 = const \geq 0$, то для всех $t \geq t_0$

$$u(t) \leq c_0 exp\Big[\int_{t_0}^{t} V(\tau) d\tau\Big].$$

3. Пусть Y — комплексное банахово пространство, норму в котором будем обозначать $\| \;\|$. Будем также рассматривать пространство $\widetilde{Y} = Y \times Y$ — топологическое произведение пространства Y само на себя. Элементы $\widetilde{Y}$ будем обозначать в виде $\widetilde{u}$, $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$. Если u_1, $u_2 \in Y$, то соответствующий им элемент $\widetilde{u} \in \widetilde{Y}$ будем записывать в виде вектора-столбца

$$\widetilde{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Норму в $\widetilde{Y}$ определим по формуле

$$\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{Y}} = \|u_1\| + \|u_2\|.$$

Пусть B — некоторый оператор, действующий в Y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Будем говорить, что оператор B обладает свойством (ω, M), если выполнены условия:

1) B — замкнутый линейный оператор с плотной в Y областью определения $D(B)$.

2) резольвента $R(\lambda, B) = (\lambda I - B)^{-1}$ оператора B удовлетворяет неравенствам:

$$\|R(\lambda, B)^n\| \leq \frac{M}{(|\lambda| - \omega)^n} \quad (n = 1, 2, ...)$$

для всех действительных λ и $|\lambda| > \omega$, где $M > 0$, $\omega \geq 0$ — некоторые постоянные.

При выполнении этих двух условий оператор B порождает в Y сильно непрерывную группу ограниченных операторов $T(t)$, $-\infty < t < \infty$, причем $\|T(t)\| \leq Me^{-\omega|t|}$ (см. [2]).

ЛЕММА 1.7. Если оператор B действует в Y и обладает свойством (ω, M), то оператор-матрица

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

действует в пространстве $\widetilde{Y}$ и обладает свойством $(\omega, 2M)$, причем группа ограниченных операторов $\widetilde{T}(t)$, $-\infty < t < \infty$, порождаемая оператором $\widetilde{B}$ в $\widetilde{Y}$ представима в виде

$$\widetilde{T}(t) = \begin{pmatrix} c(t) & S(t) \\ S(t) & c(t) \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где операторные функции $c(t)$ и $S(t)$ определяются по формулам

$$c(t) = \frac{1}{2}[T(t) + T(-t)],$$

$$S(t) = \frac{1}{2}[T(t) - T(-t)]. \tag{1.6}$$

Отметим, что близкое предложение содержится в работе [11].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейность, замкнутость и плотность области определения $D(\widetilde{B}) = D(B) \times D(B)$ оператора $\widetilde{B}$ в пространстве $\widetilde{Y}$ доказываются непосредственно, исходя из определений этих понятий и формулы (1.4). Прежде чем перейти к доказательству других утверждений леммы, отметим некоторые свойства операторных функций $c(t)$ и $S(t)$, которые непосредственно вытекают из свойств группы $T(t)$ [2] и формул (1.6).

1) Операторные функции $c(t)$ и $S(t)$ сильно непрерывны на $(-\infty, \infty)$, причем

$$c(0) = I, \;\; S(0) = 0.$$

2) Для любого $x \in D(B)$ функции $c(t)x$ и $S(t)x$ сильно непрерывно дифференцируемы на $(-\infty, \infty)$ и

$$c^{'}(t)x = BS(t)x = S(t)Bx,$$

$$S^{'}(t)x = Bc(t)x = c(t)Bx.$$

3) $c(-t) = c(t) : \;\; s(-t) = -S(t)$ для любого t.

4) Для любых $t, \; \tau \in (-\infty, \infty)$ справедливы тождества

$$c(t+\tau) = c(t)c(\tau) + S(t)S(\tau);$$

$$S(t+\tau) = c(t)S(\tau) + S(t)c(\tau);$$

$$c^2(t) - S^2(t) = I.$$

5) $\|c(t)\| \leq Me^{\omega|t|}, \;\; \|S(t)\| \leq Me^{\omega|t|}, \;\; -\infty < t < \infty.$

Покажем теперь, что резольвента оператора $\widetilde{B}$ удовлетворяет неравенствам

$$\|\widetilde{R}(\lambda, \widetilde{B})^n\| \leq \frac{2M}{(|\lambda| - \omega)^n} \;\; (n = 1, 2, ...). \tag{1.7}$$

Для этого, достаточно убедиться в том, что $\widetilde{T}(t)$ есть сильно непрерывная группа, $\widetilde{B}$ является производящим оператором этой группы и что $\|\widetilde{T}(t)\| \leq 2Me^{\omega|t|} \quad (-\infty < t < \infty)$. (см., например, [2], теорему 12.3.2).

Из представления (1.5) и свойства 1) операторов $c(t)$ и $S(t)$ легко видеть, что $\widetilde{T}(t)$ сильно непрерывна на $(-\infty, \infty)$ и что

$$\widetilde{T}(0)\widetilde{u} = \widetilde{u} \ \text{ для всех } \ \widetilde{u} \in \widetilde{Y}.$$

Из свойств 4) операторов $c(t)$ и $S(t)$ следует, что для любых $t, \tau \in (-\infty, \infty)$, $\widetilde{T}(t)\widetilde{T}(\tau) = \widetilde{T}(t+\tau)$.

В самом деле,

$$\widetilde{T}(t)\widetilde{T}(\tau) = \begin{pmatrix} c(t) & S(t) \\ S(t) & c(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\tau) & S(\tau) \\ S(\tau) & c(\tau) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c(t)c(\tau) + S(t)S(\tau) & c(t)S(\tau) + S(t)c(\tau) \\ S(t)c(\tau) + c(t)S(\tau) & S(t)S(\tau) + c(t)c(\tau) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c(t+\tau) & S(t+\tau) \\ S(t+\tau) & c(t+\tau) \end{pmatrix} = \widetilde{T}(t+\tau).$$

Пусть теперь $\tau = -t$. Тогда

$$\widetilde{T}(t)\widetilde{T}(-t) = \widetilde{T}(-t)\widetilde{T}(t) = \widetilde{I},$$

где $\widetilde{I} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ — единичный оператор в $\widetilde{Y}$.

Отсюда следует, что $\widetilde{T}(t)$ имеет обратный и что

$$\widetilde{T}^{-1}(t) = \widetilde{T}(-t).$$

Таким образом, семейство операторов $\widetilde{T}(t)$, $-\infty < t < \infty$, образует группу ограниченных операторов в $\widetilde{Y}$.

Покажем, что производящим оператором этой группы является именно оператор $\widetilde{B}$. Пусть $\widetilde{u} \in D(\widetilde{B}) = D(B) \times D(B)$, где

$$\widetilde{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u_1, u_2 \in D(B).$$

Тогда в силу свойств 1) и 2) операторов $c(t)$ и $S(t)$ имеем:

$$\lim_{h\to 0}\widetilde{B}_h\widetilde{u} = \lim_{h\to 0}\frac{\widetilde{T}(h)\widetilde{u}-\widetilde{u}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\begin{pmatrix} c(h) & S(h) \\ S(h) & c(h)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\to 0}\frac{c(h)-c(0)}{h}u_1 + \lim\limits_{h\to 0}\frac{S(h)-S(0)}{h}u_2 \\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{S(h)-S(0)}{h}u_1 + \lim\limits_{h\to 0}\frac{c(h)-c(0)}{h}u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c'(0)u_1 + S'(0)u_2 \\ S'(0)u_1 + c'(0)u_2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B & u_2 \\ B & u_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2\end{pmatrix},$$

откуда

$$\lim_{h\to 0}\widetilde{B}_h\widetilde{u} = \widetilde{B}\widetilde{u}.$$

Следовательно, $\widetilde{B}$ — производящий оператор группы $\widetilde{T}(t)$. Оценим теперь норму оператора $\widetilde{T}(t)$. Для любого $\widetilde{u}\in\widetilde{Y}$ имеем

$$\|\widetilde{T}(t)\widetilde{u}\|_{\widetilde{Y}} = \left\|\begin{pmatrix} c(t) & S(t) \\ S(t) & c(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2\end{pmatrix}\right\|_{\widetilde{Y}} = \left\|\begin{pmatrix} c(t)u_1 + S(t)u_2 \\ S(t)u_1 + c(t)u_2\end{pmatrix}\right\|_{\widetilde{Y}} =$$

$$= \|c(t)u_1 + S(t)u_2\| + \|S(t)u_1 + c(t)u_2\|.$$

Отсюда, в силу свойства 5) операторов $c(t)$ и $S(t)$ получаем, что

$$\|\widetilde{T}(t)\widetilde{u}\|_{\widetilde{Y}} \le 2Me^{\omega|t|}\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{Y}} \quad (-\infty < t < \infty),$$

следовательно, $\|\widetilde{T}(t)\| \le 2Me^{\omega|t|}$.

Воспользовавшись теперь представлением резольвенты через $\widetilde{T}(t)$

$$\widetilde{R}(\lambda,\widetilde{B})_{\widetilde{u}} = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-\lambda S}\widetilde{T}(S)\widetilde{u}dS, & \lambda > \omega, \\ -\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda S}\widetilde{T}(S)\widetilde{u}dS, & \lambda < -\omega, \end{cases}$$

можно убедиться в справедливости неравенства (1.7) точно так же, как это делается в [2]. Тем самым, лемма 1.7 доказана полностью.

Заметим, что резольвента оператора $\widetilde{B}$ выражается через резольвенту оператора B по формуле

$$\widetilde{R}(\lambda,\widetilde{B}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} R(\lambda,B) - R(-\lambda,B) & R(\lambda,B) + R(-\lambda,B) \\ R(\lambda,B) + R(-\lambda,B) & R(\lambda,B) - R(-\lambda,B)\end{pmatrix}.$$

4. Рассмотрим в банаховом пространстве Y следующую задачу Коши

$$y^{''}(t) + Ay(t) = f(t), \;\; t \in J, \tag{1.8}$$

$$y(0) = y_0, \;\; y^{'}(0) = y^{'}_0, \tag{1.9}$$

где $f(t)$ — заданная, а $y(t)$ — неизвестная функции со значениями в Y, A — линейный оператор в Y, y_0 и y'_0 — заданные элементы из Y, J — некоторый промежуток числовой оси, содержащий число 0.

В этом пункте мы приведем некоторые теоремы существования и единственности решения задачи (1.8)-(1.9). Будем предполагать, что существует некоторый оператор B такой, что $A = -B^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Решением задачи (1.8)-(1.9) будем называть функцию $y(t)$, определенную на J и со значениями в Y, которая обладает следующими свойствами:

1). $y(t)$ — дважды сильно непрерывно дифференцируема на J;

2). каково бы ни было $t \in J$ $\;y(t) \in D(A)$, $\;y^{'}(t) \in D(B)$ и функции $Ay(t)$ и $By^{'}(t)$ сильно непрерывны на J;

3). $y(t)$ удовлетворяет уравнению (1.8) при всех $t \in J$ и начальным условиям (1.9) при $t = 0$ в том смысле, что

$$\lim_{t\to 0} \|y(t) - y_0\| = 0, \quad \lim_{t\to 0} \|y^{'}(t) - y^{'}_0\| = 0.$$

В случае $f(t) \equiv 0$ имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1.1. (Э.Хилле, Р.Филлипс, [2]).

Если выполнены условия:

1) Оператор B обладает свойством (ω, M).

2) $y_0 \in D(A)$, $\;y^{'}_0 \in D(B) \cap R(B)$, $\;(R(B)$ — область значений оператора $B)$, то задача (1.8)-(1.9) имеет единственное решение на $J = (-\infty, \infty)$, которое можно представить в виде

$$y(t) = c(t)y_0 + S(t)z_1, \tag{1.10}$$

где z_1 удовлетворяет условию $Bz_1 = y^{'}_0$.

В случае $f(t) \not\equiv 0$ и $J = [0, \infty)$ имеет место

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполнены следующие условия:

1) Оператор B обладает свойством (ω, M).

2) $y_0 \in D(A)$, $y_0^{'} \in D(B) \cap R(B)$.

3) Функция $f(t)$ сильно непрерывна на $[0, \infty)$ и значения ее принадлежат множеству $D(B) \cap R(B)$; функция $Bf(t)$ интегрируема по Бохнеру на любом отрезке $[0, l]$, где $l > 0$.

4) Существует такая сильно непрерывная на $[0, \infty)$ функция $\varphi(t)$, что $B\varphi(t) = f(t)$.

Тогда задача (1.8)-(1.9) имеет единственное решение $y(t)$, которое можно представить в виде

$$y(t) = c(t)y_0 + S(t)z_1 + \int_0^t S(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau, \tag{1.11}$$

где z_1 удовлетворяет условию $Bz_1 = y_0^{'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y(t) = u(t) + v(t)$, где

$$u(t) = c(t)y_0 + S(t)z_1,$$

$$v(t) = \int_0^t S(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau. \tag{1.12}$$

В силу теоремы 1.1, функция $u(t)$ удовлетворяет однородному уравнению $y''(t) + Ay(t) = 0$ и начальным условиям (1.9). Покажем теперь, что $v(t)$ удовлетворяет уравнению (1.8) и нулевым начальным условиям $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$. Очевидно, что $v(0) = 0$.

Дважды дифференцируя по t под знаком интеграла, что законно в силу предположений 3) и 4) теоремы, получим

$$v'(t) = \int_0^t c(t-\tau)B\varphi(\tau)d\tau = \int_0^t c(t-\tau)f(\tau)d\tau;$$

$$v''(t) = f(t) + \int_0^t S(t-\tau)Bf(\tau)d\tau \qquad (\alpha).$$

Теперь видно, что $v'(0) = 0$ и что $v''(t)$ — непрерывна на $[0, \infty)$. Покажем, что при любом $t \in [0, \infty)$ $v(t) \in D(A)$. Для этого разделим отрезок $[0, t]$ на части точками

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$$

и составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} S(t - \tau_i)\varphi(\tau_i)(t_i - t_{i-1}), \;\; t_{i-1} \le \tau_i \le t_i.$$

Ясно, что $\sigma_n \in D(A)$

$$\text{и что} \quad \lim_{\lambda \to 0} \sigma_n = v(t) = \int_0^t S(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau, \;\; \text{где} \;\; \lambda = \max_i (t_i - t_{i-1}).$$

Далее, из интегрируемости функции $Bf(t)$ на $[0, t]$ следует, что при $\lambda \to 0$ существует предел интегральной суммы

$$A\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} AS(t - \tau_i)\varphi(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = -\sum_{i=1}^{n} S(t - \tau_i)Bf(\tau_i)(t_i - t_{i-1}),$$

причем

$$\lim_{\lambda \to 0} A\sigma_n = -\int_0^t S(t - \tau)Bf(\tau)d\tau.$$

Но так как оператор A замкнут, то $v(t) \in D(A)$ и

$$Av(t) = -\int_0^t S(t - \tau)Bf(\tau)d\tau, \;\; t \ge 0. \tag{β}$$

Аналогично устанавливается, что $v'(t) \in D(B)$ и что

$$Bv'(t) = \int_0^t c(t - \tau)Bf(\tau)d\tau.$$

Очевидно, что $Av(t)$ и $Bv'(t)$ сильно непрерывна на $[0, \infty)$.

Складывая теперь почленно (α) и (β), имеем

$$v''(t) + Av(t) = f(t).$$

Тем самым существование решения доказано.

Единственность непосредственно следует из теоремы 1.1. Теорема доказана.

Отметим, что при более слабых предположениях на функцию $f(t)$ сформулирована аналогичная теорема в работе С.Я. Якубова [11]. Сформулируем ее.

ТЕОРЕМА 1.3. [11] Пусть выполнены условия 1), 2) и 4) теоремы 1.2 и пусть функция $f(t)$ сильно непрерывно дифференцируема на $[0, \infty)$. Тогда решение задачи (1.8)-(1.9) существует, единственно и дается формулой (1.11).

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство предыдущей теоремы, при этом существенно используется следующая лемма, которая близка к лемме 6.1 из [6].

ЛЕММА 1.8. Пусть $T(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — группа линейных ограниченных операторов в Y, порождаемая оператором B. Тогда, если $f(t)$ — сильно непрерывно дифференцируема на $[0, \infty)$, то сильно дифференцируема и функция

$$g(t) = \int_0^t c(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t c(\tau)f(t-\tau)d\tau,$$

где $c(t) = \frac{1}{2}[T(t) + T(-t)]$. При этом

$$g^{'}(t) = c(t)f(0) + \int_0^t c(t-\tau)f^{'}(\tau)d\tau = f(t) + B\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сильная дифференцируемость функции $g(t)$ следует из того, что функции $c(\tau)f(t-\tau)$ и $c(\tau)f'(t-\tau)$ — сильно непрерывны по $\tau \in [0, t]$, а, следовательно, существует

$$\int_0^t c(t-\tau)f'(\tau)d\tau = \int_0^t c(\tau)f'(t-\tau)d\tau.$$

При этом, очевидно, что

$$g'(t) = c(t)f(0) + \int_0^t c(t-\tau)f'(\tau)d\tau.$$

Далее, представим $g(t)$ в виде:

$$g(t) = \frac{1}{2}\int_0^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t T(\tau-t)f(\tau)d\tau.$$

По лемме 6.1 [6] функция $u(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau$ сильно дифференцируема и

$$u^{'}(t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}B\int_0^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Следовательно, сильно дифференцируема и функция

$$v(t) = \frac{1}{2}\int_0^t T(\tau - t)f(\tau)d\tau.$$

Найдем ее производную. Имеем:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t}\left\{ \int\limits_0^{t+\Delta t} T(\tau - t - \Delta t)f(\tau)d\tau - \int\limits_0^t T(\tau - t)f(\tau)d\tau \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\Delta t}\left\{ \int\limits_0^t [T(\tau - t - \Delta t) - T(\tau - t)]f(\tau)d\tau + \int\limits_t^{t+\Delta t} T(\tau - t - \Delta t)f(\tau)d\tau \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ -\frac{T(-\Delta t) - I}{-\Delta t}\int\limits_0^t T(\tau - t)f(\tau)d\tau + \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} T(\tau - t - \Delta t)f(\tau)d\tau \right\}.$$

Легко показать, что (при $t \leq 0$ полагаем $f(t) \equiv 0$)

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} T(\tau - \Delta t - t)f(\tau)d\tau = f(t).$$

Теперь из существования $v'(t)$ следует, что при всех $t \geq 0$ $\int\limits_0^t T(\tau - t)f(\tau)d\tau \in D(B)$. Таким образом, получаем, что

$$v'(t) = \frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{2}B\int_0^t T(\tau - t)f(\tau)d\tau.$$

Тогда

$$g'(t) = u'(t) + v'(t) = f(t) + B\int_0^t \frac{1}{2}[T(t-\tau) - T(\tau - t)]f(\tau)d\tau =$$

$$= f(t) + B\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Лемма 1.8 доказана.

5. В приложениях мы часто будем пользоваться следующими общепринятыми обозначениями.

Пусть Ω — некоторая область n-мерного эвклидова пространства. Тогда $L_2(\Omega)$ — гильбертово пространство действительных (комплекснозначных) функций $v(x)$, суммируемых по области Ω в квадрате, при этом скалярное произведение и норма определяются по формулам

$$(v,u)=\int_\Omega v(x)u(x)dx, \quad \|u\|_{L_2}=\left(\int_\Omega u^2(x)dx\right)^{1/2},$$

$$\left((v,u)=\int_\Omega v(x)\overline{u}(x)dx, \quad \|u\|_{L_2}=\left(\int_\Omega |u(x)|^2dx\right)^{1/2}\right).$$

$W_2^k(\Omega)$ — пространство С.Л. Соболева, состоящее из функций, имеющих обобщенные производные по x_i до k-го порядка включительно из $L_2(\Omega)$, со скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^k(\Omega)}=\int_\Omega\sum_{S=0}^{k}\sum_{(S)}\left(\frac{\partial^S u(x)}{\partial x_1^{S_1}..\partial x_n^{S_n}}\cdot\frac{\partial^S \overline{v}(x)}{\partial x_1^{S_1}..\partial x_n^{S_n}}\right)dx$$

и нормой (для $k=1$)

$$\|u\|^2_{W_2'(\Omega)}=\int_\Omega\left(|u(x)|^2+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2\right)dx.$$

$W_2^K(\Omega)$ — множество функций из $W_2^K(\Omega)$, обращающихся (в среднем) в нуль на границе Γ области Ω.

§2. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $y'' + A(t)y = 0$ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1. Случай уравнения с постоянным оператором

В этом пункте мы будем изучать вопрос об ограниченности на $(-\infty, \infty)$ решений следующего уравнения

$$y''(t) + Ay(t) = 0 \tag{2.1}$$

при начальных условиях (1.9) в комплексном банаховом пространстве Y. Здесь A — постоянный оператор, действующий в Y, $y = y(t)$ — функция со значениями в Y. Уравнение (2.1) в банаховом пространстве, по-видимому, впервые рассматривал М.Г. Крейн [1], когда A — ограниченный линейный оператор и сформулировал необходимое и достаточное условие ограниченности всех решений на всей оси. При этом на начальные данные не накладывались никакие ограничения в силу предположения ограниченности как самого оператора A, так и его обратного A^{-1}. Здесь мы рассматриваем случай, когда A — неограниченный оператор и, вообще говоря, необратимый, в силу чего приходится накладывать ограничения не только на оператор A, но и на начальные данные y_0 и y_0'.

Условие на оператор A :

Оператор A представим в виде $A = -B^2$, где оператор B обладает свойством $(0, M).\Big|(M)$. (Минус перед B^2 поставлен лишь для удобства.)

При этом, если $y_0 \in D(A)$, $\;y_0' \in D(B) \cap R(B)$, то по теореме 1.1. задача (2.1)-(1.9) имеет единственное решение $y(t)$ на $(-\infty, \infty)$, причем

$$y(t) = C(t)y_0 + S(t)z_1, \;\; (Bz_1 = y_0'). \tag{2.2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Если $y(t)$ — сильно непрерывно дифференцируемая на $(-\infty, \infty)$ функция со значениями в $D(B)$, представима в виде (2.2), то будем ее называть обобщенным решением уравнения (2.1).

Ясно, что любое «обычное»решение (см. определение 1.6) является обобщенным. Однако, не всякое обобщенное решение есть «обычное». Например, если $y_0 \in D(B)$, $y_0^{'} \in R(B)$, то функция (2.2) есть обобщенное решение, но, вообще говоря, не является «обычным»решением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть U и V — некоторые множества из Y. Будем говорить, что сильно непрерывно дифференцируемая функция $y(t)$ со значениями в Y выходит из множества $U \times V$, если $y(0) \in U$, $y^{'}(0) \in V$.

Из определения 2.1 и свойств оператор-функций $C(t)$ и $S(t)$ непосредственно вытекает следующее предложение.

Если оператор A удовлетворяет условию (M), то все обобщенные решения $y(t)$ уравнения (2.1), выходящие из $D(B) \times R(B)$, ограничены на всей оси вместе с первой производной в норме Y, а нулевое решение уравнения (2.1) устойчиво в норме (K)

$$\|y(t)\|_B = \|y^{'}(t)\| + \|By(t)\|. \tag{2.3}$$

Утверждение непосредственно следует из того, что

$$\|c(t)\| \leq M, \|S(t)\| \leq M \quad (-\infty < t < \infty)$$

в силу условия (M), а, следовательно,

$$\|y(t)\| \leq M(\|y_0\| + \|z_1\|), \quad \|y^{'}(t)\| \leq M(\|By_0\| + \|y_0^{'}\|)$$

$$\text{и} \quad \|y(t)\|_B \leq 2M\|y(0)\|_B \text{ для всех } t \in (-\infty, \infty).$$

Отметим, что условие $y_0^{'} \in R(B)$ является существенным так как если $y_0^{'} \bar{\in} R(B)$, то уравнение (2.1) может иметь неограниченные решения. Например, если A — матрица второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то $R(A) = R(B)$ есть множество двумерных векторов, первая координата которых равна нулю. Если взять $y_0 = (0,0)$, $y_0' = (1,0)\bar{\in} R(B)$, то уравнение (2.1) имеет неограниченное решение $y(t) = ty_0'$.

В случае, когда $Y = H$ — комплексное гильбертово пространство, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Если A — самосопряженный оператор, действующий в H, то все обобщенные решения уравнения (2.1), выходящие из $D(A^{\frac{1}{2}}) \times R(A^{\frac{1}{2}})$, ограничены на всей оси $-\infty < t < \infty$ вместе с первой производной тогда и только тогда, когда $(Ah, h) \geq 0$ для всех $h \in D(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность непосредственно вытекает из предложения (K). В самом деле, пусть $(Ah, h) \geq 0$, $h \in D(A)$. Тогда оператор A допускает представление $A = -(iA^{\frac{1}{2}})$, где $A^{\frac{1}{2}}$ — положительный квадратный корень из A и в силу самосопряженности оператора $A^{\frac{1}{2}}$, оператор $B = iA^{\frac{1}{2}}$ обладает свойством (0.1).

Отметим, что здесь имеет место оценка

$$\|y'(t)\| + \|A^{\frac{1}{2}}y(t)\| \leq \|y_0'\| + \|A^{\frac{1}{2}}y_0\|, \quad -\infty < t < \infty, \tag{2.4}$$

откуда следует устойчивость нулевого решения уравнения (2.1) в норме $\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}} = \|y'(t)\| + \|A^{\frac{1}{2}}y(t)\|$. Если же существует обратный оператор A^{-1}, то

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\| + \|A^{-\frac{1}{2}}y_0'\|. \tag{2.5}$$

Для доказательства необходимости предположим, что для некоторых $h \in D(A)$, $h \neq 0$, $(Ah, h) < 0$.

Покажем, что в этом случае уравнение (2.1) имеет неограниченные решения. Пусть $\sigma_-(A)$ — отрицательная часть спектра A, тогда

$\sigma_-(A) \neq \emptyset$ ($\emptyset$ — пустое множество). Рассмотрим сужение A_1 оператора A на подпространство $H_1 = (\varepsilon_{\lambda_1} - \varepsilon_{\lambda_0})H$, где ε_λ — спектральная функция оператора A, а числа λ_0 и λ_1 $(-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < 0)$ выбраны таким образом, что спектр оператора A_1 не пуст. Ясно, что A_1 — самосопряженный ограниченный оператор и $(A_1 h, h) < 0$ для всех $h \in H_1$, $h \neq 0$.

Рассмотрим в пространстве H_1 уравнение

$$y''(t) + A_1 y(t) = 0. \tag{$*$}$$

Очевидно, что любое решение уравнения $(*)$ удовлетворяет уравнению (2.1). Обозначим $-A_1$ через C. Так как C и C^{-1} ограниченные, самосопряженные и положительно определенные операторы в H_1, то любое решение уравнения $(*)$ можно представить в виде

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[e^{tc^{\frac{1}{2}}}\left(y_0 + c^{-\frac{1}{2}}y_0'\right) + e^{-tc^{\frac{1}{2}}}\left(y_0 - c^{-\frac{1}{2}}y_0'\right)\right],$$

где y_0 и y_0' — произвольные элементы из H_1. Положив $y_0 = c^{-\frac{1}{2}}y_0' \neq 0$, получим

$$y(t) = e^{tc^{\frac{1}{2}}}y_0,$$

откуда

$$\|y(t)\|^2 = \|e^{tc^{\frac{1}{2}}}y_0\|^2 = \int_{-\lambda_1-0}^{-\lambda_0} e^{2t\sqrt{\lambda}}d\|F_\lambda y_0\|^2 \geq e^{2t\sqrt{-\lambda_1}}\|y_0\|^2, \ \ (t \geq 0),$$

где F_λ — спектральная функция оператора C. Отсюда следует, что

$$\|y(t)\| \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если оператор A представим в виде

$$A = S^{-1}BS,$$

где S и S^{-1} — линейно ограниченные операторы в H, а B — самосопряженный оператор в H, то любое обобщенное решение уравнения

(2.1), определяемое начальными данными $y_0, \quad y_0' \in H$ такими, что $Sy_0 \in D(B^{\frac{1}{2}})$, $Sy_0' \in R(B^{\frac{1}{2}})$, ограничено на всей оси вместе с первой производной тогда и только тогда, когда $(Bh, h) \geq 0$ для всех $h \in D(B)$ $(D(B) = \{h \in H, S^{-1}h \in D(A)\})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. При доказательстве необходимости условия теоремы 1.1. A — является произвольным самосопряженным оператором в H и поэтому требует пояснения, что понимать под $A^{\frac{1}{2}}$. Под $A^{\frac{1}{2}}$ можно понимать, вообще говоря, любой линейный оператор в H, квадрат которого равен A. Например, его можно определить следующим образом.

Пусть E_λ — спектральная функция оператора A, непрерывная справа и пусть $H_1 = (J - E_{-0})H, \quad H_2 = E_{-0}H$. Тогда, очевидно, что ортогональная сумма подпространств H_1 и H_2 дает все $H: \ H = H_1 \oplus H_2$ и что подпространства H_1 и H_2 приводят оператор A.

Пусть A_+ и $(-A_-)$ — операторы, индуцируемые оператором A в H_1 и H_2. Ясно, что A_+ и A_- — неотрицательные операторы, области определения которых, соответственно, есть $D(A_+) = D(A) \cap H_1$ и $D(A_-) = D(A) \cap H_2$, при этом $(A_+x, x) \geq 0$ для всех $x \in D(A_+)$, а $(-A_-x, x) < 0$ для всех $x \in D(A_-)$ и $x \neq 0$. Если $x \in D(A)$, то имеем

$$Ax = A_+x_1 - A_-x_2,$$

где $x_1 = (J - E_{-0})x, \ \ x_2 = E_{-0}x$.

Квадратный корень из оператора A определим теперь по формуле

$$A^{\frac{1}{2}}x = A_+^{\frac{1}{2}}x_1 + iA_-^{\frac{1}{2}}x_2,$$

где $x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in D(A_+^{\frac{1}{2}}), \quad x_2 = D(A_-^{\frac{1}{2}})$. Ясно, что $D(A^{\frac{1}{2}}) = D(A_+^{\frac{1}{2}}) \oplus D(A_-^{\frac{1}{2}})$.

Легко проверить, что если $x \in D(A)$, то $A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}x = Ax$.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $H = L_2(\Omega)$, где Ω — ограниченная область n-мерного $(n \geq 2)$ эвклидова пространства $R^{(n)}$ с достаточно гладкой границей Г. Будем считать, что функции из $L_2(\Omega)$ комплекснозначные. Рассмотрим в $L_2(\Omega)$ гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + a(x)u, \tag{2.6}$$

где

$$a_{i,j} = \overline{a}_{ji}, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_j\overline{\xi}_i \geq \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2, \quad \alpha^2 = const > 0, \quad a(x) \geq 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Известно, что оператор A порожденный дифференциальным выражением

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + au$$

и граничным условием

$$u|_{\Gamma} = 0$$

является самосопряженным, если функции $a_{ij}(x)$, $\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_k}$, $a(x)$ ограничены и измеримы в Ω, а $D(A) = W_2^2(\Omega)$ (см. [5 б]). При этом, в силу неравенства Фридрихса

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq c \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2, \quad u(x) \in W_2'(\Omega),$$

где c — постоянная, зависящая лишь от меры области Ω, получаем, что для всех $u \in D(A)$ оператор A удовлетворяет условию положительной определенности:

$$(Au, u) = \|A^{\frac{1}{2}}u\|^2_{L_2} = \int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_j} + a(x)|u|^2\right)dx \geq$$

$$\geq \alpha^2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \geq \gamma^2 \|u\|^2_{L_2}, \ (\gamma^2 = \frac{\alpha^2}{c}). \tag{2.7}$$

Далее, из неравенства

$$\|u\|^2_{W_2'} \equiv \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \leq (c+1) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx$$

следует, что

$$(Au,u)=\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2\geq \alpha^2\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2dx\geq c_0^2\|u\|^2_{W_2'},\ \ (c_0^2=\frac{\alpha^2}{c+1}). \tag{2.8}$$

Из последнего неравенства и теорем вложения С.Л. Соболева [4] получаем, что областью определения оператора $A^{\frac{1}{2}}$ является все $W_2'(\Omega)$.

Пусть теперь функция $u(t,x)$, определенная в бесконечном цилиндре $Q=\overline{\Omega}x(-\infty,\infty)$, удовлетворяет уравнению (2.6), граничному условию

$$u(t,x)|_{x\in\Gamma}=0\ \ (-\infty<t<\infty)$$

и начальным условиям

$$u(0,x)=\varphi(x)\in W_2'(\Omega),\ \ u_t'(0,x)=\psi(x)\in L_2(\Omega).$$

Тогда по теореме 2.1. (см. (2.4)) получаем оценку

$$\|u_t'(t,x)\|_{L_2(\Omega)}+\|A^{\frac{1}{2}}u\|_{L_2}\leq\|\psi\|_{L_2}+\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\|_{L_2}. \tag{2.9}$$

Пусть

$$c_1^2=max\{\sup_x a(x),\ \ \sup_x(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}(x)|^2)^{1/2}\}.$$

Тогда

$$\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2\leq\int\limits_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}(x)|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right|+a(x)|\varphi|^2\right)dx\leq$$

$$\leq\int\limits_\Omega\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^2+a(x)|\varphi|^2\right\}dx\leq c_1^2\|\varphi\|^2_{W_2^1(\Omega)}.$$

Учитывая последнее неравенство и неравенство (2.8), из (2.9) получим

$$\|u_t'\|_{L_2}+c_0\|u\|_{W_2'}\leq\|\psi\|_{L_2}+c_1\|\varphi\|_{W_2'},$$

или

$$\|u_t'\|_{L_2}+\|u\|_{W_2'}\leq c_2(\|\psi\|_{L_2}+\|\varphi\|_{W_2'}), \tag{2.10}$$

где постоянная c_2 зависит лишь от c_0 и c_1.

Из оценки (2.10) следует, что $u(t,x)$, $u'_{x_i}(t,x)$, $(i=1,2,...)$ и $u'_t(t,x)$ ограничены на всей оси $(-\infty,\infty)$ в норме $L_2(\Omega)$ и что нулевое решение уравнения (2.6) устойчиво в норме $\|u'_t\|_{L_2}+\|u\|_{W'_2}$, то есть для любого $\varepsilon>0$

$$\|u'_t\|_{L_2}+\|u\|_{W'_2}<\varepsilon \ \text{ для всех } \ t\in(-\infty,\infty),$$

как только начальные функции удовлетворяют условию

$$\|\psi\|_{L_2}+\|\varphi\|_{W'_2}<\delta(\varepsilon) \ \ (0<\delta(\varepsilon)\le\varepsilon c_2^{-1}).$$

Отметим, что этот же результат имеется в книге О.А. Ладыженской "Смешанные задачи для гиперболических уравнений", полученный другим методом.

Заметим также, что теорему 2.1. можно применить для исследования решений уравнения (2.6) и при других однородных граничных условиях. Например, можно поставить следующее граничное условие

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}cos(n,x_i)+\sigma(x)u|_\Gamma=0,$$

где $\sigma(x)\ge0$ — ограниченная измеримая функция на Γ.

2. Случай уравнения с переменным оператором

В этом пункте мы докажем некоторые теоремы об ограниченности решений при $t\to+\infty$ задачи Коши для уравнения

$$y''+A(t)y=0, \ \ 0<t<\infty \tag{2.11}$$

в комплексном гильбертовом пространстве H. Здесь $A(t)$ — при каждом $t\ge0$ линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в H, $y(t)$ — функция со значениями в H. Предположим, что $A(t)=S^2(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Под решением задачи (2.11)-(1.9) мы будем понимать функцию $y(t)$, обладающую следующими свойствами:

1) Существуют и сильно непрерывны $y'(t)$ и $y''(t)$, соответственно, при всех $t \geq 0$ и $t > 0$.

2) $y(t) \in D(A(t))$ для $t > 0$, $\; y'(t) \in D(S(t))$ для всех $t \geq 0$ и для соответствующих значений t функции $A(t)y(t)$ и $S(t)y'(t)$ сильно непрерывны.

3) $y(t)$ удовлетворяет уравнению (2.11) и начальным условиям (1.9).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть при каждом $t \geq 0$ $\; A(t)$ — самосопряженный оператор в H, удовлетворяющий условиям:

1) Область определения $D(A)$ и область значений $R(A)$ оператора $A(t)$ не зависят от t.

2) $(A(t)h, h) > 0$ для всех $h \in D(A)$, $\; h \neq 0$ и $t \geq 0$

3) Операторные функции $A(t)$ и $A^{-1}(t)$ сильно дифференцируемы по $t \in [0, \infty)$, соответственно, на $D(A)$ и $R(A)$ и при любых $t \geq 0$ и $x \in R(A)$ $\; [A^{-1}(t)]'x \in D(A)$.

4) $(A'(t)h, h) \geq -\alpha(t)(A(t)h, h)$ для всех $t \geq 0$ и $h \in D(A)$, где $\alpha(t)$ — некоторая скалярная функция, определенная на $[0, \infty)$, положительная часть которой

$$\alpha^{+}(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{при } \alpha(t) \geq 0, \\ 0 & \text{при } \alpha(t) < 0, \end{cases}$$

суммируема на любом конечном отрезке $[0, l]$, $\; 0 < l < \infty$.

Тогда для любого решения $y(t)$ уравнения (2.11), для которого $y'(t) \in R(A)$ $\; (t \geq 0)$ справедлива оценка

$$\|y(t)\|^2 + \|A^{-\frac{1}{2}}(t)y'(t)\|^2 \leq (\|y_0\|^2 + \|A^{-\frac{1}{2}}(0)y_0'\|^2) exp\left[\int\limits_0^t \alpha^{+}(\tau)d\tau\right]. \tag{2.12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия 2) следует, что для любого $x \in R(A)$, $x \neq 0$ и всех $t \geq 0$

$$(A^{-1}(t)x, x) > 0,$$

т. е. $A^{-1}(t)$ при каждом $t \geq 0$ есть самосопряженный (вообще говоря, неограниченный) неотрицательный оператор, поэтому существует положительный квадратный корень $A^{-\frac{1}{2}}(t)$.

Далее, из условия 3) и 4) следует, что для $x \in R(A)$ справедливо неравенство

$$([A^{-1}(t)]'x, x) \leq \alpha(t)(A^{-1}(t)x, x), \quad t \geq 0. \tag{2.13}$$

В самом деле, для $x \in R(A)$ (x — постоянный элемент) имеет тождество

$$A(t)A^{-1}(t)x \equiv x,$$

которое сильно дифференцируемо по t, причем в силу наших предположений 3) и леммы 1.2 получаем:

$$A'(t)A^{-1}(t)x + A(t)[A^{-1}(t)]'x \equiv 0,$$

откуда следует, что при любом $t \geq 0$ $A'(t)A^{-1}(t)x \in R(A)$ и что

$$[A^{-1}(t)]'x = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t)x.$$

Отсюда, в силу условия 4) и самосопряженности оператора $A^{-1}(t)$, имеем:

$$([A^{-1}(t)]'x, x) = -(A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t)x, x) = -(A'(t)A^{-1}(t)x, A^{-1}(t)x) \leq$$

$$\leq \alpha(t)(A(t)A^{-1}(t)x, A^{-1}(t)x) = \alpha(t)(A^{-1}(t)x, x).$$

Пусть теперь $y(t)$ — любое решение уравнения (2.11) с $y'(t) \in R(A)$, $t \geq 0$. Тогда очевидно, что $y''(t) \in R(A)$ $(t > 0)$. Поэтому справедливо тождество

$$A^{-1}(t)y'' + y = 0, \quad t > 0. \tag{2.14}$$

Умножая (2.14) справа и слева скалярно на $y'(t)$ и складывая почленно получающиеся выражения, будем иметь

$$(A^{-1}(t)y'', y') + (y', A^{-1}(t)y'') + (y, y') + (y', y) = 0. \qquad (2.15)$$

В силу леммы 1.2, функция $A^{-1}(t)y'(t)$ слабо дифференцируема и $[A^{-1}(t)y'(t)]' = [A^{-1}(t)]'y'(t) + A^{-1}(t)y''(t)$, а $y'(t)$ сильно дифференцируема, по определению решения, следовательно, по лемме 1.3 скалярное произведение $(A^{-1}(t)y'(t),\ \ y'(t))$ дифференцируемо и

$$(A^{-1}(t)y'(t), y'(t))' =$$

$$= ([A^{-1}(t)]'y'(t), y'(t)) + (A^{-1}(t)y''(t), y'(t)) + (A^{-1}(t)y'(t), y''(t)),$$

откуда, в силу самосопряженности оператора $A^{-1}(t)$ получаем, что

$$(A^{-1}(t)y^{''}, y^{'}) + (y^{'}, A^{-1}(t)y^{''}) = (A^{-1}(t)y^{'}, y^{'})' - ([A^{-1}(t)]^{'}y^{'}, y^{'}).$$

Далее, $(y, y^{'}) + (y^{'}, y) = (y, y)^{'}$. Таким образом, (2.15) принимает вид

$$\frac{d}{dt}[\|y(t)\|^2 + \|A^{-\frac{1}{2}}(t)y^{'}(t)\|^2] = ([A^{-1}(t)]^{'}y^{'}(t), y^{'}(t)),$$

или, учитывая неравенство (2.13), получим

$$\frac{d}{dt}[\|y(t)\|^2 + \|A^{-\frac{1}{2}}(t)y^{'}(t)\|^2] \le \alpha(t)(A^{-1}(t)y^{'}(t), y^{'}(t)) \le$$

$$\le \alpha^{+}(t)[\|A^{-\frac{1}{2}}(t)y^{'}(t)\|^2 + \|y(t)\|^2],$$

откуда следует оценка (2.12).

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть выполнены условия:

1). При каждом $t \ge 0$ $A(t)$ — самосопряженный оператор в H, область определения $D(A)$ которого не зависит от t.

2) $(A(t)h, h) \ge \gamma\|h\|^2, \quad \gamma = const > 0$, для всех $t \ge 0$ и $h \in D(A)$.

3) Операторная функция $A(t)$ сильно дифференцируема по t на $D(A)$ и $A^{'}(t)$ удовлетворяет условию 4) теоремы 2.2.

Тогда имеет место утверждение теоремы 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно проверить, что в условиях следствия 2.2 выполняются предположения теоремы 2.2 на $A^{-1}(t)$. Из условия 2) следует, что $R(A) = H$ и что обратный оператор $A^{-1}(t)$, определенный на H, равномерно ограничен, т. е. $\|A^{-1}(t)\| \leq \frac{1}{\gamma}$ $(0 \leq t < \infty)$. Покажем, что операторная функция $A^{-1}(t)$ сильно дифференцируема и что $[A^{-1}(t)]' = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t)$. Это следует из того, что для $x \in H$

$$\left\|\frac{A^{-1}(t+\Delta t)x - A^{-1}(t)x}{\Delta t} + A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t)x\right\| \leq$$

$$\leq \left\|A^{-1}(t+\Delta t)\left[A'(t) - \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}\right]A^{-1}(t)x\right\| +$$

$$+\|A^{-1}(t+\Delta t)[A(t) - A(t+\Delta t)]A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t)x\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\gamma}\left\|\left[\frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} - A'(t)\right]\right\| +$$

$$+\frac{1}{\gamma}\|[A(t+\Delta t) - A(t)]A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t)x\| \to 0$$

при $\Delta t \to 0$ в силу сильной непрерывности $A(t)$ на $D(A)$.

Тем самым следствие 2.2 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть выполнены все условия теоремы 2.2 и пусть $\int_0^\infty \alpha^+(t)dt = M < \infty$. Тогда из оценки (2.12) следует, что $\|y(t)\|$ ограничена на $[0, \infty)$ и что нулевое решение уравнения (2.11), устойчиво в норме $\|y(t)\|_{A^{-\frac{1}{2}}(t)} = \|y(t)\| + \|A^{-\frac{1}{2}}(t)y'(t)\|$, т. е. каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при всех $t > 0$

$$\|y(t)\| + \|A^{-\frac{1}{2}}(t)y'(t)\| < \varepsilon$$

как только выполнено неравенство

$$\|y_0\| + \|A^{-\frac{1}{2}}(0)y_0'\| < \delta(\varepsilon),$$

где $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon \cdot exp[-\frac{1}{2}M]/\sqrt{2}$.

В самом деле, используя элементарные неравенства

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2+b^2} \leq a+b, \quad (a \geq 0, \ b \geq 0)$$

из оценки (2.12) и нашего условия получаем, что

$$\|y(t)\| + \|A^{-\frac{1}{2}}(t)y^{'}(t)\| \leq \sqrt{2}(\|y_0\| + \|A^{-\frac{1}{2}}(0)y_0^{'}\|)e^{\frac{1}{2}}M$$

при всех $t > 0$, откуда получаем требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если $H = R^n$ — n-мерное евклидово комплексное пространство, $A(T)$ — квадратная матрица $n \times n$, то при $\alpha(t) \equiv 0$ из теоремы 2.2 получается результат В.Б. Лидского [15].

Для дальнейшего введем следующее

УСЛОВИЕ (A): Будем говорить, что линейный неограниченный оператор $A(t)\quad(0 \leq t < \infty)$, действующий в H, удовлетворяет условию (A), если

1^0. Он самосопряжен и неотрицателен при каждом $t \geq 0$;

2^0. Оператор $A^{\frac{1}{2}}(t)$ имеет постоянную область определения $D(A^{\frac{1}{2}})$;

3^0. Существует сильная производная $[A^{\frac{1}{2}}(t)]' \equiv A_t^{\frac{1}{2}}(t)$ на $D(A^{\frac{1}{2}})$

и

$$2Re(A_t^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)h, h) \leq \alpha(t)\|A^{\frac{1}{2}}(t)h\|, \;\; h \in D(A(t)). \tag{2.16}$$

где $\alpha(t)$ — некоторая функция, определенная на $[0, \infty)$, для которой $\alpha^+(t)$ суммируема на каждом конечном отрезке $[0, l]$, $\quad l > 0$. (Мы здесь не предполагаем, что оператор $A(t)$ имеет не зависящую от t область определения, что расширяет область возможных приложений получаемых ниже результатов).

ТЕОРЕМА 2.3. Предположим, что оператор $A(t)$ удовлетворяет условию (A). Тогда для любого решения $y(t)\;\;(y_0 \in D(A^{\frac{1}{2}}))$ уравнения (2.11), для которого функция $A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)$ сильно дифференцируема при $t > 0$, справедлива оценка

$$\|y'(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 \leq (\|y_0'\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}(0)y_0\|^2)exp\left[\int_0^t \alpha^+(\tau)d\tau\right], \; (t > 0). \tag{2.17}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(t)$ — произвольное решение уравнения (2.11), удовлетворяющее условиям теоремы 2.3. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \|y^{'}(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2.$$

Эта функция дифференцируема при любом $t > 0$, так как $y'(t)$ сильно дифференцируема, по определению, а функция

$$\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 = (A(t)y(t), y(t))$$

дифференцируема по лемме 1.4, причем

$$\frac{d}{dt}\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 = 2Re(A(t)y(t), y^{'}(t)) + 2Re(A_t^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)y(t), y(t)).$$

Продифференцируем функцию $\varphi(t)$ в силу уравнения (2.11). Имеем

$$\varphi^{'}(t) = (y^{''}(t), y^{'}(t)) + (y^{'}(t), y^{''}(t)) + 2Re(A(t)y(t), y^{'}(t)) +$$

$$+2Re(A_t^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)y(t), y(t)) = 2Re(A_t^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)y(t), y(t)).$$

Учитывая теперь условие (2.16), получим:

$$\varphi^{'}(t) \le \alpha(t)\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 \le \alpha^{+}(t)(\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 + \|y^{'}(t)\|^2) = \alpha^{+}(t)\varphi(t),$$

откуда следует нужная оценка. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Из оценки (2.17) непосредственно вытекают следующие следствия. Если $\int_0^\infty \alpha^{+}(t)dt < +\infty$, то все решения уравнения (2.11) ограничены на $[0, \infty)$ в норме

$$\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)} = \|y^{'}(t)\| + \|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|,$$

а нулевое решение устойчиво в этой же норме. Если дополнительно предположить, что оператор $A(t)$ удовлетворяет условию

$$(A(t)h, h) \ge \gamma\|h\|^2, \;\; \gamma = const > 0, \;\; h \in D(A(t)),$$

то будет ограниченной на $[0, \infty)$ и $\|y(t)\|_H$.

3. Рассмотрим теперь следующее уравнение

$$y''(t) + K(t)By(t) = 0, \;\; 0 \le t < \infty \tag{2.18}$$

в гильбертовом пространстве H при следующих предположениях:

1^0. B — постоянный, вообще говоря, неограниченный, самосопряженный, неотрицательный оператор, действующий в H;

2^0. При каждом $t \geq 0$ $K(t)$ — самосопряженный, ограниченный оператор в H, коммутирующий с оператором $B^{\frac{1}{2}}$, т. е. $K(t)B^{\frac{1}{2}}h = B^{\frac{1}{2}}K(t)h$ для всех $h \in D(B^{\frac{1}{2}})$ и $t \geq 0$;

3^0. $(K(t)h,h) \geq \gamma(t)\|h\|^2$, $h \in H$, где $\gamma(t)$ — некоторая функция, определенная на $[0,\infty)$, для которой

$$\lim_{t\to+\infty}\gamma(t) = \gamma_0 > 0.$$

4^0. Операторная функция $K(t)$ непрерывна на $[0,\infty)$ и имеет ограниченную вариацию на $[a,\infty)$, $a \geq 0$:

$$\int\limits_a^\infty \|dK(t)\| < \infty$$

в равномерной операторной топологии.

ТЕОРЕМА 2.4. Если выполнены условия $1^0 - 4^0$, то для любого решения $y(t)$ $(y_0 \in D(B^{\frac{1}{2}}))$ уравнения (2.18) ограничены $\|y'(t\|$ и $B^{\frac{1}{2}}y(t)$ при $t \to +\infty$, а, следовательно, они ограничены и на $[0,\infty)$, в силу непрерывности этих функций при $t \geq 0$ (по определению решения).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(t)$ — произвольное решение уравнения (2.18). Заметим, что по определению решения, функции $B^{\frac{1}{2}}y(t)$ и $B^{\frac{1}{2}}y'(t)$ сильно непрерывны на $[0,\infty)$. Умножив тождество (2.18) справа и слева скалярно на $y'(t)$ и сложив почленно полученные выражения, будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\|y'(t)\|^2 + (K(t)By(t),y'(t)) + (y'(t),K(t)By(t)) = 0,$$

или, в силу леммы 1.1 и условий 1^0 и 2^0 теоремы,

$$\frac{d}{dt}\|y'(t)\|^2+\left(K(t)B^{\frac{1}{2}}y(t),\frac{d}{dt}\left[B^{\frac{1}{2}}y(t)\right]\right)+\left(K(t)\frac{d}{dt}\left[B^{\frac{1}{2}}y(t)\right],B^{\frac{1}{2}}y(t)\right) = 0.$$

Проинтегрировав это тождество от некоторого $t_0 \geq a$, которое подберем ниже, до $t > t_0$ и, учитывая затем лемму 1.5, получим:

$$\left[\|y'(\tau)\|^2 + \left(K(\tau)B^{\frac{1}{2}}y(\tau), B^{\frac{1}{2}}y(\tau)\right)\right]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t}\left([dK(\tau)]B^{\frac{1}{2}}y(\tau), B^{\frac{1}{2}}y(\tau)\right) = 0$$

или, обозначив через $c_0 = \|y'(t_0)\| + \|K(t_0)\| \cdot \|B^{\frac{1}{2}}y(t_0)\| < +\infty$, имеем

$$\|y'(t)\|^2 + \left(K(t)B^{\frac{1}{2}}y(t), B^{\frac{1}{2}}y(t)\right) \leq c_0 + \int_{t_0}^{t}\left([dK(\tau)]B^{\frac{1}{2}}y(\tau), B^{\frac{1}{2}}y(\tau)\right). \tag{2.19}$$

Из условий 3^0 и 4^0 следует, что для $\varepsilon = \frac{1}{4}\gamma_0$ найдется такое достаточно большое число $T(\varepsilon) \geq a$, что при всех $t \geq T(\varepsilon)$ будут справедливы неравенства

$$(K(t)h, h) \geq 2\varepsilon\|h\|^2 \ \ (h \in H) \ \text{ и } \ \int_{t}^{\infty}\|dK(\tau)\| \leq \varepsilon. \tag{2.20}$$

Положим теперь $t_0 \geq T(\varepsilon)$ и зафиксируем его. Так как функция $\|B^{\frac{1}{2}}y(\tau)\|$ непрерывна на $[t_0, t]$, то существует такая точка $t^* \in [t_0, t]$, что

$$\|B^{\frac{1}{2}}y(t^*)\|^2 = \max_{t_0 \leq \tau \leq t}\|B^{\frac{1}{2}}y(\tau)\|^2.$$

Положим в неравенстве (2.19) $t = t^*$. Тогда, учитывая (2.20), получим

$$\|y'(t^*)\|^2 + 2\varepsilon\|B^{\frac{1}{2}}y(t^*)\|^2 \leq c_0 + \|B^{\frac{1}{2}}y(t^*)\|^2 \cdot \int_{t_0}^{t}\|dK(\tau)\| \leq c_0 + \varepsilon\|B^{\frac{1}{2}}y(t^*)\|^2,$$

откуда следует, что

$$2\varepsilon\|B^{\frac{1}{2}}y(t^*)\|^2 \leq c_0 + \varepsilon\|B^{\frac{1}{2}}y(t^*)\|^2,$$

или

$$\|B^{\frac{1}{2}}y(\tau)\|^2 \leq c_0\varepsilon^{-1}$$

для всех $\tau \in [t_0, t]$. Но так как t — произвольное число, большее t_0 и $c_0\varepsilon^{-1}$ не зависит от t, то

$$\|B^{\frac{1}{2}}y(t)\|^2 \leq c_0\varepsilon^{-1} \tag{2.21}$$

для всех $t \geq t_0$.

Теперь из неравенства (2.19) имеем, что

$$\|y^{'}(t)\|^2 \leq c_0 + \max_{t_0 \leq t < \infty} \|B^{\frac{1}{2}} y(t)\|^2 \cdot \int_{t_0}^{\infty} \|dK(t)\|,$$

так как $\left(K(t) B^{\frac{1}{2}} y(t), B^{\frac{1}{2}} y(t) \right) \geq 0$ при всех $t \geq t_0$. Следовательно,

$$\|y^{'}(t)\|^2 \leq c_0 + c_0 \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon = 2c_0 \;\; (t \geq t_0). \tag{2.22}$$

Далее, так как функции $\|B^{\frac{1}{2}} y(t)\|$ и $\|y^{'}(t)\|$ на отрезке $[0, t_0]$ непрерывны, то они ограничены на нем. Пусть

$$M_1 = \max_{0 \leq t \leq t_0} \|B^{\frac{1}{2}} y(t)\|, \;\; M_2 = \max_{0 \leq t \leq t_0} \|y^{'}(t)\|.$$

Тогда, если обозначить: $c_1 = \max\{\sqrt{c_0 \varepsilon^{-1}}, M_1\}, \;\; c_2 = \max\{\sqrt{2c_0}, M_2\}$ то мы получим, что

$$\|B^{\frac{1}{2}} y(t)\| \leq c_1, \;\; (t \geq 0), \tag{2.21$'$}$$

$$\|y'(t)\| \leq c_2, \;\; (t \geq 0). \tag{2.22$'$}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Если в условиях теоремы 2.4 предположить, что оператор B положительно определен, т. е. $(Bh, h) \geq \sigma^2 \|h\|^2, \;\; \sigma^2 = const > 0$, то из оценки (2.21$'$) получим, что

$$\|y(t)\| \leq c_3, \;\; c_3 = c_1 \sigma^{-1}, \;\; t \geq 0, \tag{2.23}$$

т. е. в этом случае все решения уравнения (2.18) ограничены на $[0, \infty)$ вместе с $y'(t)$ и $B^{\frac{1}{2}} y(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Если H — вещественное гильбертово пространство, то условие самосопряженности оператора $K(t)$ можно снять, так как в этом случае $(K(t)h, h) = (K_S(t)h, h)$, где

$$K_S(t) = \frac{1}{2}[K(t) + K^*(t)].$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Если $H = R^{(n)}$ — вещественное евклидово пространство, $A(t)$ — симметричная матрица $n \times n$, а $B = E$ — единичная матрица в $R^{(n)}$, то из теоремы 2.4 вытекает, как частный, случай один результат I.Borg'a [16].

4. В этом пункте приведем примеры приложения выше доказанных теорем к исследованию поведения решений при $t \to +\infty$ некоторых смешанных задач для гиперболических уравнений второго порядка и для систем таких уравнений.

Всюду дальше через Ω будем обозначать ограниченную область n-мерного ($n \geq 2$) евклидова пространства с достаточно гладкой границей Γ.

ПРИМЕР 2.2. Рассмотрим в вещественном или комплексном пространстве $L_2(\Omega)$ следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] - a(t,x)u \tag{2.24}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x), \;\; u'_t(0,x) = \psi(x) \tag{2.25}$$

и граничным условием

$$u|_\Gamma = 0 \;\text{ при всех } t \in [0,\infty). \tag{2.26}$$

Относительно коэффициентов уравнения (2.24) будем предполагать выполненными следующие условия:

1). a_{ij}, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$ и $a(t,x)$ определены в бесконечном цилиндре $Q = [0,\infty) \times \Omega$, при каждом фиксированном t ограничены и измеримы в Ω.

2). Для всех $x \in \overline{\Omega}$ и $t \geq 0$

$$a(t,x) \geq a_0 > 0, \;\; a_j = a_{ji}, \;\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\xi_i \geq \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij}^2, \;\; \alpha^2 = const > 0 \tag{2.27}$$

в случае вещественного $L_2(\Omega)$ и

$$a(t,x) > a_0 > 0, \ \ a_{ij} = \overline{a}_{ji}, \ \ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\overline{\xi}_i \geq \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2, \ \ \alpha^2 = const > 0 \tag{2.27}$$

в случае комплексного $L_2(\Omega)$.

3). Существуют производные $\frac{\partial a}{\partial t}$, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\right)$ при всех $t \geq 0$ в том смысле, что конечно разностные отношения этих функций при $\Delta t \to 0$ стремятся к соответствующим производным равномерно относительно $x \in \overline{\Omega}$.

ТЕОРЕМА 2.2$'$. Пусть коэффициенты уравнения (2.24) удовлетворяют условиям 1)-3). Пусть, кроме этого, выполнены условия

$$\frac{\partial a}{\partial t} \geq -\alpha(t)a, \ \ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\xi_j\overline{\xi}_i \geq -\alpha(t)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\overline{\xi}_i, \tag{2.28}$$

где $\alpha(t)$ — та же функция, что и в теореме 2.2.

Тогда для любого решения задачи (2.24)-(2.26) имеет место оценка

$$\|u(t,x)\|^2 + \|A^{-\frac{1}{2}}(t)u_t'(t,x)\|^2 \leq (\|\varphi\|^2 + \|A^{-\frac{1}{2}}(0)\psi\|^2)exp\left[\int_0^t \alpha^+(\tau)d\tau\right],$$

где $\| \ \|$ — норма в $L_2(\Omega)$ (Что такое $A^{-\frac{1}{2}}(t)$ будет ясно из доказательства).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этой теоремы сводится к проверке выполнимости условий следствия 2.2. Из условий 1) и 2) следует, что дифференциальное выражение

$$L(t)u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + a(t,x)u \tag{2.29}$$

и граничное условие (2.26) порождают в $L_2(\Omega)$ самосопряженный, равномерно положительно-определенный оператор $A(t)$ с областью определения $D(A) = W_2^2(\Omega)$, не зависящей от t (см. [56]), т. е. для любой функции

$$u(x) \in W_2^2(\Omega) \ \ (A(t)u,u) \geq \gamma^2\|u\|^2, \ \ (t \geq 0),$$

где $\gamma = const > 0$, зависящая лишь от a_0 и α. Следовательно, $R(A) = L_2(\Omega)$ и на $L_2(\Omega)$ существует равномерно ограниченный обратный оператор $A^{-1}(t)$:

$$\|A^{-1}(t)\| \leq \frac{1}{\gamma^2}.$$

Таким образом, первые два условия следствия 2.2 выполнены. Далее, из условий 3) и (2.28) следует, что оператор $A(t)$ сильно дифференцируема по t $(0 \leq t < \infty)$ на $D(A)$ и что

$$(A'(t)u, u) \geq -\alpha(t)(A(t)u, u).$$

В самом деле, для любого $u(x) \in D(A)$

$$A'(t)u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + \frac{\partial a}{\partial t}u$$

и, в силу условий (2.26) и (2.28),

$$(A'(t)u, u) = \int\limits_{\Omega}\left[-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial a_{i,j}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial a}{\partial t}u\right]\overline{u}dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{i,j}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} + \frac{\partial a}{\partial t}|u|^2\right)dx \geq$$

$$\geq -\alpha(t)\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + a|u|^2\right)dx = -\alpha(t)(A(t)u, u),$$

откуда следует требуемое неравенство. Тем самым, выполняется и третье условие следствия 2.2. Теорема доказана. Отметим, что если $\int_0^\infty \alpha^+(\tau)d\tau < +\infty$, то решения задачи (2.24), (2.25), (2.26) ограничены по $t \in [0, \infty)$ в норме $L_2(\Omega)$, а нулевое решение устойчиво в норме $\|u\| + \|A^{-\frac{1}{2}}(t)u_t'\|$.

ТЕОРЕМА 2.3$'$. Пусть $L_2(\Omega)$ - вообще говоря, комплексное пространство. Пусть коэффициенты уравнения (2.24) удовлетворяют условиям 1)-2). Пусть, кроме этого, существуют производные $\frac{\partial a_{ij}(t,x)}{\partial t}$ и $\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}$ при всех $t \geq 0$, которые удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\xi_j\overline{\xi}_i \leq \alpha(t)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\overline{\xi}_i, \quad \frac{\partial a}{\partial t} \leq \alpha(t)a \qquad (2.30)$$

для всех $t \geq 0$ и $x \in \overline{\Omega}$, где $\alpha(t)$ — функция того же типа, что и в теореме 2.3.

Тогда для любого решения $u(t,x)$ задачи (2.24) - (2.26), выходящего из $W_2'(\Omega)\times L_2(\Omega)$, для которого функция $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}$ дифференцируема по $t \geq 0$ в норме $L_2(\Omega)$, справедлива оценка

$$\|u_t'\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{W_2'(\Omega)} \leq M(\|\psi\|_{L_2} + \|\varphi\|_{W_2'})exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t \alpha^+(\tau)d\tau\right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что оператор $A(t)$, порожденный (2.29) и (2.26) удовлетворяет условию (A). Из доказательства предыдущей теоремы ясно, что условие 1^0 выполнено. Далее, из оценки

$$\|A^{\frac{1}{2}}(t)u\|^2 = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} + a|u|^2\right)dx \geq c_0\|u\|_{W_2'(\Omega)}$$

следует, что областью определения оператора $A^{\frac{1}{2}}(t)$ является все $W_2'(\Omega)$ (см., пример 21). Далее, из условий теоремы следует, что квадратичная форма

$$(A(t)u,u) = (A^{\frac{1}{2}}(t)u, A^{\frac{1}{2}}(t)u) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} + a(t,x)|u|^2\right)dx$$

дифференцируема по t для всех $u(x) \in W_2^2(\Omega)$ и что при любом $u(x) \in W_2^2(\Omega)$

$$(A(t)u,u)' = 2Re(A_t^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)u,u) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} + \frac{\partial a}{\partial t}|u|^2\right)dx \leq$$

$$\leq \alpha(t)\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} + a|u|^2\right)dx = \alpha(t)(A(t)u,u).$$

Таким образом, выполняются все требования условия (A). Поэтому имеет место оценка (в силу теоремы 2.3)

$$\|u_t'(t,x)\|_{L_2}^2 + \|A^{\frac{1}{2}}(t)u\|_{L_2}^2 \leq (\|\psi\|_{L_2}^2 + \|A^{\frac{1}{2}}(0)\varphi\|_{L_2}^2)exp\left[\int_0^t \alpha^+(\tau)d\tau\right],$$

или

$$\|u_t^{'}\|_{L_2} + \|A^{\frac{1}{2}}(t)u\|_{L_2} \leq \sqrt{2}(\|\psi\|_{L_2} + \|A^{\frac{1}{2}}(0)\varphi\|_{L_2})exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t \alpha^+(\tau)d\tau\right].$$

Но $\|A^{\frac{1}{2}}(0)\varphi\|_{L_2} \leq c_1\|\varphi\|_{W_2'}$ (см. пример 2.1). Следовательно,

$$\|u_t^{'}\|_{L_2} + c_0\|u\|_{W_2'} \leq \sqrt{2}(\|\psi\|_{L_2} + c_1\|\varphi\|_{W_2'})exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t \alpha^+(\tau)d\tau\right]$$

или, если положить

$$M = \frac{\sqrt{2}\max\{1, c_1\}}{\min\{1, c_0\}},$$

то получим окончательную нужную оценку, из которой получается как ограниченность решения на $[0, \infty)$, так и устойчивость нулевого решения в смысле нормы $\|u_t^{'}\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{W_2'(\Omega)}$, т. е. если $\int_0^\infty \alpha^+(\tau)d\tau = N < \infty$, то каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$\|u_t^{'}(t,x)\|_{L_2(\Omega)} + \|u(t,x)\|_{W_2'(\Omega)} < \varepsilon \text{ для всех } t > 0$$

как только

$$\|\psi\|_{L_2} + \|\varphi\|_{W_2'} < \delta(\varepsilon),$$

где $0 < \delta(\varepsilon) \leq M^{-1}e^{-\frac{1}{2}N}$.

ПРИМЕР 2.3. Рассмотрим в $L_2(\Omega)$ уравнение (2.34) с начальными условиями (2.25) при краевом условии

$$u_{\nu_t}' + \sigma(t,x)u|_\Gamma = 0, \quad (t \geq 0), \tag{2.31}$$

где u_{ν_t}' — производная по конормали.

ТЕОРЕМА 2.3". Пусть выполнены все условия теоремы 2.3' и пусть, кроме того, функция $\sigma(t,x) \geq \sigma_0 > 0$ для всех $t \geq 0$ и $x \in \Gamma$, дифференцируема по t и $\sigma_t^{'}(t,x) \leq \alpha(t)\sigma(t,x)$ причем функция $\sigma(t,x)$ измерима и ограничена на Γ при фиксированном t.

Тогда для любого решения $u(t,x)$ задачи (2.24) - (2.25) - (2.31), выходящего из $W_2'(\Omega) \times L_2(\Omega)$, для которого функция $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ дифференцируема по $t \geq 0$ в норме $L_2(\Omega)$, справедлива оценка

$$\|u\|_1 \equiv \|u_t^{'}(t,x)\|_{L_2(\Omega)} + \|u(t,x)\|_{W_2'(\Omega)} + \|u(t,x)\|_{L_2(\Gamma)} \leq$$

$$\leq M_1(\|\psi\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{W_2'(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\Gamma)}) exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t \alpha^+(\tau)d\tau\right]. \qquad (2.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из результатов работ [5], [9] следует, что дифференциальное выражение (2.29) и граничное условие (2.31) в условиях нашей теоремы порождают самосопряженный положительно-определенный оператор $A(t)$, область определения которого суть функции $u(x) \in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющие условию (2.31). Причем, эта область зависит, вообще говоря, от t, в то время как область определения положительного квадратного корня $A^{\frac{1}{2}}(t)$ не зависит от t и $D(A^{\frac{1}{2}}) = W_2'(\Omega)$.

Далее, как и в предыдущем примере, легко показать, что выполняется условие (2.16).

Для этого достаточно рассмотреть квадратичную форму

$$\|A^{\frac{1}{2}}(t)u\|_{L_2}^2 = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} + a(t,x)|u|^2\right)dx + \int_\Gamma \sigma(t,x)|u|^2 dx,$$

которая получается из уравнения (2.24) и условия (2.31) обычным приемом. Таким образом, выполняются все условия теоремы 2.3 и поэтому справедлива оценка (2.17). Упростим эту оценку.

В силу наших предположений

$$\|A^{\frac{1}{2}}(t)u\|_{L_2}^2 \geq \alpha^2 \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx + a_0 \int_\Omega |u|^2 dx + \sigma_0 \int_\Gamma |u|^2 dx \geq$$

$$\geq \alpha_0(\|u\|_{W_2'(\Omega)}^2 + \|u\|_{L_2(\Gamma)}^2)$$

где $\alpha_0 = min\{\alpha^2, a_0, \sigma_0\}$.

Далее

$$\|A^{\frac{1}{2}}(0)\varphi\|_{L_2}^2 = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(0,x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_i} + a(0,x)|\varphi|^2\right)dx + \int_\Gamma \sigma(0,x)|u|^2 dx \leq$$

$$\leq \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i,j=1}^n \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^2 + \int_\Omega a(0,x)|\varphi|^2 dx + \int_\Gamma \sigma(0,x)|\varphi|^2 dx \leq$$

$$\leq \alpha_1(\|\varphi\|^2_{W_2'(\Omega)} + \|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)}),$$

где

$$\alpha_1 = max\left\{ sup_{x\in\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{i,j}(0,x)|^2\right)^{1/2}, sup_{x\in\Omega}a(0,x), sup_{x\in\Gamma}\sigma(0,x)\right\}.$$

Тогда, оценка (2.17) примет вид

$$\|u_t'\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{W_2'(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Gamma)} \leq M_0(\|\psi\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{W_2(\Omega)} +$$

$$+\|\varphi\|_{L_2(\Gamma)})exp\left[\int_0^t \alpha(\tau)d\tau\right],$$

где M_0 — постоянная, зависящая лишь от α_0 и α_1.

Дальше, применяя элементарные неравенства

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2} \leq a+b+c \quad (a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0),$$

получим оценку (2.32). Теорема доказана.

Из оценки (2.32) следует, что если $\int\limits_0^\infty \alpha^t(\tau)d\tau < +\infty$, то все решения рассматриваемой задачи, удовлетворяющие условиям теоремы, ограничены на $[0,\infty)$ в норме $\|\quad\|_1$, а нулевое решение устойчиво в этой же норме.

ПРИМЕР 2.4. Пусть $H = L_{2,m}(\Omega)$ — пространство вектор-функций $\overrightarrow{u}(x) = \{u_1(x), ..., u_m(x)\}$, $x = (x_1, ..., x_n)$ со скалярным произведением

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \int_\Omega [u_1(x)\overrightarrow{v}_1(x) + ... + u_m(x)\overrightarrow{v}_m(x)]dx,$$

где $v_i(x), u_i(x) \in L_2(\Omega)$.

Рассмотрим в этом пространстве систему

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + a_{i1}(t)Lu_1 + a_{i2}(t)Lu_2 + ... + a_{im}(t)Lu_m, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

или в матричной форме

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2} + A(t)B\overrightarrow{u} = 0, \tag{2.33}$$

где

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^{m}, \quad B = \overbrace{(L, L, ..., L)}^{m \text{раз}},$$

$$Lu_i = -\sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_p}[b_{pq}(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_q}] + b(x)u_i, \tag{2.34}$$

причем, по определению, полагаем, что

$$\mathbf{B}\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} Lu_1 \\ \dots \\ Lu_n \end{pmatrix}.$$

Предположим, что функции $b_{pq}(x)$, $\frac{\partial b_{pq}(x)}{\partial x_k}$, $b(x)$ — измеримы и ограничены в Ω и что выполнены условия

$$b(x) \geq b_0 > 0, \quad b_{pq} = \overline{b}_{pq}, \quad \sum_{i,j=1}^{n} b_{pq}(x)\xi_q\overline{\xi}_p \geq \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2, \quad \alpha^2 = const > 0.$$

Тогда выражение (2.34) порождает на $D(L) = \mathring{W}_2^2(\Omega)$ самосопряженный положительно определенный оператор L. Следовательно, и оператор B будет самосопряженным и положительно-определенным на $D(B) = \mathring{W}_{2,m}^2(\Omega)$. Перестановочность $A(t)$ и $B^{\frac{1}{2}}$ очевидна.

Пусть, далее, элементы матрицы $A(t)$ непрерывны на $[0, \infty)$ и удовлетворяют условиям

$$a_{ij} = \overline{a}_{ij}, \quad \int_a^{\infty} (\sum_{i,j=1}^{m} |da_{i,j}(t)|^2)^{\frac{1}{2}} < +\infty \quad (a \geq 0).$$

Пусть $\gamma(t)$ — наименьшее собственное значение матрицы $A(t)$ и

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = \gamma_0 > 0.$$

Тогда, в силу теоремы 2.4 (см. оценки (2.21′), (2.22′) и (2.23′)), любое решение $\overrightarrow{u}(t, x)$ системы (2.33), удовлетворяющее условиям

$$\overrightarrow{u}(t, x)|_{\Gamma} = 0 \quad (t \geq 0)$$

$$\overrightarrow{u}(0, x) = \overrightarrow{\varphi}(x) \in \mathring{W}_{2,m}^1(\Omega), \quad \overrightarrow{u}_t(0, x) = \overrightarrow{\psi}(x) \in L_{2,m}(\Omega)$$

будет ограничено на $[0,\infty)$ вместе с частными производными $\overrightarrow{u}'_t$ и $\overrightarrow{u}'_{x_i}$ в норме $L_{2,m}(\Omega)$, то есть

$$\Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^{m} |u_i(t,x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \le c_1,$$

$$\Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \Big|\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \le c_2,$$

$$\Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \Big|\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x_p}\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \le c_3, (p=1,2,...,n)$$

для всех $t \in [0,\infty)$.

ПРИМЕР 2.5. Пусть $H = L_2(R_n)$. Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Q(t)\triangle u - a(t)b(x)u, \tag{2.35}$$
$$u(0,x)=\varphi(x), \;\; u'_t(0,x)=\psi(x).$$

Пусть $b(x)$ измеримая и ограниченная функция, причем

$$0 < m \le b(x) \le M, \quad x \in R_n.$$

Тогда оператор $B = -\triangle + b(x)$ будет самосопряженным и положительно определенным на $D(B) = W_2^2(R_n)$ (см., например, [13]).

Пусть $a(t)$ непрерывная на $[0;\infty)$ вещественная функция такая, что $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = a_0 > 0$ и

$$\bigvee_a^\infty a(t) < +\infty \quad (a \ge 0).$$

Тогда, по теореме 2.4, любое решение уравнения (2.35), выходящее из $W_2'(R_n) \times L_2(R_n)$, ограничено вместе с $u_t'(t,x)$, $\quad u_{x_k}'(t,x) \quad (k = 1,2,...,n)$ в норме $L_2(R_n)$ при $t \longrightarrow +\infty$.

Можно также вместо одного уравнения (2.35) рассмотреть в пространстве $L_{2,m}(R_n)$ систему

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2} + A(t)(-\triangle \overrightarrow{u} + b(x)\overrightarrow{u}) = 0,$$

где $A(t)$ — матрица порядка $m \times m$.

§3. ВОЗМУЩЕННЫЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПРИЛОЖЕНИЯ К ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

I. Возмущенным уравнением второго порядка будем называть уравнение вида

$$y'' + A(t)y + K(t)y = 0, \quad (0 \leq t < \infty). \tag{3.1}$$

где $A(t)$ — при каждом $t \geq 0$ — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве Y, а $K(t)$ — линейный ограниченный оператор в Y при каждом $t \geq 0$, $\quad y = y(t)$ —функция со значениями в Y. Ниже будет показано, что если оператор $A(t)$ удовлетворяет некоторым условиям ограниченности решений невозмущенного уравнения (2.11), то остаются ограниченными и решения возмущенного уравнения (3.1), если "возмущение" $K(t)$ в определенном смысле мало.

В следующих двух теоремах будем считать, что $Y = H$ — комплексное гильбертово пространство.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть оператор $A(t)$ удовлетворяет условию (A), причем $(A(t)h, h) \geq 2\gamma \|h\|^2$ для всех $h \in D(A(t))$ и $t \geq 0$, где $\gamma = const > 0$. Пусть операторная функция $K(t)$, определенная на $[0; \infty)$ со значениями в $L(H, H)$, слабо дифференцируема на $[0; \infty)$, при этом предполагаем, что при всех $t \geq a$ (a — некоторое неотрицательное число) оператор $K(t)$ самосопряжен. Пусть, далее, при $t \to +\infty \quad \|K(t)\| \to 0$ и*

$$\int_a^\infty \Big[\alpha^+(t) + \|K'(t)\|\Big] dt = M < +\infty,$$

где $\alpha(t)$ — функция, входящая в условие (A), а $K'(t)$ — слабая производная $K(t)$.

Тогда любое решение $y(t)$ уравнения (3.1), выходящее из $D(A^{\frac{1}{2}}) \times$

H, для которого функция $A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)$ сильно дифференцируема, ограничено вместе с первой производной на $[0;\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(t)$ — произвольное решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условиям теоремы. По определению решения, функции $y(t)$ и $y'(t)$ сильно непрерывны на $[0;\infty)$. Поэтому достаточно показать ограниченность $y(t)$ и $y'(t)$ при $t \to +\infty$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \|y'(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 + (K(t)y(t), y(t)).$$

Эта функция дифференцируема при $t > 0$, так как $y'(t)$ и $A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)$ сильно дифференцируемы, по условию, а функция $(K(t)y(t), y(t))$ дифференцируема в силу лемм 1.2 и 1.3. При этом, в силу лемм 1.2–1.4, имеем:

$$\varphi'(t) = 2Re(y'', y') + 2Re(A(t)y, y') + 2Re(A_t^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)y, y) +$$
$$+ (K'(t)y, y) + 2Re(K(t)y, y'),$$

или, учитывая, что $y = y(t)$ — решение уравнения (3.1), т.е. что

$$y'' = -A(t)y - K(t)y,$$

получим

$$\varphi'(t) = 2Re(A_t^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)y, y) + (K'(t)y, y).$$

Проинтегрировав это равенство от некоторого $t_0 \geq a$, которое подберем ниже, до $t > t_0$, будем иметь

$$\|y'(t)\|^2 + (A(t)y(t), y(t)) + (K(t)y(t), y(t)) =$$
$$= \varphi(t_0) + 2\int_{t_0}^{t} Re(A_\tau^{\frac{1}{2}}(\tau)A^{\frac{1}{2}}(\tau)y(\tau), y(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{t} (K'(\tau)y(\tau), y(\tau))d\tau. \tag{3.2}$$

Так как $\|K(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$, то по любому фиксированному $\varepsilon_0 > 0$ (положим, для простоты, $\varepsilon_0 = \gamma$) найдется такое $T(\varepsilon_0) \geq a$, что при всех $t \geq T(\varepsilon_0)$ будут справедливы неравенства

$$-\gamma\|h\|^2 \leq (K(t)h, h) \leq \gamma\|h\|^2, \quad h \in H \tag{3.3}$$

Положим $t_0 = T(\gamma)$. Тогда, в силу (3.3) и условий теоремы, из (3.2) получим неравенство:

$$\|y'(t)\|^2 + \gamma\|y(t)\|^2 \le c_0 + \int_{t_0}^{t} \Big[\alpha^+(\tau) + \|K^{'}(\tau)\|\Big] \cdot \|y(\tau)\|^2 d\tau, \quad (t > t_0), \tag{3.4}$$

где $c_0 = |\varphi(t_0)|$. Из (3.4) имеем, что

$$\|y(t)\|^2 \le c_0\gamma^{-1} + \gamma^{-1}\int_{t_0}^{t} \Big[\alpha^+(\tau) + \|K'(\tau)\|\Big] \cdot \|y(\tau)\|^2 d\tau,$$

откуда, по лемме 1.6,

$$\|y(t)\|^2 \le c_0\gamma^{-1} exp\{\gamma^{-1}\int_{t_0}^{t} \Big[\alpha^+(t) + \|K^{'}(\tau)\|\Big] d\tau\}, \quad t \ge t_0.$$

Следовательно, $\|y(t)\|^2 \le c_1$ для всех $t \ge t_0$, где $c_1 = c_0\gamma^{-1}e^{\gamma^{-1}}M$. Теперь из (3.4) получаем, что и $\|y^{'}(t)\|^2 \le c_0 + c_1 M$ для всех $t \ge t_0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если H — вещественное гильбертово пространство, то условие на $K(t)$ можно ослабить. А именно, достаточно потребовать, чтобы самосопряженная часть оператора

$$K(t): \ K_s(t) = \frac{1}{2}[K(t) + K^x(t)]$$

удовлетворяла условиям теоремы 3.1 на оператор $K(t)$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что:*
1). При каждом $t \in [0, \infty)$ $A(t)$ — самосопряженный оператор в H с постоянной областью определения $D(A)$, функция $A(t)h$ $(h \in D(A))$ сильно непрерывна на $[0, \infty)$.
2). $(A(t)h, h) \ge \gamma(t)\|h\|^2$, $h \in D(A)$, $t \ge 0$, где $\gamma(t)$ — функция, определенная на $[0, \infty)$ такая, что $\gamma(t) \ge \gamma_0 > 0$ и

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = +\infty.$$

3). Квадратичная форма $(A^{-1}(t)x, x)$ монотонно убывает по t на

$[0,\infty)$ *для всех* $x \in H$, $x \neq 0$.

4). Оператор $K(t)$ *при каждом* $t \geq 0$ *самосопряжен в* H, *причем операторная функция* $K(t)$ *на* $[0,\infty)$ *непрерывна в равномерной операторной топологии и равномерно ограничена:*

$$\|K(t)\| \leq M < +\infty.$$

5). При любом $t \geq 0$ *операторы* $K(t)$ *и* $A^{-1}(t)$ *коммутируют, т.е.*

$$A^{-1}(t)K(t) = K(t)A^{-1}(t).$$

6). Операторная функция $K(t)A^{-1}(t)$ *имеет ограниченную вариацию на* $[0,\infty)$, $a \geq 0$, в равномерной операторной топологии, т.е.

$$\int_a^\infty \|dK(t)A^{-1}(t)\| < +\infty.$$

Тогда все решения $y(t)$ уравнения (3.1) ограничены на $[0,\infty)$, а для производной $y'(t)$ имеет место оценка

$$\|A^{-\frac{1}{2}}(t)y'(t)\| \leq c = const < +\infty, \quad (t \geq 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущей теореме, достаточно доказать теорему 3.2 при $t \to +\infty$. Из условий 1) и 2) следует, что операторная функция $A^{-1}(t)$ сильно непрерывна и удовлетворяет условию

$$0 < (A^{-1}(t)x, x) \leq \mu(t)\|x\|^2 \leq \mu_0\|x\|^2 \tag{3.5}$$

для всех $t \geq 0$, $x \in H$, $x \neq 0$, где $\mu(t) = [\gamma(t)]^{-1}$, $\mu_0 = \gamma_0^{-1}$.

Из условия 3) следует, что квадратичная форма $(A^{-1}(t)x, x)$ при любом $x \in H$ имеет ограниченную вариацию на $[0,\infty)$ и поэтому существует интеграл Стилтьеса

$$\int_{t_0}^t (dA^{-1}(\tau)x, x) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^n \Big(\big[A^{-1}(\tau_{i+1}) - A^{-1}(\tau_i)\big]x, x \Big),$$

где $t > t_0 \geq 0$ и $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_n = t$ — произвольное разбиение отрезка $[t_0, t]$, $\lambda = \max(\tau_{i+1} - \tau_i)$, причем, очевидно, что

$$\int_{t_0}^{t} (dA^{-1}(\tau)x, x) \leq 0 \tag{3.6}$$

для всех $t > t_0 \geq 0$ и $x \in H$.

Пусть теперь $y(t)$ — любое решение уравнения (3.1).
Тогда имеем тождество

$$A^{-1}(t)y^{''}(t) + y(t) + A^{-1}(t)K(t)y(t) = 0.$$

Умножив его тождество справа и слева скалярно на $y^{'}(t)$ и сложив почленно полученные выражения, будем иметь

$$\Big(A^{-1}(t)\frac{d}{dt}y^{'}, y^{'}\Big) + \Big(y^{'}, A^{-1}(t)\frac{d}{dt}y^{'}\Big) + \frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 +$$

$$+\Big(A^{-1}(t)K(t)y, \frac{dy}{dt}\Big) + \Big(\frac{dy}{dt}, A^{-1}(t)K(t)y\Big) = 0,$$

или, в силу условия 5) и самосопряженности операторов $K(t)$ и $A^{-1}(t)$, получим

$$\Big(A^{-1}(t)\frac{dy^{'}}{dt}, y^{'}\Big) + \Big(A^{-1}(t)y^{-1}, \frac{dy^{'}}{dt}\Big) + \frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 +$$

$$+\Big(A^{-1}(t)K(t)y, \frac{dy}{dt}\Big) + \Big(A^{-1}(t)K(t)\frac{dy}{dt}, y\Big) = 0.$$

Проинтегрировав последнее тождество от некоторого $t_0 \geq a$ до $t > t_0$ и воспользовавшись затем леммой 1.5, получим

$$\|y(t)\|^2 - \|y(t_0)\|^2 + (A^{-1}(\tau)y^{'}(\tau), y^{'}(\tau))\Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \Big([dA^{-1}(\tau)]y^{'}(\tau), y^{'}(\tau)\Big) +$$

$$+\Big(A^{-1}(\tau)K(\tau)y(\tau), y(\tau)\Big)\Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \Big([dA^{-1}(\tau)K(\tau)]y(\tau), y(\tau)\Big) = 0.$$

Перенося постоянные и интегральные члены в правую часть, имеем:

$$\|y(t)\|^2 + \Big(A^{-1}(t)y^{'}(t), y^{'}(t)\Big) + \Big(A^{-1}(t)K(t)y(t), y(t)\Big) =$$

$$= \|y(t_0)\|^2 + \Big(A^{-1}(t_0)y'(t_0), y'(t_0)\Big) + \Big(A^{-1}(t_0)K(t_0)y(t_0), y(t_0)\Big) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \Big([dA^{-1}(\tau)]y'(\tau), y'(\tau)\Big) + \int_{t_0}^{t} \Big([dA^{-1}(\tau)K(\tau)]y(\tau), y(\tau)).$$

Положим $c_0 = \|y(t_0)\|^2(1 + \mu_0 M) + \mu_0\|y'(t_0)\|^2$. Тогда, в силу неравенств (3.5) и (3.6), имеем:

$$\|y(t)\|^2 + \|A^{-\frac{1}{2}}(t)y'(t)\|^2 + \Big(A^{-1}(t)K(t)y(t), y(t)\Big) \leq$$
$$\leq c_0 + \int_{t_0}^{t} \Big([dA^{-1}(\tau)K(\tau)]y(\tau), y(\tau)\Big). \qquad (3.7)$$

Так как $\|K(t)\| \leq M$ и $\|A^{-1}(t)\| \leq \mu(t)$, то

$$|(A^{-1}(t)K(t)y(t), y(t))| \leq M\mu(t)\|y(t)\|^2.$$

Далее, так как $\mu(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$, например, $\varepsilon = \frac{1}{2}$) существует такое число $T(\varepsilon) \geq a$, что при всех $t \geq T(\varepsilon)$ будут выполняться одновременно неравенства

$$-\frac{\varepsilon}{2}\|y(t)\|^2 \leq \Big(A^{-1}(t)K(t)y(t), y(t)\Big) \leq \frac{\varepsilon}{2}\|y(t)\|^2,$$
$$\int_{t}^{\infty} \Big\|d[A^{-1}(\tau)K(\tau)]\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть теперь $t > t_0 \geq T(\xi)$. Тогда неравенство (3.7) можно записать в виде

$$\big(1 - \frac{\varepsilon}{2}\big)\|y(t)\|^2 + \|A^{-\frac{1}{2}}(t)y'(t)\|^2 \leq$$
$$\leq c_0 + \max_{t_0 \leq \tau \leq t} \|y(\tau)\|^2 \int_{t_0}^{t} \Big\|d[A^{-1}(\tau)K(\tau)]\Big\|. \qquad (3.8)$$

Пусть $t^* \in [t_0; t]$ такова, что

$$\|y(t^*)\|^2 = \max_{\tau \in [t_0; t]} \|y(\tau)\|^2.$$

Положим в (3.8) $t = t^*$. Тогда будем иметь

$$(1 - \frac{\varepsilon}{2})\|y(t^*)\|^2 + \|A^{-\frac{1}{2}}(t^*)y'(t^*)\|^2 \leq c_0 + \frac{\varepsilon}{2}\|y(t^*)\|^2.$$

Откуда ($\varepsilon = \frac{1}{2}$)

$$\|y(t^*)\| \le 2c_0,$$

или

$$\|y(\tau)\|^2 \le 2c_0, \quad t_0 \le \tau \le t.$$

Но так как t — произвольное ($> t_0$) и $2c_0$ — постоянная, не зависящая от t, то

$$\|y(t)\| \le c_1 = const < +\infty \quad (c_1 = \sqrt{2c_0})$$

для всех $t \ge t_0$. Теперь из (3.8) видно, что

$$\|A^{-\frac{1}{2}}(t)y(t)\| \le c = const < +\infty \quad (t \ge t_0)$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 3.2, насколько нам известно, является новой и для конечномерного случая ($n \ge 2$). Поэтому мы здесь сформулируем ее для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Сначала приведем один результат, из книги [19], касающийся монотонных симметрических матриц.

Пусть $R^{(n)}$ — вещественное евклидово пространство и $A(t)$ ($a \le t \le b$) — семейство вещественных симметрических матриц порядка $n \times n$. Назовем матричную функцию $A(t)$ монотонно возрастающей (убывающей) на $[a, b]$, если при $t_2 > t_1, \quad t_1, t_2 \in [a, b]$, справедливо неравенство $([A(t_2) - A(t_1)]x, x) \ge 0$ $\Big(([A(t_2) - A(t_1)]x, x) \le 0\Big)$ для любого вектора $x = (x_1, ..., x_n) \in R^{(n)}$, при этом будем писать, что $A(t_2) \ge A(t_1)$ $\Big(A(t_2) \le A(t_1)\Big)$.

ЛЕММА 3.1 [19, стр. 125]. Если A и B — вещественно постоянные симметрические матрицы порядка $n \times n$ и $A \ge B > 0$, то $A^{-1} \le B^{-1}$ (A^{-1} и B^{-1} — обратные матрицы).

Из этой леммы непосредственно следует, что если матричная функция $A(t)$ монотонно возрастает на $[0, \infty)$ и $A(0) > 0$, то матричная функция $A^{-1}(t)$ монотонно убывает на $[0, \infty)$.

Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(t) + b_{ij}(t)] x_j = 0, \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{3.9}$$

В силу леммы 3.1 и теоремы 3.2 справедлива

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть выполнены следующие условия:*
1). $A(t) = (a_{ij})_1^n$, $B(t) = (b_{ij})_1^n$ — вещественные симметрические матрицы ($t \geq 0$) с непрерывными на $[0, \infty)$ элементами, причем элементы матрицы $B(t)$ равномерно ограничены на $[0, \infty)$.
2). Матричная функция $A(t)$ монотонно возрастает на $[0, \infty)$ и $A(0) > 0$, причем

$$\lim_{t \to +\infty} \lambda(t) = +\infty,$$

где $\lambda(t)$ — наименьшее собственное значение матрицы $A(t)$.
3). При любом $t \geq 0$ матрицы $B(t)$ и $A^{-1}(t)$ перестановочны и матрица $B(t)A^{-1}(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[a, \infty)$ при некотором $a \geq 0$ в том смысле, что

$$\int_a^{\infty} \| d[B(t)A^{-1}(t)] \| \prec +\infty.$$

Тогда все решения $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ системы (3.9) ограничены на $[0, \infty)$, а для производной $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t))$ справедлива оценка: $(A^{-1}(t)y'(t), \, y'(t)) \leq c = const < +\infty$, $t \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если $A(t) = f(t)$, $B(t) = g(t)$ — скалярные функции, то при $n = 1$ из теоремы 3.3. вытекают, как частный случай, теоремы 1 и 3 из работы [17].

2. Здесь мы рассмотрим в банаховом пространстве Y следующее линейное неоднородное уравнение

$$y'' + Ay + D(t)y + F(t)y' = f(t), \quad (0 \leq t < \infty) \tag{3.10}$$

и, как частный случай, однородное уравнение

$$y'' + Ay + K(t)y = 0 \quad (0 \leq t < \infty) \tag{3.1'}$$

при начальных условиях

$$y(0) = y_0, \quad y^{'}(0) = y_0'. \tag{3.11}$$

где A — постоянный линейный оператор в Y, $K(t)$ и $F(t)$ — операторные функции со значениями в $L(Y, Y)$, $D(t)$ — при каждом $t \geq 0$, вообще говоря, неограниченный линейный оператор в Y, дробного порядка [8] относительно оператора A.

Предположим, что оператор $A = -B^2$, где оператор B обладает свойством (ω, M) и имеет ограниченный обратный B^{-1} на Y.

Пусть E — множество сильно непрерывно дифференцируемых на $[0, \infty)$ функций $y(t)$ со значениями в Y таких, что при каждом $t \geq 0$ $y(t) \in D(B)$ и функция $By(t)$— сильно непрерывно на $[0, \infty)$. Для функций $y(t) \in E$ введем обозначение

$$\|y(t)\|_E = \|y^{'}(t)\| + \|By(t)\|,$$

где $\| \ \|$ — норма в Y. $\| \ \|_E$ — будем называть нормой в E.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Назовем *обобщенным решением* задачи (2.10)–(3.11) любую функцию $y(t)$ на E, которая удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению

$$y(t) = C(t)y_0 + S(t)B^{-1}y_0^{'} +$$

$$+ \int_0^t S(t-\tau)B^{-1}[f(\tau) - D(\tau)y(\tau) - F(\tau)y^{'}(\tau)]d\tau. \tag{3.12}$$

Мы не останавливаемся на вопросах эквивалентности задачи (3.10)-(3.11) и уравнения (3.12). Отметим только, что, используя теоремы 1.2 и 1.3, нетрудно указать условия эквивалентности задачи (3.10)-(3.11) и уравнения (3.11).

ТЕОРЕМА 3.4. *Если операторная функция $K(t)$ непрерывна на $[0, \infty)$ в равномерной операторной топологии и*

$$\int_0^{\infty} \|K(\tau)\| d\tau = K < +\infty,$$

оператор A обладает свойством (M) (см. §2, п.1) и оператор B имеет ограниченный обратный B^{-1} на Y, то для любого обобщенного решения $y(t)$ задачи $(3.1^{'})-(3.11)$, выходящего из $D(B)\times Y$, справедлива оценка

$$\|y(t)\|_E \leq c\|y(0)\|_E, \quad (t \geq 0). \tag{3.13}$$

где C — постоянная, не зависящая от решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(t)$ — обобщенное решение задачи $(3.1')-(3.11)$, выходящее из $D(B)\times Y$. Тогда $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$y(t) = C(t)y_0 + S(t)B^{-1}y_0' - \int_0^t S(t-\tau)B^{-1}K(\tau)y(\tau)d\tau,$$

откуда получаем, что

$$y'(t) = S(t)By_0 + C(t)y_0' - \int_0^t C(t-\tau)K(\tau)y(\tau)d\tau,$$

$$By(t) = C(t)By_0 + S(t)y_0' - \int_0^t S(t-\tau)K(\tau)y(\tau)d\tau.$$

В силу свойства (M), имеем, что $\|C(t)\| \leq M$, $\|S(t)\| \leq M$, $(-\infty < t < +\infty)$. Следовательно,

$$\|y'(t)\| \leq M\|y(0)\|_E + M\int\limits_0^t \|K(\tau)\|\|y(\tau)\|d\tau,$$

$$\|By(t)\| \leq M\|y(0)\|_E + M\int\limits_0^t \|K(\tau)\|\cdot\|y(\tau)\|d\tau.$$

Сложив почленно эти неравенства и учитывая, что

$$\|y(\tau)\| \leq \|B^{-1}By(\tau)\| + \|y'(\tau)\| \leq (\|B^{-1}\|+1)(\|By(\tau)\|+\|y'(\tau)\|) =$$

$$= C_0\|y(\tau)\|_E$$

получим

$$\|y(t)\|_E \leq 2M\|y(0)\|_E + 2MC_0\int_0^t \|K(\tau)\|\|y(\tau)\|_E d\tau,$$

откуда, в силу леммы 1.6,

$$\|y(t)\|_E \leq 2M\|y(0)\|_E \exp\left[2MC_0\int_0^t \|K(\tau)\|d\tau\right], \quad t \geq 0.$$

Если теперь положить $C = 2Me^{2MC_0K}$, то из последнего неравенства следует (3.13).

ТЕОРЕМА 3.5. *Предположим, что выполнены условия:*
1). Оператор A удовлетворяет условию (M) и оператор B имеет ограниченный обратный B^{-1}.
2). Операторные функции $D(t)B^{-1}$ и $F(t)$ непрерывны на $[0,\infty)$ в равномерной операторной топологии и

$$\|D(t)B^{-1}\| + \|F(t)\| \leq \gamma(t).$$

3). Функция $f(t)$ сильно непрерывна на $[0,\infty)$ и, кроме того, удовлетворяет одному из следующих условий:
а) либо $\|f(t)\| \leq \gamma(t)$
б) либо $f(t)$ сильно непрерывно дифференцируема на $[0,\infty)$ и

$$\|f(t)\| \leq N < +\infty, \quad \|f^{'}(t)\| \leq \gamma(t).$$

4).

$$\int_0^\infty \gamma(t)dt = \gamma < \infty.$$

Тогда для любого обобщенного решения $y(t)$ задачи (3.10)-(3.11), выходящего из $D(B) \times Y$ $\|y(t)\|_E$ ограничена на $[0,\infty)$, т.е.

$$\|y(t)\|_E \leq C < +\infty \quad (t \geq 0),$$

где постоянная C зависит от $\|y(0)\|_E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.12) имеем:

$$y^{'}(t) = S(t)By_0 + C(t)y_0^{'} + \int_0^t C(t-\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^t C(t-\tau)\Big[D(\tau)B^{-1}By(\tau)+F(\tau)y^{'}(\tau)d\tau\Big]; \qquad (3.14)$$

$$By(t)=C(t)By_0+S(t)y_0^{'}+\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t S(t-\tau)\Big[D(\tau)B^{-1}By(\tau)+F(\tau)y^{'}(\tau)\Big]d\tau. \qquad (3.15)$$

Если $f(t)$ удовлетворяет условию 3а), то поступая так же, как и в предыдущей теореме, получим

$$\|y(t)\|_E\leq 2M\|y(0)\|_E+2M\gamma+2M\int_0^t \gamma(\tau)\|y(\tau)\|_E d\tau,$$

откуда по лемме 1.6.

$$\|y(t)\|_E\leq (2M\|y(0)\|_E+2M\gamma)\exp\Big[2M\int_0^t \gamma(\tau)d\tau\Big]\leq C<+\infty \quad (t\geq 0).$$

Если $f(t)$ сильно непрерывно дифференцируема, то в силу леммы 1.8 и ограниченной обратимости оператора B, имеем

$$\int_0^t S(t+\tau)f(\tau)d\tau=B^{-1}C(t)f(0)-B^{-1}f(t)+B^{-1}\int_0^t C(t-\tau)f^{'}(\tau)d\tau. \qquad (3.16)$$

Точно так же, как была доказана лемма 1.8, можно показать, что если $f(t)$ сильно непрерывно дифференцируема, то сильно дифференцируема и функция

$$\varphi(t)=\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau=\int_0^t S(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

и что

$$\varphi^{'}(t)=S(t)f(0)+\int_0^t S(t-\tau)f^{'}(\tau)d\tau=B\int_0^t C(t-\tau)f(\tau)f(\tau)d\tau$$

откуда получаем, что

$$\int_0^t C(t-\tau)f(\tau)d\tau=B^{-1}S(t)f(0)+B^{-1}\int_0^t S(t-\tau)f'(\tau)d\tau. \qquad (3.17)$$

Учитывая формулы (3.16) и (3.17) из (3.14) и (3.15) получаем:

$$y'(t)=S(t)By_0+C(t)y_0'+B^{-1}S(t)f(0)+B^{-1}\int_0^t S(t-\tau)f'(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t C(t-\tau)\Big[D(\tau)B^{-1}By(\tau)+F(\tau)y'(\tau)\Big]d\tau,$$

$$By(t)=C(t)By_0+S(t)y_0'+B^{-1}C(t)f(0)-B^{-1}f(t)+$$

$$+B^{-1}\int\limits_0^t C(t-\tau)f'(\tau)d\tau-\int\limits_0^t S(t-\tau)\Big[D(\tau)B^{-1}By(\tau)+F(\tau)y^{'}(\tau)\Big]d\tau.$$

Из этих двух равенств теперь легко получаем, что

$$\|y(t)\|_E\le 2M\|y(0)\|_E+2\|B^{-1}\|MN+2\|B^{-1}\|M\gamma+\|B^{-1}\|N+$$

$$+2M\int_0^t\gamma(\tau)\|y(\tau)\|_E d\tau,$$

откуда получаем нужную оценку. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Из полученных оценок в теоремах 3.4 и 3.5 видно, что нулевые решения уравнений (3.10) и (3.1) устойчивы в норме $\|\ \ \|_E$, если $f(t)\equiv 0$.

3. Приведем теперь некоторые примеры.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $Y=L_2(\Omega)$. Рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big]-C(x)u+u(t,x)u+\int_\Omega K_0(t,x,y)u(t,y)dy+$$

$$+\sum_{i=1}^n b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+d(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}+\int_\Omega K_1(t,x,y)\frac{\partial u}{\partial t}dy+f(t,x) \qquad (3.18)$$

с начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x);\quad u|_\Gamma=0 \text{ для всех } t\ge 0. \qquad (3.19)$$

Предположим, что выполнены условия:

1). Функции $a_{ij}(x)$, $\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_n}$ и $C(x)$ — измеримы и ограничены в Ω и удовлетворяют в $\overline{\Omega}$ условиям

$$C(x)\ge 0,\quad a_{ij}=\overline{a}_{ij},\quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_j\overline{\xi}_i\ge\alpha^2\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2,\quad \alpha^2=const>0.$$

2). Свободный член $f(t,x)$ и коэффициенты $a(t,x)$, $d(t,x)$ и $b_i(t,x)$ определены в цилиндре $Q=[0,\infty)\times\Omega$, измеримы и ограничены в Ω при каждом фиксированном t и непрерывны на $[0,\infty)$ при фиксированном x.

3). Функции $K_i(t,x,y)$ $(i=0,1)$ определены в области $R=[0,\infty)\times\Omega\times\Omega$, непрерывны по t и при каждом фиксированном t принадлежат $L_2(\Omega\times\Omega)$.

4). Для всех $x\in\overline{\Omega}$ и $t\in[0,\infty)$

$$|a(t,x)|+|d(t,x)|+\sum_{i=1}^{n}|b_i(t,x)|\leq\gamma(t)$$

$$\Big(\int_\Omega\int_\Omega|K_0(t,x,y)|^2dxdy\Big)^{1/2}+\Big(\int_\Omega\int_\Omega|K_t(t,x,y)|^2dxdy\Big)^{1/2}\leq\gamma(t).$$

5) а). Либо $\Big(\int_\Omega|f(t,x)|^2dx\Big)^{1/2}\leq\gamma(t)$;

б). Либо, если существует $f_t'(t,x)$ и непрерывна по $t\in[0,\infty)$, то

$$\Big(\int_\Omega|f(t,x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\leq N<+\infty\quad(t\geq0)$$

$$\Big(\int_\Omega|f_t'(t,x)|^2dx\Big)^{1/2}\leq\gamma(t).$$

6). $\int_0^\infty\gamma(t)=\gamma<+\infty$.

Нетрудно показать, что при выполнении выше перечисленных условий, задача (3.18)–(3.19) порождает в $L_2(\Omega)$ некоторую абстрактную задачу типа (3.10)–(3.11), для коэффициентов которой выполнены все условия теоремы 3.5. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 3.5. *Пусть выполнены условия 1) - 6). Тогда любое обобщенное решение $u(t,x)$ задачи (3.18)-(3.19), выходящее из $\mathring{W}_2^1(\Omega)\times L_2(\Omega)$, ограничено на $[0,\infty)$ вместе с частными производными пер-*

вого порядка в норме $L_2(\Omega)$, т.е. имеет место оценка

$$\|u_t'(t,x)\|_{L_2(\Omega)} + \|u(t,x)\|_{W_2'(\Omega)} \le C < +\infty \quad (t \ge 0),$$

где постоянная C зависит от начальных данных. Если свободный член $f(t,x) \equiv 0$, то имеет место оценка

$$\|u(t,x)\|_1 \equiv \|u'(t,x)\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{W_2'(\Omega)} \le C_1(\|\psi(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{W_2'(\Omega)})$$

из которой следует устойчивость нулевого решения уравнения (3.18) относительно нормы $\|\ \ \|_1$.

ПРИМЕР 3.2. В качестве приложения теоремы 3.1. рассмотрим в $L_2(\Omega)$ следующее интегро-дифференциальное

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big] - a(t,x)u + b(t,x)u + \int\limits_{\Omega} K(t,x,y)u(t,y)dy \tag{3.20}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t'(0,x) = \psi(x), \tag{3.21}$$

и краевым условиям

$$u'_{N_t} + \sigma(t,x)u|_\Gamma = 0, \quad (t \ge 0), \tag{3.22}$$

где u'_{N_t} — производная по нормали.

Пусть коэффициенты $a_{ij}(t,x)$, $a(t,x)$ и $\sigma(t,x) \ge 0$ удовлетворяют условиям теоремы 2.3.

Пусть вещественная функция $b(t,x)$ измерима и ограничена в Ω и непрерывно дифференцируема по t на $[0,\infty)$, причем

$$b(t) = \sup_x |b(t,x)| \to 0 \ \text{ при } \ t \to +\infty.$$

Пусть ядро $K(t,x,y)$ при каждом $t \ge a \ge 0$ порождает самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$, причем

$$K(t) = \Big(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} |K(t,x,y)|^2 dxdy\Big)^{1/2} \to 0 \ \text{ при } \ t \to +\infty.$$

Пусть, далее, существует $K_t'(t,x,y)$ — непрерывная по t. Пусть, наконец,

$$\int\limits_a^\infty [\alpha^+(t)+\sup_x \left|b_t^{'}(t,x)\right| + \Big(\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega |K_t^{'}(t,x,y)|^2 dxdy\Big)^{1/2}\Big]dt < +\infty.$$

Тогда любое решение $u(t,x)$ задачи (3.20)–(3.22), выходящее из $W_2'(\Omega)\times L_2(\Omega)$, для которого функции $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t \partial x_i}$ $(i=1,2,...,n)$ непрерывны по $t\geq 0$, ограничено на $[0,\infty)$ вместе с $u_t'(t,x)$ в норме $L_2(\Omega)$.

Доказательство последнего утверждения сводится к проверке выполнения условий теоремы 3.1.

Г Л А В А II.

Н Е Л И Н Е Й Н Ы Е   У Р А В Н Е Н И Я

§4. ОГРАНИЧЕННОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ПРИЛОЖЕНИЯ К КВАЗИЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.

I. Рассмотрим в банаховом пространстве Y следующее дифференциальное уравнение

$$y'' + Ay = f(t, y, y'), \quad (0 \le t < \infty) \tag{4.1}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'. \tag{4.2}$$

Здесь A — постоянный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в Y и представимый в виде $A = -B^2$, $\quad f(t, u, v)$ — неограниченный нелинейный оператор, действующий из топологического произведения $[0, \infty) \times U \times Y$ в Y, где U — некоторое линейное множество, плотное в $Y; y = y(t)$ —функция со значениями в Y.

Решением задачи (4.1)–(4.2) будем называть дважды сильно непрерывно дифференцируемую на $[0, \infty)$ функцию $y(t)$ со значениями в Y, удовлетворяющую уравнению (4.1) и начальным условиям (4.2) и обладающую, кроме того, тем свойством, что функции $Ay(t)$ и $By'(t)$ сильно непрерывны при $t \ge 0$.

Предположим, что оператор B обладает свойством (ω, M) и имеет ограниченный обратный B^{-1}. Тогда при некоторых дополнительных ограничениях на оператор $f(t, u, v)$ (например, если функция $f_1(t) = f(t, y(t), y'(t))$ сильно непрерывно дифференцируема по t, где $y(t)$ — любое решение задачи (4.1)—(4.2), причем $y(t)$ удовлетворяет и интегро-дифференциальному уравнению (см. теорему 1.3)

$$y(t) = c(t)y_0 + S(t)B^{-1}y_0^{'} + \int_0^t S(t-\tau)B^{-1}f(\tau, y(\tau), y^{'}(\tau))d\tau, \quad (4.3)$$

где $c(t)$ и $S(t)$ те же операторные функции, что и в лемме 1.7.

Функцию $y(t) \in E$ будем называть о б о б щ е н н ы м р е ш е н и е м уравнения (4.1), если она удовлетворяет уравнению (4.3).

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. Y — пространство с дифференцируемой по Гато нормой.

2. Оператор B обладает свойством $(0, M)$ и имеет ограниченный обратный B^{-1}.

3. $y_0 \in D(A)$, $y_0^{'} \in D(B)$.

4. Оператор $f(t, B^{-1}u, v)$ непрерывен по совокупности аргументов (t, u, v) на $[0, \infty) \times Y \times Y$ и для этих (t, u, v) удовлетворяет условию

$$\|f(t, B^{-1}u, v)\| \leq \gamma(t)g(\|u\| + \|v\|), \quad (4.4)$$

где $\gamma(t) \geq 0$, $(t \geq 0)$, $g(s) > 0$ $(s \geq 0)$ — такие непрерывные функции, что $g(s)$ не убывает и

$$\int_0^\infty \frac{ds}{g(s)} = +\infty, \quad \int_0^\infty \gamma(t)dt = \gamma < +\infty. \quad (4.5)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) Для любого $y(t)$ задачи (4.1)-(4.2) имеет место оценка

$$\|y(t)\|_E \leq C = const < +\infty \ \ (0 \leq t < \infty). \quad (4.6)$$

б) Каждому решению $y(t)$ задачи (4.1)-(4.2) соответствует такое обобщенное решение $x(t)$ однородного уравнения

$$x'' + Ax = 0, \quad (4.7)$$

что $\|y(t) - \chi(t)\|_E \to 0$ при $t \to +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.Пусть $y(t)$ — решение задачи (4.1)—(4.2). Сделаем в тождестве (4.1) замену: $By(t) = u_1(t)$, $y'(t) = u_2(t)$. Отметим, что подобная замена имеется в работах [7] и [11]. Тогда задача (4.1)—(4.2) сведется к эквивалентной задаче первого порядка в топологическом произведении $\widetilde{Y} = Y \times Y$:

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} = \widetilde{B}\widetilde{u} + \widetilde{f}(t, \widetilde{u}(t)), \tag{4.8}$$

$$\widetilde{u}(0) = \widetilde{u}_0 = \begin{pmatrix} By_0 \\ y_0^{'} \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

где

$$\widetilde{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \ \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{f}(t, \widetilde{u}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t, B^{-1}u_1(t), u_2(t)) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при переходе от уравнения (4.1) к уравнению (4.8) приходиться дифференцировать функцию $u_1(t) = By(t)$. Это возможно в силу замкнутости оператора B и сильной непрерывности $By'(t)$, (см. лемму 1.1). При этом $u_1'(t) = By'(t)$.

Из условия 2) теоремы 4.1 следует, что оператор B порождает сильно непрерывную, равномерно ограниченную группу операторов $T(t) : \|T(t)\| \leq M \ \ (-\infty < t < +\infty)$, действующих в Y.

Тогда, в силу леммы 1.7, оператор $\widetilde{B}$ также порождает сильно непрерывную, равномерно ограниченную группу операторов $\widetilde{T}(t)$: $\|\widetilde{T}(t)\| \leq 2M \ \ (-\infty < t < +\infty)$, действующих в $\widetilde{Y}$ при этом $\widetilde{T}(t)$ определяется по формуле (1.5).

Очевидно, что при любом $\widetilde{u}_0 \in D(\widetilde{B})$ функция $\widetilde{u}(t) = \widetilde{T}(t)\widetilde{u}_0$ удовлетворяет уравнению $\widetilde{u}'(t) = \widetilde{B}\widetilde{u}(t)$. Заметив это, положим в (4.8) $\widetilde{u}(t) = \widetilde{T}(t)u(t), \quad u(t) \in D(\widetilde{B}) \ \ (t \geq 0)$. Тогда $u(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{du(t)}{dt} = \widetilde{T}(-t)\widetilde{f}(t, \widetilde{T}(t)u(t)),$$

или

$$\frac{du(t)}{dt} = F(t, u(t)), \tag{4.10}$$

где

$$\|F(t,u(t))\|_{\widetilde{Y}} \le \|\widetilde{T}(-t)\|\|\widetilde{f}(t,\widetilde{T}(t)u(t))\|_{\widetilde{Y}} \le 2M\|\widetilde{f}(t,\widetilde{u}(t))\|_1 \le$$

$$\le 2M\|f(t,B^{-1}u_1(t),u_2(t))\| \le 2M\gamma(t)g(\|u_1(t)\|+\|u_2(t)\|) =$$

$$= 2M\gamma(t)g(\|\widetilde{u}(t)\|_{\widetilde{Y}}) = 2M\gamma(t)g(\|\widetilde{T}(t)u(t)\|_{\widetilde{Y}}) \le$$

$$\le 2M\gamma(t)g(2M\|u(t)\|_{\widetilde{Y}}).$$

Таким образом, из (4.10) получаем, что

$$\Big\|\frac{du(t)}{dt}\Big\|_{\widetilde{Y}} \le 2M\gamma(t)g(2M\|u(t)\|_{\widetilde{Y}}). \tag{4.11}$$

Так как Y — пространство с дифференцируемой нормой, по условию теоремы, то и $\widetilde{Y}$ будет пространством с дифференцируемой нормой. Тогда, очевидно, что

$$\Big\|\frac{d\|u(t)\|_{\widetilde{Y}}}{dt}\Big\| \le \Big|\frac{du(t)}{dt}\Big|_{\widetilde{Y}}.$$

Поэтому из (4.11) получаем, что

$$\Big|\frac{d\|u(t)\|_{\widetilde{Y}}}{dt}\|\Big| \le 2M\gamma(t)g(2M\|u(t)\|_{\widetilde{Y}}),$$

откуда

$$\Big|\int_{\|u_0\|_{\widetilde{Y}}}^{\|u(t)\|_{\widetilde{Y}}} \frac{ds}{g(2MS)}\Big| \le 2M\int_0^t \gamma(\tau)d\tau \le 2M\int_0^\infty \gamma(\tau)d\tau < +\infty, \tag{4.12}$$

$$(u_0 = \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}_0).$$

Так как $\int_0^\infty \frac{ds}{g(s)} = +\infty$, то из (4.12) следует, что $\|u(t)\|_{\widetilde{Y}}$ должна быть ограниченной при всех $t \ge 0 : \|u(t)\|_{\widetilde{Y}} \le C_0 < \infty$. Но $\widetilde{u}(t) = \widetilde{T}(t)u(t)$. Следовательно,

$$\|y(t)\|_E = \|y'(t)\| + \|By(t)\| = \|\widetilde{u}(t)\|_{\widetilde{Y}} \le 2MC_0 = C < +\infty \quad (t \ge 0) \tag{4.13}$$

Таким образом, утверждение а) доказано.

Докажем теперь утверждение б). Покажем сначала, что $u(t)$ при $t > +\infty$ сильно стремится к некоторому элементу из $\widetilde{Y}$. Пусть $\{t_k\}$ — произвольная числовая последовательность такая, что $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Тогда из (4.10) имеем:

$$u(t_{k+1}) - u(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t, u(t))dt,$$

откуда

$$\|u(t_{k+1}) - u(t_k)\| \leq 2M \Big| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma(\tau) g(2M\|u(\tau)\|_{\widetilde{Y}}) d\tau \Big| \leq$$

$$\leq 2M \max_{\tau \in [t_k, t_{k+1}]} g(2M\|u(\tau)\|_{\widetilde{Y}}) \Big| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma(\tau) d\tau \Big|. \tag{4.14}$$

Но так как $0 \leq 2M\|u(\tau)\| \leq 2MC_0 < +\infty$ для всех $\tau \geq 0$ и $g(s)$ непрерывна на любом конечном S — отрезке, то

$$2Mg(2M\|u(\tau)\|_{\widetilde{Y}}) \leq k_0 < +\infty \text{ для всех } \tau \geq 0.$$

Далее, так как $\int_0^\infty \gamma(t)dt = \gamma < +\infty$, то каково бы ни было $\delta > 0$, найдется такое число $K_0(\varepsilon)$, что при всех $k \geq K_0(\varepsilon)$

$$\Big| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma(\tau) d\tau \Big| < \frac{\varepsilon}{K_0}.$$

Тогда из (4.14) получаем, что

$$\|u(t_{k+1}) - u(t_k)\|_{\widetilde{Y}} < \varepsilon \quad \text{при} \quad k \geq K(\varepsilon),$$

откуда следует в силу полноты пространств $\widetilde{Y}$ и произвольности последовательности $\{t_k\}$, что $u(t)$ при $t \to \infty$ сильно стремится к некоторому элементу $z_0 \in \widetilde{Y}$.

Т.е. $u(t) = z_0 + h(t)$, где

$$z_0 = \begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix}, h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} \text{ и } \|h(t)\|_{\widetilde{Y}} \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Но,

$$\widetilde{u}(t) = \widetilde{T}(t)u(t) = \widetilde{T}(t)z_0 + \widetilde{T}(t)h(t)$$

поэтому

$$\|\widetilde{u}(t)-\widetilde{T}(t)z_0\|_{\widetilde{Y}}=\|\widetilde{T}(t)h(t)\|_{\widetilde{Y}}\leq 2M\|h\|_{\widetilde{Y}}\to 0 \quad \text{при} \quad t\to+\infty. \tag{4.15}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$x(t)=C(t)B^{-1}z_1^0+S(t)B^{-1}z_2^0.$$

Легко проверить, что $x(t)$ является обобщенным решением уравнения (4.7) с начальными условиями $x(0)=B^{-1}z_1^0$, $x'(0)=z_2^0$ и что

$$\widetilde{T}(t)z_0=\begin{pmatrix} Bx(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

Так как, в силу нашей замены

$$\widetilde{u}(t)=\begin{pmatrix} By(t) \\ y'(t) \end{pmatrix},$$

то из (4.15) получаем, что

$$\|y(t)-x(t)\|_E\equiv\|y^{'}(t)-x^{'}(t)\|+\|By(t)-Bx^{'}(t)\|\to 0 \tag{4.16}$$

при $t\to+\infty$. Теорема доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Так как оператор B^{-1} ограничен, то из (4.13) и (4.16), соответственно, получаем, что

$$\|y(t)\|\leq\|B^{-1}\|C \quad (t\geq 0)$$

и

$$\|y(t)-x(t)\|\to 0 \;\text{ при } \quad t\to+\infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Если B ограниченный оператор, то в утверждении б) теоремы 4.1 слово "обобщенное" автоматически выпадает.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Если выполнены условия теоремы 4.1 и оператор $f(t,u,v)$ удовлетворяет условиям локальной разрешимости задачи (4.1)-(4.2), то из оценки (4.13) и результатов работы [11] следует нелокальная разрешимость задачи (4.1)-(4.2).

ТЕОРЕМА 4.2. *Предположим, что:*

1) Оператор B удовлетворяет условию 2) теоремы 4.1.

2) $y_0 \in D(B), \quad y_0^{'} \in Y$.

3) Оператор $f(t, B^{-1}u, v)$ *непрерывен по совокупности аргументов* (t, u, v) *на* $[0, \infty) \times Y \times Y$ *и удовлетворяет условиям:*

$$\int_0^\infty \|f(t, 0, 0)\| dt = \gamma < +\infty, \qquad (\gamma)$$

$$\|f(t, B^{-1}u_2, v_2) - f(t, B^{-1}u_1, v_1)\| \leq \beta(t)(\|u_2 - u_1\| + \|v_2 - v_1\|),$$

$$(t \geq 0, \quad u_1, u_2, v_1, v_2 \in Y), \qquad (\beta)$$

где $\beta(t)$ *— неотрицательная функция при* $t \geq 0$ *и интегрируемая на каждом конечном отрезке* $[0, l], \quad l > 0$.

Тогда для любого обобщенного решения уравнения (4.1) справедлива оценка

$$\|y(t)\|_E \leq 2M(\|y(0)\|_E + \gamma) \exp[2M \int_0^t \beta(\tau) d\tau], \quad (t \geq 0). \qquad (4.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(t)$ — обобщенное решение уравнения (4.1). Тогда $y(t) \in E$ и удовлетворяет уравнению (4.3), из которого получаем следующие два равенства

$$By(t) = C(t)By_0 + S(t)y_0' + \int_0^t S(t - \tau) f(\tau, y(\tau), y'(\tau)) d\tau,$$

$$y'(t) = S(t)By_0 + C(t)y_0' + \int_0^t C(t - \tau) f(\tau, y(\tau), y'(\tau)) d\tau.$$

Эту систему в пространстве $\widetilde{Y}$ можно записать в виде одного равенства

$$\widetilde{u}(t) = \widetilde{T}(t)\widetilde{u}_0 + \int_0^t \widetilde{T}(t - \tau) \widetilde{f}(\tau, \widetilde{u}(\tau)) d\tau,$$

где все обозначения те же, что и в теореме 4.1. Следовательно,

$$\|y(t)\|_E = \|\widetilde{u}(t)\|_{\widetilde{Y}} \leq 2M(\|\widetilde{u}_0\|_{\widetilde{Y}} + \int_0^t \|\widetilde{f}(\tau, \widetilde{u}(\tau))\|_{\widetilde{Y}} d\tau) \leq$$

$$\leq 2M(\|y(0)\|_E + \int_0^t \|f(\tau, \widetilde{u}(\tau)) - \widetilde{f}(\tau, 0)\|_{\widetilde{Y}} d\tau + \int_0^t \|\widetilde{f}(\tau, 0)\|_{\widetilde{Y}} d\tau \leq$$

$$\leq 2M(\|y(0)\|_E + \gamma) + 2M \int_0^t \beta(\tau) \|\widetilde{u}(\tau)\|_{\widetilde{Y}} d\tau =$$

$$= 2M(\|y(0)\|_E + \gamma) + 2M \int_0^t \beta(\tau) \|y(\tau)\|_E d\tau.$$

Из последнего неравенства, в силу леммы 1.6, получаем оценку (4.17).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Если дополнительно к условиям теоремы 4.2 предположить, что

$$\int_0^\infty \beta(t) dt = \beta < +\infty, \tag{4.18}$$

то из (4.17) следует, что $\|y(t)\|_E$ и $\|y(t)\|$ ограничены на $[0, \infty)$. Если же еще предположить, что $f(t, 0, 0) \equiv 0$, то из (4.17) вытекает, что нулевое решение уравнения (4.1) устойчиво в норме $\| \quad \|_E$.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть выполнены условия 1) и 3) теоремы 4.2, кроме условия γ. Тогда, если $y(t)$ и $z(t)$ — два обобщенных решения уравнения (4.1) удовлетворяющих, соответственно, начальным условиям*

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = z'_0$$

и $y_0 - z_0 \in D(B)$, то справедливо неравенство

$$\|y(t) - z(y)\|_E \leq 2M\|y_0 - z_0\| \exp[2M \int_0^t \beta(\tau) d\tau]. \tag{4.19}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x(t) = y(t) - z(t)$. Тогда, очевидно, $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$x(t) = C(t)x_0 + S(t)B^{-1}x'_0 +$$

$$+ \int_0^t S(t-\tau)B^{-1}[f(\tau, y(\tau), y'(\tau)) - f(\tau, z(\tau), z'(\tau))] d\tau,$$

откуда имеем

$$Bx(t) = C(t)Bx_0 + S(t)x_0' +$$

$$+ \int\limits_0^t S(t-\tau)[f(\tau, y(\tau), y'(\tau)) - f(\tau, z(\tau), z'(\tau))]d\tau,$$

$$x'(t) = S(t)Bx_0 + C(t)x_0' +$$

$$+ \int\limits_0^t C(t-\tau)[f(\tau, y(\tau), y'(\tau)) - f(\tau, z(\tau), z'(\tau))]d\tau.$$

Из этих двух равенств получаем, что

$$\|x(t)\|_E \le 2M\|x(0)\|_E + 2M\int_0^t \|f(\tau, y(\tau), y'(\tau)) - f(\tau, z(\tau), z'(\tau))\|d\tau.$$

Но в силу условия (β)

$$\|f(\tau, y(\tau), y'(\tau)) - f(\tau, z(\tau), z'(\tau))\| \le \beta(\tau)\|x(\tau)\|_E.$$

Следовательно,

$$\|x(t)\|_E \le 2M\|x(0)\|_E + 2M\int_0^t \beta(\tau)\|x(\tau)\|_E d\tau.$$

Применяя теперь лемму 1.6, получим (4.19).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Из оценки (4.19) следует, что обобщенное решение уравнения (4.1) единственно. Также из (4.19) вытекает, что любое обобщенное решение уравнения (4.1) устойчиво в норме $\| \ \|_E$, если выполнено условие (4.18).

2. Полученные выше результаты легко приложить для исследования поведения при бесконечном возрастании времени t решений квазилинейных уравнений гиперболического типа, а также некоторых нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа при различных граничных условиях.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим в $L_2(\Omega)$ следующую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} + Lu = F(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t}), \tag{4.20}$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad 0 \le t < \infty, \tag{4.21}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \;\; u'_t|_{t=0} = \psi(x). \tag{4.22}$$

Предположим, что дифференциальное выражение

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}] + a(x)u \tag{4.23}$$

и граничное условие (4.21) порождают в $L_2(\Omega)$ самосопряженный положительно определенный оператор A с областью определения $D(A) = \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ (см. пример 2.1). Тогда $D(A^{1/2}) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Пусть, далее, функция $F(t, x, u_0, u_1, ..., u_n, v)$ определена и непрерывна по совокупности переменных при $t \ge 0$, $x \in \overline{\Omega}$, $-\infty < u_i$, $v < +\infty$ $(i = 0, 1, ..., n)$ и удовлетворяет условию

$$\Big(\int\limits_\Omega |F(t, x, u_0(x), u_1(x), ..., u_n(x), v(x))|^2 dx\Big)^{1/2} \le$$

$$\le \gamma(t) g(\sum_{i=0}^{n} \|u_i\|_{L_2} + \|v\|_{L_2}), \tag{*}$$

где функции $\gamma(t)$ и $g(s)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.1.

Тогда функция $F(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t})$ порождает нелинейный оператор $f(t, u, u')$, действующий из $[0, \infty) \times W_2'(\Omega) \times L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, причем в силу оценки

$$\|A^{1/2}u\| \ge \alpha \|u\|_{W_2'(\Omega)} \quad \alpha = const > 0 \quad (u \in D(A^{1/2})).$$

Оператор $f(t, A^{-\frac{1}{2}}u, v)$ определен при всех $t \ge 0 \quad u, v \in L_2(\Omega)$, непрерывен по совокупности аргументов (t, u, v) и удовлетворяет условию

$$\|f(t, A^{-\frac{1}{2}}u, v)\|_{L_2(\Omega)} \le \gamma(t) g_1(\|u\|_{L_2} + \|v\|_{L_2}), \tag{**}$$

где $g_1(s)$ — функция того же типа, что и $g(s)$.

Таким образом, при выполнении всех выше перечисленных условий, для любого решения задачи (4.20)-(4.22) справедливы все утверждения теоремы 4.1, если только $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, $\quad f(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Получаемая при этом оценка

$$\|u'_t(t,x)\|_{L_2} + \|A^{\frac{1}{2}}u(t,x)\|_{L_2} \le C \quad (t \ge 0)$$

равносильна оценке

$$\|u'_t(t,x)\|_{L_2} + \|u(t,x)\|_{W'_2(\Omega)} \le C_1 \quad (t \ge 0)$$

Аналогичным образом, можно сформулировать условия на правую часть уравнения (4.20), при которых выполняются требования теорем 4.2 и 4.3.

ПРИМЕР 4.2. Можно так же рассмотреть вторую или третью смешанную задачу для уравнения (4.20). Рассмотрим, например, третье краевое условие

$$Bu|_\Gamma \equiv u'_\nu + \sigma(x)u|_\Gamma = 0, \tag{4.24}$$

где $\sigma(x)$ — неотрицательная, ограниченная и измеримая функция на Γ, а u'_ν — производная по нормали. Пусть коэффициенты дифференциального выражения (4.23), кроме условий гладкости (см. пример 2.1), удовлетворяют таким требованиям:

$$a(x) \ge \gamma^2, \quad a_{ij} = \overline{a}_{ji}, \quad \sum a_{ij}\xi_i\overline{\xi}_j \ge \gamma^2 \sum |\xi_i|^2, \quad \gamma = const > 0.$$

тогда (4.23) и (4.24) порождают в $L_2(\Omega)$ самосопряженный положительно определенный оператор A с областью определения $D(A) = W_2^2(\Omega; B)$ — совокупность функций из $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющих граничному условию (4.24) в смысле С. Л. Соболева. При этом, $D(A^{\frac{1}{2}}) = W_2^1(\Omega)$ (см. [5б, 9]). Далее, очевидно, что для $u \in W'_2(\Omega)$

$$\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 = \int_\Omega \Big(\sum_{ij=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} + a|u|^2\Big)dx + \int_\Gamma \sigma(x)|u|^2 dx \ge \gamma^2\|u\|^2_{W'_2}.$$

Если теперь выполнено условие (*), то будет выполнено и условие (**). Таким образом будут справедливы все утверждения теоремы

4.1 и для решений задачи (4.20)-(4.22)-(4.24), если только $\varphi(x) \in D(A)$, $\psi(x) \in W_2^2(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Отметим, что предыдущие рассмотрения нетрудно перенести и на более общее уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L(x, D)u = F(t, x, u, Du, ..., D^k u, u'_t) \tag{4.25}$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u'_t(0, x) = \psi(x),$$

$$B_j u\Big|_\Gamma = 0 \quad j = 1, 2, ..., m, \tag{4.26}$$

где $L(x, D)$ — дифференциальный оператор $2m$-го порядка,

$$|k| = k_1 + k_2 + ... + k_n \leq m, \quad 0 \leq k_i \leq m \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

При этом достаточно потребовать, чтобы $L(x, D)$ и граничные условия (4.26) порождали в $L_2(\Omega)$ самосопряженный положительно-определенный оператор. Относительно функции $F(t, x, u, Du, ..., D^k u, u'_t)$ достаточно предположить, чтобы она была непрерывной по совокупности переменных

$$t \geq 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad -\infty < u, ..., D^k u, u'_t < \infty$$

и удовлетворяла либо условию

$$\|F\|_{L_2} \leq \gamma(t) g\Big(\sum_{i=0}^{n} \|D^i u\|_{L_2} + \|u'_t\|_{L_2}\Big)$$

в случае теоремы 4.1, либо условию Липшица по переменным $u, Du, ..., D^k u, u'_t$ с константой $\gamma(t)$, суммируемой на $[0, l]$, $l > 0$, в случае теорем 4.2 и 4.3, причем в случае теоремы 4.2 нужно еще потребовать, чтобы

$$\int_0^\infty \|F(t, x, 0, ..., 0)\|_{L_2} dt < +\infty.$$

§ 5. ОГРАНИЧЕННОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $y'' + A(t)y = f(t, y, y')$ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ПРИЛОЖЕНИЯ.

1. Рассмотрим в комплексном гильбертовом пространстве H следующее нелинейное дифференциальное уравнение

$$y'' + A(t)y = f(t, y, y'), \quad 0 \le t < \infty \tag{5.1}$$

с начальными условиями (4.2).

Здесь, в отличие от предыдущего параграфа, $A(t)$ $(0 \le t < \infty)$ есть уже семейство линейных, вообще говоря, неограниченных операторов, зависящих от параметра t и действующих в H, $f(t, u, v)$ — нелинейный оператор, действующий из топологического произведения $[0; \infty) \times U \times H$ в H, где U — некоторое линейное множество, плотное в H, а $y(t)$ — функция со значениями в H.

Относительно оператора $A(t)$ будем предполагать следующее:

1^0. При каждом $t \ge 0$ $A(t)$ — самосопряжен и неотрицателен, область определения $D(A(t))$ которого, вообще говоря, зависит от t.

2^0. Положительный квадратный корень $A^{\frac{1}{2}}(t)$ из оператора $A(t)$ имеет постоянную область определения

$$D(A^{\frac{1}{2}}(t)) = D(A^{\frac{1}{2}}(0)) = D(A^{\frac{1}{2}})$$

3^0. Операторная функция $A^{\frac{1}{2}}(t)$ сильно дифференцируема на $D(A^{\frac{1}{2}})$ и для любых $h \in D(A(t))$ выполняется условие

$$2Re(A_t^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)h, h) \le \alpha(t)(A(t)h, h), \tag{5.2}$$

где $\alpha(t)$ — некоторая скалярная функция, непрерывная на $[0, \infty)$.

Напомним, что мы будем понимать под решением задачи (5.1)—(4.2). Решением задачи (5.1)—(4.2) будем называть функцию $y(t)$ со значениями в H, обладающую следующими свойствами:

1) Существуют и сильно непрерывны $y'(t)$ и $y''(t)$, соответственно, при $t \geq 0$ и $t > 0$.

2) Функции $A(t)y(t)$ и $A^{\frac{1}{2}}(t)y'$ сильно непрерывны на $(0;\infty)$.

3) $y(t)$ удовлетворяет уравнению (5.1) для любого $t > 0$ и начальным условиям (4.2) при $t = 0$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Предположим, что $A(t)$ удовлетворяет условиям $1^0 - 3^0$ и что нелинейный оператор $f(t,u,v)$ подчинен оператору $A(t)$ в том смысле, что он отображает множество $[0,\infty)\times D(A^{\frac{1}{2}})\times H$ в H и удовлетворяет неравенству*

$$\|f(t,u,v) - f(t,0,0)\| \leq \beta(t)(\|A^{\frac{1}{2}}(t)u\| + \|v\|), \tag{5.3}$$

$$(t \geq 0, u \in D(A^{\frac{1}{2}}), v \in H),$$

где функции $\beta(t) \geq 0$ и $\|f(t,0,0)\|$ суммируемы на каждом конечном отрезке $[0,\ell], \ell > 0$.

Тогда для любого решения $y(t)$ уравнения (5.1), выходящего из $D(A^{\frac{1}{2}})\times H$, для которого функция $A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)$ сильно дифференцируема на $[0,\infty)$, справедлива оценка

$$\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)} \equiv \|y'(t)\| + \|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\| \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\|y(0)\|_{A^{\frac{1}{2}}(0)} \exp[\frac{1}{2}\int_0^t h(\tau)d\tau] + 2\int_0^t \|f(\tau,0,0)\| \exp[\frac{1}{2}\int_\tau^t h(s)ds]d\tau. \tag{5.4}$$

для всех $t > 0$, где $h(t) = \max\{3\beta(t), \beta(t) + \alpha(t)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(t)$ — решение уравнения (5.1). Тогда функция

$$\varphi(t) = \|y'(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2, \tag{5.5}$$

в силу леммы 1.4 и условия теоремы, дифференцируема на $(0;\infty)$, и ее производная равна

$$\varphi'(t) = 2Re(y'', y') + 2Re(A_t^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)y, y) +$$

$$+2Re(A(t)y(t), y'(t)).$$

Но так как

$$y'' = -A(t)y + f(t, y(t), y'(t))$$

то

$$\varphi'(t) = 2Re(A_t^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)y(t), y(t)) + 2Re(f(t, y(t), y'(t)), y'(t)).$$

откуда, в силу (5.2), получаем

$$\varphi' \le \alpha(t)\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 + 2\|f(t, y(t), y'(t))\|\|y'(t)\|. \tag{5.6}$$

Воспользовавшись следующими элементарными неравенствами

$$2ab \le a^2 + b^2$$

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}} \le \sqrt{a^2+b^2} \le a+b \quad (a \ge 0, b \ge 0)$$

и условием (5.3) преобразуем второе слагаемое правой части неравенства (5.6)

$$2\|f(t, y(t), y'(t))\|\|y'(t)\| \le 2\|f(t, y, y') - f(t, 0, 0)\|\|y'(t)\|+$$

$$+2\|f(t, 0, 0)\|\|y'(t)\| \le 2\beta(t)\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|\|y'(t)\| + 2\beta(t)\|y'(t)\|^2+$$

$$+2\|f(t, 0, 0)\|(\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\| + \|y'(t)\|) \le \beta(t)(\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 + \|y'(t)\|^2)+$$

$$+2\beta(t)\|y'(t)\|^2 + +2\sqrt{2}\|f(t, 0, 0)\|\sqrt{\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 + \|y'(t)\|^2} =$$

$$= \beta(t)\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 + 3\beta(t)\|y'(t)\|^2+$$

$$+2\sqrt{2}\|f(t, 0, 0)\|\sqrt{\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 + \|y'(t)\|^2}.$$

Теперь из неравенства (5.6) имеем

$$\varphi'(t) \le [\alpha(t) + \beta(t)]\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 + 3\beta(t)\|y'(t)\|^2 + 2\sqrt{2}\|f(t, 0, 0)\|\sqrt{\varphi}(t),$$

или

$$\varphi'(t) \le h(t)\varphi(t) + 2\sqrt{2}\|f(t, 0, 0)\|\sqrt{\varphi}(t).$$

Сделаем замену $\varphi(t) = u^2$. Тогда получим

$$2uu' \le h(t)u^2 + 2\sqrt{2}\|f(t,0,0)\|u$$

откуда (так как $u \ge 0$)

$$u' \le \frac{1}{2}h(t)u + 2\sqrt{2}\|f(t,0,0)\|.$$

Из последнего неравенства теперь легко получить, что

$$u(t) \le u(0)\exp[\frac{1}{2}\int_0^t h(\tau)d\tau] + \sqrt{2}\int_0^t \|f(\tau,0,0)\|\exp[\frac{1}{2}\int_0^t h(s)ds]d\tau,$$

или, учитывая, что

$$\frac{\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)}}{\sqrt{2}} \le u(t) \equiv \sqrt{\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 + \|y'(t)\|^2} \le \|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)},$$

имеем

$$\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)} \le \sqrt{2}\|y(0)\|_{A^{\frac{1}{2}}(0)}\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t h(\tau)d\tau\right] +$$

$$+2\int\limits_0^t \|f(\tau,0,0)\|\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t h(s)ds\right]d\tau,$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Если в условиях теоремы 5.1 предположить, что

$$\int\limits_0^\infty h(\tau)d\tau = M < +\infty, \quad \int\limits_0^\infty \|f(t,0,0)\|dt = \gamma < +\infty$$

(очевидно, что $h(\tau) \ge 0$), то из оценки (5.4) следует, что $\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)}$ ограничена на $[0,\infty)$. Если, кроме этого, предположить, что $f(t,0,0) \equiv 0$, то оценка (5.4) примет вид

$$\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)} \le \sqrt{2}\|y(0)\|_{A^{\frac{1}{2}}(0)}\exp[\frac{1}{2}\int_0^t h(\tau)d\tau],$$

откуда следует, что нулевое решение уравнения (5.1) устойчиво в норме $\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)}$, то есть $\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)} < \varepsilon$ для всех $t > 0$ как только

$$\|y(0)\|_{A^{\frac{1}{2}}(0)} < \delta(\varepsilon), \text{ где } \varepsilon > 0,\ 0 \le \delta(\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\exp[-\frac{1}{2}M].$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Если в условиях замечания 5.1 предположить, что оператор $A(t)$ удовлетворяет условию

$$(A(t)h(t), h(t)) \geq \gamma \|h\|^2, \quad h(t) \in D(A(t)) \quad t \geq 0 \tag{5.7}$$

то из оценки (5.4) вытекает, что будет ограниченной и $\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)}$ при $t \geq 0$.

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть $y(t)$ и $z(t)$ — два решения уравнения (5.1) удовлетворяющих, соответственно, начальным условиям*

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0';$$

$$z(0) = z_0, \quad y'(0) = z_0'.$$

Пусть оператор $A(t)$ удовлетворяет условиям $1^0 - 3^0$, а оператор $f(t, u, v)$ подчинен оператору $A(t)$ в том смысле, что множество $[0, \infty) \times D(A^{\frac{1}{2}}) \times H$ отображает в H и удовлетворяет условию

$$\|f(t, u_2, v_2) - f(t, u_1, v_1)\| \leq \beta(t)(\|A^{\frac{1}{2}}(t)[u_2 - u_1]\| + \|v_2 - v_1\|), \tag{5.8}$$

$$(t \geq 0, u_1, u_2 \in D(A^{\frac{1}{2}}), v_2, v_1 \in H),$$

где $\beta(t) \geq 0$ — та же функция, что и в теореме 5.1. Пусть, далее, $z_0 - y_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ и функция $A^{\frac{1}{2}}(t)[z(t) - y(t)]$ сильно дифференцируема на $[0, \infty)$.

Тогда имеет место оценка

$$\|z(t) - y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)} \leq \sqrt{2}\|z(0) - y(0)\|_{A^{\frac{1}{2}}(0)} \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t h(\tau)d\tau\right] \tag{5.9}$$

для всех $t \geq 0$, где $h(t) = max\{3\beta(t), \beta(t) + \alpha(t)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую функцию

$$\psi(t) = \|u'(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}(t)u(t)\|^2,$$

где положено $u(t) = z(t) - y(t)$. Продифференцируем ее в силу тождества

$$u''(t) = -A(t)u(t) + f(t, z(t), z'(t)) - f(t, y(t), y'(t))$$

(дифференцируемость $\psi(t)$ следует из условий теоремы и леммы 1.4).

Тогда получим

$$\psi'(t) = 2Re(A_t^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)u(t), u(t)) +$$

$$+2Re([f(t, z(t), z'(t)) - f(t, y(t), y'(t))], u'(t)).$$

Отсюда, в силу (5.2) и (5.8), имеем:

$$\psi'(t) \leq \alpha(t)\|A^{\frac{1}{2}}(t)u(t)\|^2 + 2\|f(t, z(t), z'(t)) - f(t, y(t), y'(t))\|\|u'(t)\| \leq$$

$$\leq \alpha(t)\|A^{\frac{1}{2}}(t)u(t)\|^2 + 2\beta(t)\|A^{\frac{1}{2}}(t)u(t)\|\|u'(t)\| + 2\beta(t)\|u'(t)\|^2 \leq$$

$$\leq [\alpha(t) + \beta(t)]\|A^{\frac{1}{2}}(t)u\|^2 + 3\beta(t)\|u(t)\|^2 \leq h(t)\psi(t).$$

Следовательно,

$$\psi(t) \leq \psi(0)\exp\Big[\int_0^t h(\tau)d\tau\Big],$$

откуда непосредственно получается требуемая оценка (5.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Из оценки (5.9) вытекает, что решение задачи (5.1) – (4.2) единственно (в условиях теоремы (5.2)). Из этой же оценки следует, что любое решение задачи (5.1) – (4.2) устойчиво в норме $\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)}$, если $\int_0^\infty h(t)dt = M < +\infty$, то есть каково бы ни было $\varepsilon > 0$

$$\|z(t) - y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)} < \varepsilon$$

для всех $t > 0$ как только начальные данные удовлетворяют условию

$$\|z(0) - y(0)\|_{A^{\frac{1}{2}}(0)} < \delta(\varepsilon) \qquad (0 < \delta(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\exp[-\frac{1}{2}M])$$

Для следующего частичного вида уравнения (5.1)

$$y''(t) + A(t)y = B(t, y'(t)) + P(t, y(t)) \tag{5.10}$$

справедлива

ТЕОРЕМА 5.3. *Предположим, что оператор $A(t)$ удовлетворяет условиям $1^0 - 3^0$, и что для нелинейных (вообще говоря,* *неограниченных) операторов* $B(t,v)$ *и* $P(t,u)$ *действующих при каждом* $t \geq 0$ *в* H, *выполнены условия:*

$$2Re(B(t,v),v) \leq \gamma(t)\|v\|^2, \quad v \in D(B) \subset H, \tag{5.11}$$

$$\|P(t,u)\| \leq \beta(t)\|A^{\frac{1}{2}}(t)u\|, \qquad (5.12),$$

где $\beta(t)$ — *функция, определенная на* $[0,\infty)$, *того же типа, что и в предыдущих теоремах, а* $\gamma(t)$ — *некоторая непрерывная функция, определенная при* $t \geq 0$.

Тогда для любого решения $y(t)$ *уравнения (5.1), удовлетворяющего условиям теоремы 5.1, справедлива оценка*

$$\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)} \leq \sqrt{2}\|y(0)\|_{A^{\frac{1}{2}}(0)} \exp[\frac{1}{2}\int_0^t \mu(\tau)d\tau], \tag{5.13}$$

где $\mu(t) = max\{\alpha(t)+\beta(t),\ \gamma(t)+\beta(t)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим снова ту же функцию $\varphi(t)$, что и в теореме 5.1. Продифференцировав ее в силу уравнения (5.1), получим:

$$\varphi'(t) = 2Re(A_t^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)y(t), y(t)) +$$

$$+2Re(P(t,y(t)),y'(t)) + 2Re(B(t,y(t)),y'(t)).$$

Отсюда в силу условий (5.2), (5.11) и (5.12) имеем:

$$\varphi'(t) \leq \alpha(t)\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 + 2\beta(t)\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|\|y'(t)\| +$$

$$+\gamma(t)\|y'(t)\|^2 \leq \alpha(t)\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 + \beta(t)\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 +$$

$$+\beta(t)\|y'(t)\|^2 + \gamma(t)\|y'(t)\|^2 \leq$$

$$\leq [\alpha(t)+\beta(t)]\|A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)\|^2 + [\beta(t)+\gamma(t)]\|y'(t)\|^2.$$

Следовательно,

$$\varphi'(t) \leq \mu(t)\varphi(t)$$

откуда теперь нетрудно получить оценку (5.13).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Если $\int_0^\infty \mu(t)dt = M < +\infty$, то и здесь остаются в силе все утверждения замечаний 5.1 и 5.2. Далее, заметив, что в отличие от $h(t)$, $\mu(t)$ может принимать значения любого знака, можно предположить, что $\int_0^\infty \mu(t)dt = -\infty$. В таком случае, из оценки (5.13) следует, что если $B(t,0) = 0$, то нулевое решение уравнения (5.10) асимптотически устойчиво в норме $\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)}$, то есть $\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)} \to 0$ при $t \to +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Аналогичные априорные оценки решений уравнения (5.10) недавно получены Я.Д. Мамедовым (см. [10 а, б])в случае вещественного гильбертова пространства. При этом предполагалось, что оператор $P(t,u)$ потенциален, а операторы $A(t)$ $(0 \le t < \infty)$ положительно определены и имеют постоянную область определения. Отметим так же, что теорема 1 из [10 а] справедлива и в том случае, когда область определения $D(A(t))$ оператора $A(t)$ зависит от t, но $D(A^{\frac{1}{2}}(t)) = D(A^{\frac{1}{2}}(0))$.

ТЕОРЕМА 5.4. *Пусть $A(t)$ удовлетворяет условиям $1^0 - 3^0$. Пусть $z(t)$ и $y(t)$ — два решения уравнения (5.10), удовлетворяющих условиям теоремы 5.2. Пусть, далее, нелинейные операторы $B(t,v)$ $P(t,u)$, действующие при каждом $t \ge 0$ в H, удовлетворяют условиям:*

$$2Re(B(t,v_2) - B(t,v_1), v_2 - v_1) \le \gamma(t)\|v_2 - v_1\|^2$$

$$(t \ge 0, \quad v_1, v_2 \in D(B) \subset H)$$

$$\|P(t,u_2) - P(t,u_1)\| \le \beta(t)\|A^{\frac{1}{2}}(t)(u_2 - u_1)\|$$

$$(t \ge 0, \quad u_1, u_2 \in D(A^{\frac{1}{2}})).$$

Тогда при всех $t \ge 0$ справедлива оценка

$$\|z(t) - y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)} \le \sqrt{2}\|z(0) - y(0)\|_{A^{\frac{1}{2}}(0)} \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t \mu(\tau)d\tau\right], \qquad (5.14)$$

где $\mu(t)$ — та же функция, что и в теореме 5.3.

Эта же теорема доказывается по той же схеме, что и теорема 5.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Из оценки (5.14) можно вывести такие же следствия, что и из оценки (5.9) (см. замечание 5.3). Кроме того, если $\int_0^\infty \mu(t)dt = -\infty$, то любое решение уравнения (5.10) асимптотически устойчиво в норме $\|y(t)\|_{A^{\frac{1}{2}}(t)}$ в том смысле, что $\|z(t)-y(t)|_{A^{\frac{1}{2}}(t)} \to 0$ при $t \to +\infty$.

2. В качестве примера приложения полученных выше результатов рассмотрим в комплексном пространстве $H = L_2(\Omega)$, где Ω - ограниченная область n-мерного ($n \geq 2$) евклидова пространства с достаточно гладкой границей Γ, следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(t,x)u = \int\limits_\Omega K(t,x,y)g(u(t,y),\frac{\partial u(t,y)}{\partial y_1},...,\frac{\partial u(t,y)}{\partial y_n},\frac{\partial u(t,y)}{\partial t})dy \tag{5.15}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u'_t(0,x) = \psi(x) \tag{5.16}$$

и с одним из краевых условий

$$u|_{\substack{x\in\Gamma \\ t\geq 0}} = 0 \tag{5.17}$$

или

$$Bu \equiv u'_{N_t} + \sigma(t,x)u|_{\substack{x\in\Gamma \\ t\geq 0}} = 0, \tag{5.18}$$

где u'_{N_t} — производная по нормали.

Здесь

$$L(t,x)u = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(t,x)u. \tag{5.19}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

а) Функции $a_{ij}(t,x)$, $\frac{\partial a_{ij}(t,x)}{\partial x_n}$, $a(t,x)$ определены в цилиндре

$Q = [0, \infty) \times \Omega$, измеримы и ограничены при каждом фиксированном t и для всех $t \geq 0$ и $x \in \overline{\Omega}$ удовлетворяет условиям:

$$a_{ij} = \overline{a}_{ji},\ \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\xi_j\overline{\xi_i} \geq \gamma^2 \sum_{i=1}^{n} \mid \xi_i \mid^2,\ a(t,x) \geq \gamma^2,\ \gamma^2 = const > 0. \tag{5.20}$$

б) Функция $\sigma(t,x) \geq 0$ определена при всех $t \geq 0 \vee x \in \Gamma$ и фиксированном t измерима и ограничена на Γ.

в) Функции $a_{ij}(t,x)$, $a(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ дифференцируемы по $t \geq 0$ равномерно относительно $x \in \overline{\Omega}$ $(x \in \Gamma)$, причем существует такая непрерывная на $[0,\infty)$ функция $\alpha(t)$, что для всех $t \geq 0$, $x \in \overline{\Omega}$ (или $x \in \Gamma$ для $\sigma(t,x)$) справедливы неравенства

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\xi_j\overline{\xi_i} \leq \alpha(t) \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\xi_j\overline{\xi}_i, \quad \frac{\partial a}{\partial t} \leq \alpha(t)a(t,x),$$

$$\frac{\partial \sigma(t,x)}{\partial t} \leq \alpha(t)\sigma(t,x).$$

г) Ядро $K(t,x,y)$ определено для всех $t \geq 0$, $x, y \in \Omega$ и удовлетворяет условию

$$\Big(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \mid K(t,x,y) \mid^2 dxdy\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \beta(t)$$

где $\beta(t)$ — неотрицательная функция, суммируемая на каждом конечном отрезке $[0,l]$, $l > 0$.

д) Функция $g(u_0, u_1, ..., u_n, v)$ — непрерывна по совокупности аргументов $-\infty < u_i$, $v < \infty$, $i = 0, 1, ..., n$ и удовлетворяет оценке

$$\mid g(u_0, u_1, ..., u_n, v) \mid \leq b\Big(\sum_{i=0}^{n} \mid u_i \mid + \mid v \mid\Big), \quad b = const > 0.$$

Как следует из работ [5 б] и [9], при выполнении условий а) и б) дифференциальное уравнение (5.19) и краевое условие (5.17) или (5.18) порождают в $L_2(\Omega)$ самосопряженный положительно-определенный оператор $A(t) : (A(t)u,u) \geq \gamma^2\|u\|^2$ для $u \in D(A)$. При этом, в случае краевого условия (5.17) $D(A) = \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, $D(A^{\frac{1}{2}}) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в случае (5.18) $D(A)$ есть множество функций $u(x) \in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяющих условию (5.18), а $D(A^{\frac{1}{2}}) = W_2^1(\Omega)$.

Для обоих краевых условий, если $u(x) \in D(A^{\frac{1}{2}})$, то имеет место оценка

$$\|A^{\frac{1}{2}}(t)u\|_{L_2} \geq \gamma \|u\|_{W_2'}, \quad (t \geq 0). \tag{5.21}$$

Далее, в силу условий (5.20) и в) квадратичная форма

$$(A^{\frac{1}{2}}(t)u, A^{\frac{1}{2}}(t)u) = \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} + a(t,x)|u|^2 \Big) dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} \sigma(t,x)|u|^2 dx$$

дифференцируема по $t \geq 0$ для любого $u = u(x) \in D(A)$, причем

$$2Re(A_t^{\frac{1}{2}}(t) A^{\frac{1}{2}}(t)u, u) = \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} + \frac{\partial a}{\partial t}|u|^2 \Big) dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}|u|^2 dx \leq \alpha(t) \Big[\int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} + a|u|^2 \Big) dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} \sigma |u|^2 dx \Big] = \alpha(t)(A(t)u, u).$$

Из условий г) и д) вытекает, что правая часть уравнения (5.17) порождает в $L_2(\Omega)$ нелинейный оператор

$$f(t,u,v) = \int\limits_{\Omega} K(t,x,y) g(u(y), u'_{y_1}(y), ..., u'_{y_n}, v(y)) dy$$

отображающий множество $[0,\infty) \times W_2'(\Omega) \times L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и удовлетворяющий для всех $t \geq 0$, $u \in D(A^{\frac{1}{2}})$, $v \in L_2(\Omega)$ условию

$$|f(t,u,v)|_{L_2} \leq c\beta(t)(\|A^{\frac{1}{2}}(t)u\|_{L_2} + \|v\|_{L_2}), \ \ c = const > 0.$$

В самом деле, в силу наших предположений и оценки (5.21) имеем

$$\|f(t,u,v)\|_{L_2}^2 = \int\limits_\Omega \left| \int\limits_\Omega K(t,x,y) g(u,u'_{y_1},...,u'_{y_n},v)dy \right|^2 dx \leq$$

$$\leq \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega |K(t,x,y)|^2 dxdy \cdot \int\limits_\Omega |g(u,u'_{y_1},...,u'_{y_n},v)|^2 dy \leq$$

$$\leq \beta^2(t) b^2 \int\limits_\Omega (|u| + \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial y_i}\right| + |v|)^2 dy,$$

откуда

$$\|f(t,u,v)\|_{L_2}^2 \leq b^2(n+2)\beta^2(t)(\|u\|_{W_2'(\Omega)} + \|v\|_{L_2}^2) \leq$$

$$\leq b^2(n+2)\beta^2(t)(\gamma^{-2}\|A^{\frac{1}{2}}(t)u\|_{L_2}^2 + \|v\|_{L_2}^2).$$

Следовательно

$$\|f(t,u,v)\|_{L_2} \leq c\beta(t)(\|A^{\frac{1}{2}}(t)u\|_{L_2} + \|v\|_{L_2}),$$

где

$$c = b\sqrt{(n+2)(1+\gamma^{-2})}.$$

Таким образом, все требования теоремы 5.1 выполняются (здесь $f(t,0,0) \equiv 0$) и поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 5.5. *Если выполнены условия $1^0 - 4^0$, то для любого решения $u(t,x)$ уравнения (5.15), выходящего из $D(A^{\frac{1}{2}}) \times L_2(\Omega)$, для которого существуют смешанные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i}$ для всех $t \geq 0$, $x \in \Omega$ в смысле нормы $L_2(\Omega)$, справедлива оценка*

$$\|u'_t\|_{L_2} + \|u\|_{W_2'} \leq c_1(\|\psi\|_{L_2} + \|\varphi\|_{W_2'}) exp[\int_0^t h(\tau)d\tau],$$

когда $D(A^{\frac{1}{2}}) = \mathring{W}_2'(\Omega)$ и

$$\|u'_t\|_{L_2} + \|u\|_{W_2^1} \leq c_2(\|\psi\|_{L_2} + \|\varphi\|_{W_2'} + \|\varphi\|_{L_2(\Gamma)}) exp[\int_0^t h(\tau)d\tau],$$

когда $D(A^{\frac{1}{2}}) = W_2'(\Omega)$.

Здесь $h(t) = \frac{1}{2}\max\{3c\beta(t), \alpha(t) + c\beta(t)\}$.

Из полученных оценок легко получить условия ограниченности решений и устойчивость нулевого решения уравнения (5.15) в той или иной норме.

§ 6. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ. ПРИЛОЖЕНИЯ

1. В этом параграфе в вещественном гильбертовом пространстве H изучается поведение при $t \to +\infty$ решений следующих уравнений

$$y''(t) + A(t, y') + B(t)P(y) = 0, \tag{6.1}$$

$$y''(t) + A(t, y') + a(t)By + b(t)P(y) = 0 \tag{6.2}$$

с начальными условиями (4.2).

Здесь $A(t, v)$ — некоторый нелинейный (вообще говоря, неограниченный) оператор, действующий при каждом $t \geq 0$ в H с областью определения $D(A)$, плотный в H; $B(t)$ $(0 \leq t < \infty)$ и B — неограниченные самосопряженные операторы в $H, P(u)$ — нелинейный оператор в H; $a(t)$ и $b(t)$ — непрерывные на $[0, \infty)$ скалярные функции; $y(t)$ — функция со значениями в H.

Будем говорить, что оператор $P(u)$ обладает свойством (P), если

1^0. Он определен и непрерывен во всем H.

2^0. Некоторое линейное, плотное в H, множество переводит в $D(B(t))$ — область определения оператора $B(t)$.

3^0. $P(u)$ — потенциален, то есть существует такой вещественный функционал $f(u)$, что для любых $u, h \in H$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(u + th) - f(u)}{t} = (P(u), h),$$

или

$$P(u) = grad\ \ f(u).$$

(Очевидно, что функционал $f(u)$ будет непрерывным в H, так как из непрерывности $P(u)$ следует, что $grad\ \ f(u)$ есть производная функционала $f(u)$ (см. [3])).

4^0. $f(u) \geq L > -\infty$ $(u \in H)$ и $\lim\limits_{R\to\infty}[\min\limits_{\|y\|=R} f(u)] = +\infty$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) Область определения $D(B)$ и область значений $R(B)$ оператора $B(t)$ не зависит от t.

2) $(B(t)h, h > 0)$ для всех $h \in D(B)$, $h \neq 0$, $t \geq 0$.

3) Операторные функции $B(t)$ и $B^{-1}(t)$ сильно дифференцируемы при $t \geq 0$, соответственно на $D(B)$ и $R(B)$, причем при каждом $t \geq 0$ и любом $x \in R(B)$ $[B^{-1}(t)]'x \in D(B)$.

4) $\int\limits_0^t (B'(\tau)h(\tau), h(\tau))d\tau \geq 0$ $(t > 0)$ для любой непрерывной функции $h(t)$ со значениями в $D(B)$.

5) При каждом $t \geq 0$ $A(t, x(t)) \in R(B)$, где $x(t) \in D(A) \subset H$ и

$$\int\limits_0^t (B^{-1}(\tau)A(\tau, x(\tau)), x(\tau))d\tau \geq 0 \quad (t > 0)$$

для любой непрерывной функции $x(t)$, со значениями в $D(A)$.

6) Оператор $P(u)$ обладает свойством (P).

Тогда любое решение $y(t)$ уравнения (6.1), для которого $y'(t) \in R(B)$ при всех $t \geq 0$, ограничено на $[0, \infty)$, а для производной $y'(t)$ справедлива оценка

$$\|B^{-\frac{1}{2}}(t)y'(t)\| \leq c = const < +\infty, \quad (t \geq 0). \qquad (*)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(t)$ — решение уравнения (6.1) Рассмотрим функцию

$$g(t) = (B^{-1}(t)y'(t), y'(t)) + 2f(y(t)). \qquad (6.3)$$

Функция $g(t)$ дифференцируема при всех $t > 0$, так как первое слагаемое правой части (6.3) дифференцируемо, в силу условий теоремы и лемм 1.2 и 1.3, а $f(y(t))$ дифференцируема по условию. Нетрудно убедиться, что производная $g'(t)$ в силу уравнения (6.1) равна

$$g'(t) = ([B^{-1}(t)]'y'(t), y'(t)) - 2(B^{-1}(t)A(t, y'(t)), y'(t)).$$

Интегрируя это равенство от 0 до $t > 0$, получим

$$g(t) = g(0) + \int_0^t ([B^{-1}(\tau)]'y'(\tau), y'(\tau))d\tau - 2\int_0^t (B^{-1}(\tau)A(\tau, y'(\tau)), y'(\tau))d\tau.$$

В силу условия 5) второй интегральный член справа неположителен. Покажем, что и первый интегральный член неположителен.

Так же, как и в теореме 2.2, показывается, что

$$[B^{-1}(t)]'x = -B^{-1}(t)B'(t)B^{-1}(t)x, \quad x \in R(A).$$

Тогда в силу условия 4) и самосопряженности $B^{-1}(t)$ имеем

$$\int_0^t ([B^{-1}(\tau)]'y'(\tau), y'(\tau))d\tau = -\int_0^t (B^{-1}(\tau)B'(\tau)B^{-1}(\tau)y'(\tau), y'(\tau))d\tau =$$

$$= -\int_0^t (B'(\tau)B^{-1}(\tau)y'(\tau), B^{-1}(\tau)y'(\tau))d\tau \leq 0.$$

Таким образом, получаем, что $g(t) \leq g(0)$, или

$$\|B^{-\frac{1}{2}}(t)y'(t)\|^2 + 2f(y(t)) \leq \|B^{-\frac{1}{2}}(0)y_0'\|^2 + 2|f(y_0)|, \ (t \geq 0).$$

Отсюда следует, что

$$\|B^{-\frac{1}{2}}y'(t)\| \leq C < +\infty, \ (t \geq 0),$$

где $C = \sqrt{\|B^{-\frac{1}{2}}(0)y_0'\|^2 + 2|f(y_0)|}$ и что $f(y(t)) \leq 2^{-1}C^2, \quad (t \geq 0)$.

Из последнего неравенства и условия 4^0 следует, что $\|y(t)\|$ ограничена на $[0, \infty)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6.2. *Предположим, что выполнены условия:*

1) Оператор $P(u)$ обладает свойством (P).

2) При каждом $t \geq 0$ $B(t)$ — самосопряженный, ограниченный оператор в H.

3) Оператор-функция $B(t)$ слабо дифференцируема при $t \geq 0$, причем

$$\int_0^\infty \|B'(t)\|dt = K < \infty.$$

4) Существуют такие числа $M \geq m > 0$, *что для всех* $t \geq 0$ *и* $h \in H \quad m\|h\|^2 \leq (B(t)h, h) \leq M \leq \|h\|^2$.

5)$2(B^{-1}(t)A(t,v),v) \geq -\gamma(t)\|v\|^2, \;\; v \in D(A), \;\; t \geq 0$, *причем*

$$\int_0^\infty \gamma^+(t)dt = \gamma < \infty,$$

где $\gamma^+(t)$ *— неотрицательная часть функции* $\gamma(t)$.

Тогда все решения уравнения (6.1) ограничены на $[0,\infty)$ *вместе с первыми производными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова мы рассмотрим функцию $g(t)$, определяемую по формуле (6.3). В силу наших предположений и лемм 1.2 и 1.3, она дифференцируема при $t > 0$ и производная ее в силу уравнения (6.1) удовлетворяет оценке

$$g'(t) = -(B^{-1}(t)B'(t)B^{-1}(t)y'(t), y'(t)) - 2(B^{-1}(t)A(t, y'(t)), y'(t)) \leq$$

$$\leq \|B^{-1}(t)\|^2\|B'(t)\|\|y'(t)\|^2 + \gamma(t)\|y'(t)\|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{m^2}\|B'(t)\|\|y'(t)\|^2 + \gamma^+(t)\|y'(t)\|^2 \leq \sigma(t)\|y'(t)\|^2,$$

где $\sigma(t) = \frac{1}{m^2}\|B'(t)\| + \gamma^+(t)$.

Интегрируя последнее неравенство от 0 до $t > 0$ получим

$$g(t) \leq g(0) + \int_0^t \sigma(\tau)\|y'(\tau)\|^2 d\tau. \tag{6.4}$$

Вспоминая, чему равно $g(t)$ и учитывая условие 4) теоремы и ограниченность снизу функционала $f(u)$ получим, что

$$g(t) = (B^{-1}(t)y'(t), y'(t)) + 2f(y(t)) \geq \frac{1}{M}\|y'(t)\|^2 + L.$$

Таким образом, из (6.4) получаем, что

$$\frac{1}{M}\|y'(t)\|^2 + L \leq g(0) + \int_0^t \sigma(\tau)\|y'(\tau)\|^2 d\tau,$$

или

$$\|y'(t)\|^2 \leq C_0 + M\int_0^t \sigma(\tau)\|y'(\tau)\|^2 d\tau,$$

где $C_0 = M|g(0) - L|$, откуда по лемме 1.6

$$\|y'(t)\|^2 \leq C_0 \exp(M \int_0^t \sigma(\tau) d\tau), \quad t \geq 0.$$

Следовательно, в силу того, что $\int_0^\infty \sigma(\tau)d\tau < +\infty$

$$\|y'(t)\|^2 \leq C_1 < +\infty \quad (t \geq 0).$$

Теперь из неравенства (6.4) следует, что

$$(B^{-1}(t)y'(t), y'(t)) + 2f(y(t)) \leq g(0) + C_1 \int_0^t \sigma(\tau)d\tau$$

или, так как $(B^{-1}(t)y'(t), y'(t)) \geq 0$, то $f(y(t)) \leq C_2 < +\infty$ для всех $t \geq 0$. Поэтому $\|y(t)\| \leq C_3 = Const < +\infty, \ \ t \geq 0$.
Теорема доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Если $A(t, y') = A(t)y', \quad B(t) = b(t)$ — скалярная функция, то теоремы 1 и 2 превращаются в соответствующие теоремы З.Б. Сеидова [12].

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. В теоремах 6.1 и 6.2 можно допустить, что оператор $A(t, y')$ зависит и от y, если только оператор $A(t, y, y')$ будет удовлетворять тем же условиям, что и оператор $A(t, y')$.

ТЕОРЕМА 6.3. *Предположим, что*
1) Функция $a(t) > 0$ и монотонно возрастает на $[0, \infty)$.
2) При всех $t \geq a_0 \geq 0$ $\ \frac{b(t)}{a(t)} \geq b_0 > 0$ и $\bigvee\limits_{a_0}^{\infty} \frac{b(t)}{a(t)} < +\infty$.
3) B — самосопряженный, постоянный (вообще говоря, неограниченный) оператор в H, причем $(Bh, h) \geq 0$ для всех $h \in H$.
4) $A(t, x(t), x(t)) \geq 0$ для всех $x(t) \in D(A)$, $t \geq 0$.
5) $P(u)$ — обладает свойством (P), причем $L = 0$.

Тогда для любого решения $y(t)$ уравнения (6.2) справедливы оценки

$$\|y(t)\| \leq C_1, \ \ \|B^{\frac{1}{2}}y(t)\| \leq C_2, \ \ \|y'(t)\| \leq C_2\sqrt{a(t)} \quad (t \geq t_0 \geq 0),$$

где $C_1.C_2$ — некоторые постоянные, а t_0 — достаточно большое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(t)$ — решение уравнения (6.2). Умножив тождество (6.2) на $2\frac{y'(t)}{a(t)}$, получим

$$2\frac{(y''(t), y'(t))}{a(t)} + 2\frac{(A(t, y'(t)), y'(t))}{a(t)} + 2(By(t), y'(t)) +$$

$$+2\frac{b(t)}{a(t)}(p(y(t)), y'(t)) = 0$$

или, учитывая условия 1), 5) теоремы и что

$$2(By(t), y'(t)) = \frac{d}{dt}(B^{\frac{1}{2}}y(t), B^{\frac{1}{2}}y(t))$$

(последнее тождество следует из того, что $y'(t) \in D(B^{\frac{1}{2}})$ и функция $B^{\frac{1}{2}}y'(t)$ непрерывна, по определению решения), имеем

$$\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}\|y'(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\|B^{\frac{1}{2}}y(t)\|^2 + 2\frac{b(t)}{a(t)}(P(y(t)), \frac{dy(t)}{dt}) \le 0.$$

Интегрируя это неравенство от некоторого $t_0 \ge a_0$, которое подберем ниже, до $t > t_0$, получим

$$\int\limits_{t_0}^{t} a^{-1}(t)d\|y'(t)\|^2 + \|B^{\frac{1}{2}}y(t)\|^2 - \|B^{\frac{1}{2}}y(t_0)\|^2 +$$

$$+2\int\limits_{t_0}^{t} \frac{b(t)}{a(t)}(grad\ \ f(y(t)), dy(t)) \le 0$$

или, после интегрирования по частям и переносе постоянных и интегральных членов в правую часть неравенства, будем иметь

$$a^{-1}(t)\|y'(t)\|^2 + \|B^{\frac{1}{2}}y(t)\|^2 + 2\frac{b(t)}{a(t)}f(y(t)) \le$$

$$\le \|B^{\frac{1}{2}}y(t_0)\|^2 + a^{-1}(t_0)\|y'(t_0)\|^2 + 2\frac{b(t_0)}{a(t_0)}f(y(t_0)) + \tag{6.5}$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} \|y'(\tau)\|^2 da^{-1}(\tau) + 2\int\limits_{t_0}^{t} f(y(\tau))d\left[\frac{b(\tau)}{a(\tau)}\right].$$

Обозначим совокупность постоянных членов правой части (6.5) через C_0. Очевидно, что $C_0 \geq 0$. Так как $a^{-1}(t)$ монотонно убывает, то

$$\int\limits_{t_0}^{t} \|y'(\tau)\|^2 da^{-1}(\tau) \leq 0.$$

Поэтому неравенство (6.5) можно записать в виде

$$a^{-1}(t)\|y'(t)\|^2 + \|B^{\frac{1}{2}}y(t)\|^2 + 2\frac{b(t)}{a(t)}f(y(t)) \leq C_0 + 2\int_{t_0}^{t} f(y(\tau))d\left[\frac{b(\tau)}{a(\tau)}\right]. \tag{6.6}$$

Предположим, что t_0 выбрано настолько большим, что для всех $t \geq t_0$ одновременно выполняются неравенства

$$\frac{b(t)}{a(t)} \geq b_0, \qquad \bigvee_{t}^{\infty} \frac{b(t)}{a(t)} \leq \frac{b_0}{2}.$$

Тогда из (6.6) получим, что

$$2b_0 f(y(t)) \leq C_0 + 2\max_{t_0 \leq \tau \leq t} f(y(\tau)) \bigvee_{t_0}^{t} \frac{b(t)}{a(t)} \tag{6.7}$$

Так как функция $f(y(\tau))$ непрерывна на $[t_0, t]$, то существует точка $t^* \in [t_0, t]$ такая, что

$$N = f(y(t^*)) = \max_{t_0 \leq \tau \leq t} f(y(\tau)).$$

Положим в (6.7) $t = t^*$. Тогда $2b_0 N \leq C_0 + Nb_0$, откуда $N \leq C_0 b_0^{-1}$, или $f(y(\tau)) \leq C_0 b_0^{-1}$ для всех $\tau \in [t_0, t]$. Но так как t — произвольное число ($> t_0$) и $C_0 b_0^{-1}$ не зависит от t, то

$$f(y(t)) \leq C_0 b_0^{-1} \text{ для всех } t \geq t_0.$$

Из последнего неравенства следует, что для всех $t \geq t_0$

$$\|y(t)\| \leq C_1 = const < +\infty.$$

Теперь из (6.6) непосредственно видно, что для всех $t \geq t_0$

$$\|B^{\frac{1}{2}}y(t)\| \leq C_2, \;\; \|y'(t)\| \leq C_2\sqrt{a(t)} \;\; (C_2 = 2C_0).$$

Теорема доказана.

2. Приведем теперь некоторые примеры, к которым применимы доказанные выше теоремы.

а) Пусть $H = R^{(n)}$ — n-мерное вещественное евклидово пространство. Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} + B(t)A(t,\dot{x}) + B(t)P(x) = 0 \quad (0 \le t < \infty) \tag{6.8}$$

где, как обычно,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B(t)} = \begin{pmatrix} b_{11}(t), \ldots, b_{1n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}(t), \ldots, b_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A(t,\dot{x})} = \begin{pmatrix} a_1(t,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n(t,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P(x)} = \begin{pmatrix} g_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая (в силу теоремы 6.1)

ТЕОРЕМА 6.4. *Предположим, что,*

1) *Вещественная симметрическая матрица $B(t)$ с дифференцируемыми на $[0,\infty)$ элементами такова, что при всех $h \in R^{(n)}$, $h \neq 0$ и $t \ge 0$, $(B(t)h,h) > 0$ и $(B'(t)h,h) \ge 0$.*

2) *При любом $h \in R^{(n)}$ и $t \ge 0$*

$$(A(t,h),h) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t,h_1,...,h_i,...,h_n)h_i \ge 0.$$

3) *Существует непрерывно дифференцируемая функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ такая, что $g_i(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ и*

$$\lim_{R\to+\infty}\big[\min_{\|x\|=R} f(x_1,\ldots,x_n)\big] = +\infty, \quad (\|x\| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}).$$

Тогда любое решение $x(t)$ системы (6.8) ограничено на $[0,\infty)$, а производная $\dot{x}(t)$ удовлетворяет оценке (*).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Если в системе (6.8) $A(t,\dot{x}) \equiv 0$, $B(t)$ — диагональная матрица, то из теоремы 6.4 получаем теоремы 1 и 3 Ю.А. Клокова [18 а]. Если же $A(t,\dot{x}) = A(t)\dot{x}$, где $A(t)$ — неотрицательная матрица, а $B(t)$ — диагональная, то теорема 6.4 превращается в теорему 1 из [18 б].

ТЕОРЕМА 6.5. *Пусть вектор-функция $P(x)$ удовлетворяет условию 3) теоремы 6.4. Пусть вещественная симметрическая матрица $B(t)$ с дифференцируемыми на $[0,\infty)$ элементами удовлетворяет условиям*

$$m\|h\|^2 \le (B(t)h,h) \le M\|h\|^2 \ \ (m>0), \ \ h \in R^{(n)}, \ \ t \ge 0,$$

$$\int_0^\infty \|B'(t)\|dt < +\infty.$$

Пусть, наконец, вектор-функция $A(t,h)$ удовлетворяет условию

$$(A(t,h),h) \ge -\gamma(t)\|h\|^2, \ \ t \ge 0, \ \ h \in R^{(n)},$$

$$\int_0^\infty \gamma^+(t)dt < +\infty.$$

Тогда, в силу теоремы 6.2, все решения системы (6.8) ограничены на $[0,\infty)$ вместе с первыми производными.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Если $A(t,\dot{x}) = A(t)\dot{x}$ и $A(t)$ — неотрицательная матрица при всех $t \ge 0$, а $B(t)$ — диагональная матрица, то теорема 6.5 превращается в теорему 2 из [2 б].

б) Пусть $H = L_2(0,1)$. Рассмотрим в этом пространстве следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(t)\frac{\partial u}{\partial t} + g(x,u(t,x)) + \int_0^1 K(t,x,y)g(y,u(t,y))dy = 0 \qquad (6.9)$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1^0. $a(t)$ — неотрицательная и непрерывная на $[0,\infty)$ функция.

2^0. $P(v) \equiv g(x, v(x))$ — непрерывный оператор Немыцкого [3], действующий из $L_2(0,1)$ в $L_2(0,1)$, такой, что

$$\int\limits_0^u g(x,v)dv \geq b_0|u|^2 - b_1(x)|u|^\alpha - b_2(x), \quad (-\infty < u < \infty),$$

где

$$b_0 = const > 0,\ 0 < \alpha < 2,\ 0 \leq b_1(x) \in L_\gamma(0,1),$$
$$\gamma = \frac{2}{2-\alpha},\ 0 \leq b_2(x) \in L_1(0,1).$$

3^0. Вещественная функция $K(t,x,y)$ определена и непрерывна при всех $t \geq 0, \quad 0 \leq x, y \leq 1$, имеет частную производную $K'_t(t,x,y)$, которая при всех $t \geq 0$ порождает в $L_2(0,1)$ неотрицательный линейный оператор.

4^0. Интегральный оператор

$$K(t)u = \int_0^1 K(t,x,y)u(y)dy$$

при любом $t \geq 0$ является самосопряженным в $L_2(0,1)$, причем наименьшее его собственное значение $\lambda_1(t) \geq -1 + \epsilon \quad (\epsilon \geq 0)$ при всех $t \geq 0$.

Из условия 2^0 следует, что оператор $P(v)$ определен и непрерывен по всем $L_2(0,1)$ и является потенциальным, причем потенциал $f(u)$ определяется по формуле (см. [3])

$$f(u) = \int_0^1 dx \int_0^{u(x)} g(x,v)dv.$$

Покажем, что функционал $f(u)$ удовлетворяет условию 4^0 свойства (P). В самом деле,

$$f(u) \geq \int_0^1 b_0|u(x)|^2dx - \int_0^1 b_1(x)|u(x)|^\alpha dx - \int_0^1 b_2(x)dx.$$

Обозначим $\int_0^1 b_2(x)dx = b_2, \quad (\int_0^1 [b_1(x)]^\gamma dx)^{\frac{1}{\gamma}} = b_1$. Тогда

$$\int_0^1 b_1(x)|u(x)|^\alpha dx \leq (\int_0^1 [b_1(x)]^\gamma dx)^{\frac{1}{\gamma}} (\int_0^1 |u|^2dx)^{\frac{\alpha}{2}} = b_1\|u\|^\alpha_{L_2}.$$

Поэтому

$$f(u) \geq b_0|u|_{L_2} - b_1|u|^{\alpha}_{L_2} - b_2,$$

откуда следует наше утверждение.

Из условий 3^0 и 4^0 вытекает, что оператор $B(t) = J + K(t)$ удовлетворяет соответствующим требованиям теоремы 6.1. В частности, из условия 4^0 следует, что интегральное уравнение

$$B(t)v = \int_0^1 K(t,x,y)v(y)dy + v(x) = \psi(x) \tag{6.10}$$

при любом $t \in [0,\infty)$ и любой функции $\psi(x) \in L_2(0,1)$ имеет единственное решение $V_t(x)$, представимое в виде

$$V_t(x) = B^{-1}(t)\psi \equiv \psi(x) + \int_0^1 \Gamma(t,x,y)\psi(y)dy,$$

где $\Gamma(t,x,y)$ — резольвента интегрального уравнения (6.10).

Далее, так как $A(t,v) = a(t)v$ и $B^{-1}(t)$ — самосопряженный неотрицательный оператор, то очевидно, что и оператор $A(t,v)$ удовлетворяет требованиям теоремы 6.1.

Таким образом, установлена следующая

ТЕОРЕМА 6.6. *Если выполнены условия $1^0 - 4^0$, то для любой функции $u(t,x)$, удовлетворяющей уравнению (6.9) при всех $t \geq 0$ и $x \in [0,1]$, справедливы оценки:*

$$\int_0^1 |u(t,x)|^2 dx \leq C_2 < +\infty$$

$$\|B^{-\frac{1}{2}}(t)u_t'(t,x)\|^2_{L_2} \equiv \int_0^1 \left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|^2 dx +$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \Gamma(t,x,y)\frac{\partial u(t,y)}{\partial t}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}dydx \leq C_2 < +\infty. \tag{6.11}$$

В частности, если при каждом $t \geq 0$ все собственные значения ядра $\Gamma(t,x,y)$ неотрицательны, то из оценки (6.11) следует, что $\|u_t'(t,x)\|_{L_2(0,1)}$ ограничена на $[0,\infty)$.

в) В качестве примера приложения теоремы 6.3 рассмотрим в вещественном пространстве $H = L_2(\Omega)$ следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a(t)Lu+b(t)g(x,u)+\int\limits_{\Omega} K(t,x,y)\frac{\partial u(t,y)}{\partial t}dy+\varphi(t,u'_t)=0 \quad (6.12)$$

с условиями

$$u(0,x)=\varphi(x), \quad u'_t(0,x)=\psi(x), \quad u\Big|_{\Gamma}=0 \ \ (t\geq 0), \qquad (6.13)$$

где

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+c(x)u. \qquad (6.14)$$

Предположим, что дифференциальное выражение (6.14) и граничное условие $u|_{\Gamma}=0$ порождает самосопряженный неотрицательный оператор B (см., пример 2.1). Пусть скалярные функции $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют соответствующим условиям теоремы 6.3.

Предположим, далее, что $K(t,x,y)$ при каждом $t\geq 0$ порождает неотрицательный оператор в $L_2(\Omega)$ и что $\varphi(t,v)v\geq 0$ для всех $t\geq 0$.

Предположим, наконец, что $P(u)=g(x,u(x))$ есть непрерывный оператор Немыцкого, действующий в $L_2(\Omega)$ такой, что

$$\int\limits_0^u g(x,v)dv\geq c|u|^2, \quad -\infty<u<\infty, \quad c=const>0.$$

Тогда для уравнения (6.12) будут выполнены все условия теоремы 6.3, а следовательно, при $t\to+\infty$ решение $u(t,x)$ задачи (6.12) – (6.13) будет ограничено вместе с частными производными по x_k в норме $L_2(\Omega)$, а $\|u'_t(t,x)\|_{L_2(\Omega)}$ может расти при $t\to+\infty$, но не быстрее, чем $\sqrt{a(t)}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Крейн С.Г. О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, вып. 3(25). – С. 166-169.

2. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ, 1962. – 832 с.

3. Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 345 с.

4. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев ; Под ред. О.А. Олейник, 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 333 с.

5. Ладыженская О.А. а) О решении нестационарных операторных уравнений. // Матем. сб. 1956. Том 39 (81). No 4. б) О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики. // Матем. сб. 1958. ТОм 45(87). No 2.

6. Phillips R.S. Perturbation theory for semi groups of linear operators. // Trans Am Math for. 1953. Vol. 74. No 2.

7. Крейн С.Г. О классах корректности для некоторых граничных задач. // Доклады АН СССР. 1957. Том 114. No 6. С. 1162-1165.

8. Крейн С.Г., Соболевский П. Е. Дифференциальные уравнения с абстрактным эллиптическим оператором в гильбертовом пространстве. // Доклады АН СССР. 1958. Том 118. No 2. С. 233-236.

9. Соболевский П.Е. О дифференциальных уравнениях первого порядка в гильбертовом пространстве с переменным положительно определенным самосопряженным оператором, дробная степень которого имеет постоянную область определения. // Доклады АН СССР. 1958. Том 123. No 6. С. 984-987.

10. а) Мамедов Я.Д. О некоторых свойствах решений нелинейных уравнений гиперболического типа в гильбертовом пространстве. // Доклады АН СССР. 1964. Том 158. No 1. С. 45-48. б) Мамедов Я.Д. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных операторных уравнений. Автореферат докторской диссертации. Ростов-на-Дону, 1965.

11. Якубов С.Я. Исследование задачи Коши для эволюционных уравнений гиперболического типа. // Доклады АН Азербайджанской ССР. 1964. Том 20. No 4. С. 3-6.

12. Сеидов З.Б. Исследование решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. // Ученые записки Азербайджанского ГУ. Сер. физ. мат. и хим. наук. 1962. No 4. С. 49.

13. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В пяти томах. Том 5. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1974. 657 с.

14. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Перевод с английского. Изд.2. – М.: URSS, 2003. 216 с.

15. Лидский В.Б. О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений $y" + P(t)y = Ay$. // Доклады АН СССР. 1954. Том 95. No 2. С. 217-220.

16. Borg G. Bounded solutions of a system of differential equations. // Ark. Mat. Astr. Fys. 1948. Band 34B. No 24. 7 pp.

17. Камынин Л.И. Об ограниченности решений дифференциального уравнения $y'' + F(x)y = 0$. // Вестник МГУ. Сер. физ.-матем. 1951. No 5. С. 3-12.

18. Клоков Ю.А. а) Некоторые теоремы об ограниченности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. // УМН. 1958. Том 13. Вып. 2(80). С. 189-194. б) Некоторые теоремы об ограничен-

ности и устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида $\ddot{x}_i + a_i(t) \sum\limits_{k=0}^{n} b_{ik}(t)\dot{x}_k + a_i(t)\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$. // Научные доклады высшей школы. 1958. No 4. С. 55.

19. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир, 1965. 276 с.

20. Мамий К.С. 1) а) Об ограниченности решений линейного однородного уравнения второго порядка в гильбертовом и банаховом пространствах. // Украин. матем. журнал. 1965. Том 17. No 6. б) Об ограниченности решений линейного однородного уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. // Лит. мат. сб. 1965. Том 5. No 4. в) Об ограниченности решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве. // Доклады АН УССР. 1966.

2) Об ограниченности и устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве. // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1966.

Об ограниченности решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве. // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1967.

3) Об ограниченности решений некоторого нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. // Труды ФОРА. 2008. No 13. С. 34-43.

Содержание первой части

стр.

ЧАСТЬ II

О РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕРАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее удобных и часто встречающихся методов решения смешанных задач математической физики является метод Фурье. Однако, область его применения, как правило, ограничивается уравнениями с разделяющимися переменными. По-видимому впервые метод Фурье был применен к решению уравнений, не допускающих разделения переменных в работе [1]. Начиная с 1952 года появляется ряд работ З.И. Халилова, посвященных решению обобщенным методом Фурье ряда физических задач: уравнение колебания струны в среде с переменным коэффициентом сопротивления, уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом теплоотдачи [2] и других. Следует отметить, что методы, развитые З.И. Халиловым, требовали жестких ограничений при доказательстве теоремы существования и не давали доказательства теоремы единственности. В работах Ю.Ф. Коробейника была решена обобщенным методом Фурье смешанная задача для более общих уравнений в частных производных. Из им полученных общих теорем существования и единственности следует, что в уравнениях, рассмотренных З.И. Халиловым, можно значительно ослабить требования на начальные функции и коэффициенты уравнения.

В работе [4] обобщенный метод Фурье был применен к решению задачи Коши для операторного уравнения первого порядка в абстрактном гильбертовом пространстве.

Мы будем рассматривать задачу Коши для операторного уравнения 3-го порядка:

$$\frac{d^3U}{dt^3} + s_1\frac{d^2U}{dt^2} + s_2(t)\frac{dU}{dt} + s_3(t)U = f(t), \quad 0 \le t \le l.$$

Здесь s_1 — положительно-определенный оператор в гильбертовом пространстве; $s_2(t)$ и $s_3(t)$ — два семейства линейных операторов, зависящих от параметра t и подчиненных в определенном, указанном ниже, смысле оператору s_1.

Для этого уравнения дается определение обобщенного решения, аналогичное определению обобщенного решения О.А. Ладыженской для уравнения первого порядка [5]. Обобщенное решение разыскивается методом Фурье. А, именно, пусть $\{V_k\}$ — система собственных элементов оператора s_1 (известно, что эта система существует [6]). Тогда решение представляется в виде ряда Фурье по элементам V_k:

$$U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) V_k.$$

Определение коэффициентов Фурье $f_k(t)$ приводит к бесконечной системе линейных дифференциальных уравнений, которая изучается как операторное уравнение в определенном функциональном пространстве.

Далее, показывается, что функции $f_k(t)$ составляют последовательность абсолютно-непрерывных функций с абсолютно-непрерывными производными до 2-го порядка включительно.

С помощью бесконечных систем доказывается теорема существования и единственность решения операторного уравнения, исследуется характер гладкости обобщенного решения и, наконец, дается обоснование метода Галеркина для решения данного уравнения.

Метод Фурье не является единственным методом изучения абстрактных операторных уравнений. Весьма общие и мощные методы изучения операторных уравнений 1-го и 2-го порядков разработаны О.А. Ладыженской [5], М.И. Вишиком [7], С.Г. Крейном и М.А. Красносельским [8]. Эти методы можно применить и к уравнениям высших порядков, однако никаких опубликованных результатов в этом направлении автору пока не известно.

Данный раздел книги посвящен профессору Коробейнику Юрию Федоровичу, моему научному руководителю по дипломной работе. Считаю своим приятным долгом поблагодарить Ю.Ф. Коробейника за прекрасное руководство и научное общение.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим совокупность непрерывных функций $U(t)$, определенных на отрезке $0 \le t \le l$; значения этих функций суть элементы H, где H — полное сепарабельное гильбертово пространство, $\|\cdot\|$ — норма в нем. Введем скалярное произведение

$$(U,V)_1 = \int_0^l (U(t),V(t))dt,$$

где (U,V) — скалярное произведение в H. Обозначим через H_1 гильбертово пространство, полученное замыканием этой совокупности по введенному скалярному произведению.

Мы будем исследовать методом Фурье операторное уравнение

$$\frac{d^3U}{dt^3} + s_1\frac{d^2U}{dt^2} + s_2(t)\frac{dU}{dt} + s_3(t)U = f(t) \tag{1}$$

при выполнении следующих начальных условий:

$$U(0) = \varphi_0, \quad \left.\frac{dU}{dt}\right|_{t=0} = \psi_0, \quad \left.\frac{d^2U}{dt^2}\right|_{t=0} = q_0. \tag{2}$$

В уравнении (1) s_1 — самосопряженный положительно-определенный оператор, который действует в пространстве H и имеет плотную в нем область определения $D(s_1)$; $s_2(t)$ и $s_3(t)$ являются семействами линейных операторов в H, зависящих от параметра t.

Обозначим через $s_1^{\frac{1}{2}}$ корень квадратный из положительного оператора s_1; в функциональном анализе (9) доказывается, что $s_1^{\frac{1}{2}}$ тоже положительный оператор. Область определения $D(s_1^{\frac{1}{2}})$ оператора $s_1^{\frac{1}{2}}$ получается замыканием $D(s_1)$ по скалярному произведению:

$$(U,V)_2 = (s_1^{\frac{1}{2}}U, s_1^{\frac{1}{2}}V).$$

Так как $D(s_1^{\frac{1}{2}}) \supset D(s_1)$, то множество $D(s_1^{\frac{1}{2}})$ плотно в H. В книге С.Г. Михлина [6], при некоторых ограничениях, на которых мы здесь не останавливаемся, доказывается вариационными методами существование бесчисленного множества собственных элементов V_n и соответствующих им собственных чисел λ_n^2; элементы V_n принадлежат $D(s_1^{\frac{1}{2}})$ и удовлетворяют тождеству

$$(s_1^{\frac{1}{2}}V, s_1^{\frac{1}{2}}V_n) = \lambda_n^2(V, V_n), \tag{3}$$

где V - произвольный элемент из $D(s_1^{\frac{1}{2}})$. Система $\{V_n\}$ полна в $D(s_1^{\frac{1}{2}})$. Следовательно, она полна и в H. Будем считать, что последовательность V_n ортонормирована в метрике H.

Линейные операторы $s_2(t)$ и $s_3(t)$ подчинены оператору s_1 в следующем смысле: почти для всех t из $[0, l]$

$$D(s_2) \supset D(s_1^{\frac{1}{2}}, \quad D(s_3) \supset D(s_1^{\frac{1}{2}}$$

и

$$(s_i(t)U(t), s_i(t)U(t)) \leq K(s_1^{\frac{1}{2}}U, s_1^{\frac{1}{2}}U), \quad (i = 2, 3),$$

где K — постоянное число, независящее от t, $U(t)$ — произвольный элемент H_1, принадлежащий почти для всех t множеству $D(s_1^{\frac{1}{2}})$.

Предположим еще, что если $V(t)$ — произвольный элемент H_1, принадлежащий почти для всех t $D(s_1^{\frac{1}{2}})$, то

$$s_2(t)V(t) \in H_1, \quad s_3(t)V(t) \in H_1.$$

Теперь дадим определение обобщенного решения уравнения (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент $U(t)$ будем называть обобщенным решением уравнения (1) при условиях (2), если:

1) при всех t из $[0, l]$ $U(t), U'(t) \in H$[4]

---

[4]Производная $U'(t)$ понимается в слабом смысле, т. е. существует функция $V(t) \in H_1$ такая, что $U(t) = U(0) + \int_0^t V(\tau)d\tau$, где интеграл понимается в смысле Бохнера. При этом будем писать

$$V(t) = \overline{\frac{dU}{dt}} = U'(t);$$

2) почти для всех t, $U(t)$, $U'(t) \in D(s_1^{\frac{1}{2}})$, причем $s_1^{\frac{1}{2}} U^{(i)} \in H_1$, $(i = 0, 1)$;

3) $U(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int_0^l [(U, \Phi'''_{t^3}) - (s_1^{\frac{1}{2}} U, s_1^{\frac{1}{2}} \Phi''_{t^2}) - (U' s_2^x \Phi) - (U, s_3^x \Phi) + (f, \Phi)] dt +$$

$$+ [(\varphi_0, \Phi''_{(t^2)}\big|_{t=0}) - (\psi_0, \Phi'_t\big|_{t=0}) + (g_0, \Phi\big|_{t=0}) - \tag{4}$$

$$- (s_1^{\frac{1}{2}} \varphi_0, s_1^{\frac{1}{2}} \Phi'_t\big|_{t=0}) + (s_1^{\frac{1}{2}} \psi_0, s_1^{\frac{1}{2}} \Phi\big|_{t=0}) = 0,$$

где $\Phi(t)$ — произвольная функция из множества $M \in H_1$.

Множество M определяется следующим образом: $\Phi(t) \in M$, если:

1) для всех $t \in [0, l]$ $\Phi(t) \in H$;

2) $\Phi'(t)$ и $\Phi''(t)$ существуют в сильном смысле;

3) $\Phi'''(t)$ существует в слабом смысле, и $\Phi'''(t) \in H_1$;

4) почти для всех t $\Phi''(t) \in D(s_1^{\frac{1}{2}})$;

5) кроме того, $s_1^{\frac{1}{2}} \Phi'' \in H_1$ и $\Phi(l) = \Phi'(l) = \Phi''(l) = 0$.

Нетрудно показать, что для всех $t \in [0, l]$ $\Phi(t), \Phi'(t) \in D(s_1^{\frac{1}{2}})$

$$\Phi'(t), \quad \Phi''(t) \in H_1.$$

Покажем это, например, для $\Phi''(\tau)$.

$$\Phi''(t) = \Phi''(l) + \int_0^t \Phi'''(\tau) d\tau = \int_l^t \Phi'''(\tau) d\tau, \text{ но } \Phi'''(t) \in H_1.$$

Следовательно, $\Phi''(t) \in H_1$.

§2. СВЕДЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ К БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе мы установим связь между обобщенным решением операторного уравнения (1) и решением бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений определенного вида. Это даст возможность, пользуясь аппаратом бесконечных систем, доказать существование и единственность обобщенного решения, исследовать характер сходимости его ряда Фурье по элементам V_n, обосновать метод Галеркина приближенного решения уравнения (1), установить более гладкий характер решения при $t > 0$. Нам понадобится одно координатное пространство последовательностей $F\{f_m(t)\}$, измеримых на $[0, l]$ функций с метрикой

$$(F, \Psi)_3 = \left(\int_0^l \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 f_m(t) \psi_m(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Это пространство будем называть пространством $\Im$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть для уравнения (1) выполнены указанные выше условия относительно операторов* s_1, $s_2(t)$ *и* $s_3(t)$ *и, кроме того* $f(t) \in H_1$, $\varphi_0, \psi_0 \in D(s_1^{\frac{1}{2}})$, $g_0 \in H$. *Тогда, если* $U(t)$ *обобщенное решение уравнения (1), то его коэффициенты Фурье* $f_m(t) = (U, V_m)$ *составляют последовательность функций из* $\Im$, *имеют абсолютно-непрерывные производные первых двух порядков и удовлетворяют почти при всех* $t \geq 0$ *бесконечной системе дифференциальных уравнений*

$$f_m^{'''}(t) + \lambda_m^2 f_m^{''}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{m,k}(t) f_k^{'}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_{m,k}(t) f_k(t) - b_m(t) = 0 \quad (5)$$

$$f_m(0) = c_m, \quad f_m^{'}(0) = c_m^{'}, \quad f_m^{''}(0) = c_m^{''}, \quad m = 1, 2, 3, ...,$$

где

$$a_{m,k}(t) = (V_k, s_2^x V_m) = (s_2 V_k, V_m);$$

$$b_{m,k}(t) = (V_k, s_3^x V_m^{'}) = (s_3 V_k, V_m); \quad b_m(t) = (f, V_m);$$

$$c_m = (\varphi_0, V_m); \quad c_m^{'} = (\psi_0, V_m); \quad c_m^{''} = (g_0, V_m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $U(t)$ — обобщенное решение уравнения (1). Тогда при любом фиксированном t из $[0, l]$ элементу $U(t)$ можно поставить в соответствие коэффициенты Фурье по системе V_k :

$$f_k = (U, V_k).$$

При изменении t на отрезке $[0, l]$ коэффициенты $f_k(t)$ будут измеримыми функциями от t, причем

$$\int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(t)|^2 dt = \int_0^l (U, U) dt < \infty.$$

По условию $s_1^{\frac{1}{2}} U \in H_1$, поэтому

$$\int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k(t)|^2 dt = \int_0^l (s_1^{\frac{1}{2}} U, s_1^{\frac{1}{2}} U) dt < \infty \ \text{ и } \ \{f_m(t)\} \in \Im.$$

В интегральном тождестве (4) функция $\Phi(t)$ совершенно произвольная. Пользуясь этим, выберем ее специальным образом, положив

$$\Phi(t) = \begin{cases} V_m (t - t_0)^3, & 0 \le t \le t_0, \\ 0, & t_0 < t \le l. \end{cases}$$

Очевидно, что $\Phi(t) \in M$.

Теперь займемся преобразованием отдельных слагаемых тождества (4). Имеем:

$$1. \quad \int_0^l (U, \Phi_{t^3}^{'''}) dt = G \int_0^{t_0} (U, V_m) dt = G \int_0^{t_0} f_m(t) dt;$$

$$2. \quad \int_0^l (s_1^{\frac{1}{2}} U, s_1^{\frac{1}{2}} \Phi_{t^2}^{''}) dt = \int_0^{t_0} (s_1^{\frac{1}{2}} U, s_1^{\frac{1}{2}} G (t - t_0) V_m) dt =$$

$$= G\int_0^{t_0}(t-t_0)(s_1^{\frac{1}{2}}U, s_1^{\frac{1}{2}}V_m)dt = -G\int_0^{t_0}\int_0^{t}(s_1^{\frac{1}{2}}U, s_1^{\frac{1}{2}}V_m)d\tau dt =$$

$$= -G\lambda_m^2\int_0^{t_0}\int_0^{t} f_m(\tau)d\tau dt$$

$$3.\quad \int_0^{l}(f,\Phi)dt = \int_0^{t_0}(t-t_0)^3(f,V_m)dt =$$

$$= -G\int_0^{t_0}\int_0^{t}\int_0^{\tau}\int_0^{\theta} b_m(\eta)d\eta d\theta d\tau dt;$$

$$4.\quad \int_0^{l}(U, s_3^x\Phi)dt = \int_0^{l}(s_3U,\Phi)dt = \int_0^{t_0}(t-t_0)^3(s_3U, V_m)dt =$$

$$= -G\int_0^{t_0}\int_0^{t}\int_0^{\tau}\int_0^{\theta}(U, s_3^xV_m)d\eta d\theta d\tau dt.$$

Здесь мы воспользовались равенством $(U, s_3^x\Phi) = (s_3U,\Phi)$, справедливым почти при всех t в силу условия $D(s_3) = D(s_3^x) \supset D(s_1^{\frac{1}{2}})$.

Дальше, так как $U \in H$, то почти для всех t из $[0,l]$ $\quad (U, s_3^xV_m) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(t)(V_k, s_3^xV_m)$.

При этом

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(t)|\cdot|(V_k, s_3^xV_m)| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}|(V_k, s_3^xV_m)|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{(U,U)}\cdot\sqrt{(s_3^xV_m, s_3^xV_m)} \le K\lambda_m\sqrt{(U,U)}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\theta}(U, s_3^xV_m)d\eta = \int_0^{\theta}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\eta)(V_k, s_3^xV_m)d\eta = \int_0^{\theta}\sum_{k=1}^{\infty} b_{m,k}(\eta)f_k(\eta)d\eta$$

и

$$\int_0^{l}(U, s_3^x\Phi)dt = -G\int_0^{t_0}\int_0^{t}\int_0^{\tau}\int_0^{\theta}\sum_{k=1}^{\infty} b_{m,k}(\eta)f_k(\eta)d\eta d\theta d\tau dt.$$

$$5.\quad \int_0^{l}(U', s_2^x\Phi)dt = \int_0^{l}(s_2U',\Phi)dt = \int_0^{t_0}(t-t_0)^3\cdot(s_2U', V_m)dt =$$

$$= -G\int_0^{t_0}\int_0^{t}\int_0^{\tau}\int_0^{\theta}(s_2U', V_m)d\eta d\theta d\tau dt =$$

$$= -G\int_0^{t_0}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\theta (U^{'}, s_2^x V_m)d\eta d\theta d\tau dt.$$

Здесь мы также воспользовались равенством $(U', s_2^x\Phi) = (s_2 U', \Phi)$. Оно справедливо почти для всех t из $[0, l]$ в силу того, что

$$D(s_2) = D(s_2^x) \supset D(s_1^{\frac{1}{2}}).$$

Так как $U' \in H$, то почти для всех $t \in [0, l]$

$$(U', s_2^x V_m) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)(V_k, s_2^x V_m), \ \ \{g_k(t)\} \in \Im, \ \ g_k = (U', V_k).$$

Покажем, что $g_k(t) = f_k'(t)$ для всех $t \in [0, l]$. Так как $U'(t)$ существует в указанном выше смысле, то

$$U(t) = U(0) + \int_0^t U'(\tau)d\tau.$$

Умножив слева и справа скалярно на V_k, получим:

$$(U(t), V_k) = (U(0), V_k) + \int_0^t (U'(\tau), V_k)d\tau;$$

$$f_k(t) = f_k(0) + \int_0^t g_k(\tau)d\tau.$$

Отсюда следует, что почти для всех $t \in [0, l]$ $\ f_k'(t) = g_k(t)$.

Таким образом, почти для всех t из $[0, l]$

$$\left(\frac{dU}{dt}, s_2^x V_m\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)(V_k, s_2^x V_m).$$

При этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k'(t)| \cdot |(V_k, s_2^x V_m)| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k'(t)|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(V_k, s_2^x V_m)|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{(U', U')} \cdot \sqrt{(s_2^x V_m, s_2^x V_m)} \le K\lambda_m \sqrt{(U', U')}.$$

Окончательно имеем:

$$\int_0^\theta (U^{'}, s_2^x V_m)d\eta = \int_0^\theta \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{'}(\eta)(V_k, s_2^x V_m)d\eta = \int_0^\theta \sum_{k=1}^{\infty} a_{m,k}(\eta) f_k^{'}(\eta)d\eta$$

и

$$\int_0^l (U', s_2^x\Phi)dt = -G\int_0^{t_0}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\theta \sum_{k=1}^\infty a_{m,k}(\eta)f_k'(\eta)d\eta d\theta d\tau dt.$$

Остается преобразовать еще внеинтегральные члены. Имеем:

$$(g_0, \Phi|_{t=0}) = (g_0, -t_0^3V_m) = -t_0^3(g_0, V_m) = -C_m''t_0^3;$$

$$(\psi_0, \Phi_t'|_{t=0}) = (\psi_0, 3t_0^2V_m) = 3t_0^2(\psi_0, V_m) = 3C_m't_0^2;$$

$$(\varphi_0, \Phi_{t^2}''|_{t=0}) = (\varphi_0, -Gt_0V_m) = -Gt_0(\varphi_0, V_m) = -GC_mt_0;$$

$$(s_1^{\frac12}\psi_0, s_1^{\frac12}\Phi|_{t=0}) = -t_0^3(s_1^{\frac12}\psi_0, s_1^{\frac12}V_m) = -t_0^3\lambda_m^2(\psi_0, V_m) = -C_m'\lambda_m^2t_0^3.$$

$$(s_1^{\frac12}\varphi_0, s_1^{\frac12}\Phi_t'|_{t=0}) = 3t_0^2(s_1^{\frac12}\varphi_0, s_1^{\frac12}V_m) = 3t_0^2\lambda_m^2(\varphi_0, V_m) = 3C_m\lambda_m^2t_0^2.$$

Подставляя полученные результаты в тождество (4), получим, что функция $f_m(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{t_0} f_m(t)dt = \frac{C_m^{x'}}{G}t_0^3 + \frac{C_m^x}{2}t_0^2 + C_mt_0 - \lambda_m^2\int_0^{t_0}\int_0^t f_m(\tau)d\tau dt -$$

$$-\int_0^{t_0}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\theta \sum_{k=1}^\infty a_{m,k}(\eta)f_k'(\eta)d\eta d\theta d\tau dt -$$

$$-\int_0^{t_0}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\theta \sum_{k=1}^\infty b_{m,k}(\eta)f_k(\eta)d\eta d\theta d\tau dt + \int_0^{t_0}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\theta b_m(\eta)d\eta d\theta d\tau dt$$

тождественно по t_0. Здесь для краткости мы ввели такие обозначения: $C_m^x = C_m' + \lambda_m^2C_m$, $C_m^{x'} = C_m'' + \lambda_m^2C_m'$.

Функции $G_m(t)$, $\sum\limits_{k=1}^\infty b_{m,k}(t)f_k(t)$, $\sum\limits_{k=1}^\infty a_{m,k}(t)f_k'(t)$ суммируемы на $[0, l]$:

$$\int_0^l |b_m(t)|dt < l^{1/2}\Big(\int_0^l |b_m(t)|^2dt\Big)^{1/2} = l^{1/2}\Big(\int_0^l (f, f)\Big)^{1/2} < \infty;$$

$$\int_0^l \sum_{k=1}^\infty |f_k(t)||b_{m,k}(t)|dt < K\lambda_m\int_0^l \sqrt{(U, U)}dt < \infty;$$

$$\int_0^l \sum_{k=1}^\infty |f_k'(t)||a_{m,k}(t)|dt < K\lambda_m\int_0^l \sqrt{(U', U')}dt < \infty.$$

Отсюда следует, что функции

$$\int_0^t b_m(\tau)d\tau, \int_0^t f_m(\tau)d\tau, \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} b_{m,k}(\tau)f_k(\tau)d\tau$$

и

$$\int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} a_{m,k}(\tau)f_k^{'}(\tau)d\tau$$

абсолютно-непрерывны (10). Очевидно, абсолютно-непрерывны и многократные интегралы от этих функций с переменными верхними пределами из $[0, l]$. Поэтому всюду на $[0, l]$ существует производная правой части. Но тогда существует производная и левой части и эти производные (левой и правой частей) совпадают при всех t, т. е. справедливо равенство

$$f_m(t) = \frac{C_m^{x'}}{2}t^2 + C_m^x t + C_m - \lambda_m^2 \int_0^t f_m(\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^t \int_0^\tau \int_0^\theta \sum_{k=1}^{\infty} a_{m,k}(\eta)f_k^{'}(\eta)d\eta d\theta d\tau dt -$$

$$-\int_0^t \int_0^\tau \int_0^\theta \sum_{k=1}^{\infty} b_{m,k}(\eta)f_k(\eta)d\eta d\theta d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\theta b_m(\tau)d\eta d\theta d\tau$$

при всех $t \in [0, l]$.

Из полученного равенства видно, что функция $f_m(t)$ абсолютно-непрерывна на отрезке $[0, l]$, так как она равна сумме абсолютно-непрерывных на отрезке $[0, l]$ функций. Кроме этого, легко показать, что функция $f_m(t)$ имеет абсолютно-непрерывные производные первого и второго порядков и что существует почти всюду на отрезке $[0, l]$ третья производная $f_m^{'''}(t)$, которая равна

$$-\lambda_m^2 f_m^{''}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{m,k}(t)f_k^{'}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} b_{m,k}(t)f_k(t) + b_m(t).$$

При этом мы получаем, что

$$f_m(0) = C_m, \;\; f_m^{'}(0) = C_m^{'}, \;\; f_m^{''}(0) = C_m^{''}.$$

Если теперь положить $m = 1, 2, ...$, то нетрудно убедиться, что коэффициенты Фурье $f_k(t)$ обобщенного решения уравнения (1) удовлетворяют системе (5) почти при всех $t \geq 0$.

Таким образом, изучение обобщенного решения уравнения (1) мы свели к исследованию бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений (5) в классе последовательностей абсолютно-непрерывных функций из пространства $\Im$. Но исследование системы (5) связано с большими неудобствами. Поэтому вместо системы (5), то есть системы

$$f_m^{'''}(t) + \lambda_m^2 f_m^{''}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} b_{m,k}(t) f_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{m,k}(t) f_k^{'}(t) + b_m(t), \quad (5')$$

мы будем рассматривать связанную с ней вспомогательную систему интегральных уравнений

$$Z_m(t) = B_m(t) + \int_0^t \int_0^\theta \sum_{k=1}^{\infty} a_{m,k}(t, \theta, \eta) Z_k(\eta) d\eta d\theta +$$

$$+ \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\theta \sum_{k=1}^{\infty} b_{m,k}(t, \theta, \eta) Z_k(\eta) d\eta d\theta d\tau,$$

которая получается следующим образом.

Положим в системе (5′)

$$f_m(t) = \frac{C_m^{'}}{\lambda_m^4} e^{-\lambda_m^2 t} + (C_m^{'} + \frac{C_m^{''}}{\lambda_m^2}) t + (C_m - \frac{C_m^{''}}{\lambda_m^4}) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\theta e^{-\lambda_m^2(\theta - \eta)} Z_m(\eta) d\eta d\theta d\tau. \quad (6)$$

Тогда (пока формально)

$$f_m^{'}(t) = -\frac{C_m^{''}}{\lambda_m^2} e^{-\lambda_m^2 t} + (C_m^{'} + \frac{C_m^{''}}{\lambda_m^2}) + \int_0^t \int_0^\theta e^{-\lambda_m^2(\theta - \eta)} Z_m(\eta) d\eta d\theta;$$

$$f_m^{''}(t) = C_m^{''} e^{-\lambda_m^2 t} + \int_0^t e^{-\lambda_m^2(t - \eta)} Z_m(\eta) d\eta;$$

$$f_m^{'''}(t) = -\lambda_m^2 C_m^{''} e^{-\lambda_m^2 t} - \lambda_m^2 \int_0^t e^{-\lambda_m^2(t - \eta)} Z_m(\eta) d\eta + Z_m(t) = -\lambda_m^2 f_m^{''}(t) + Z_m(t).$$

Подставив полученные значения $f_m(t)$ и ее производных в систему $(5')$, мы получим систему интегральных уравнений относительно $Z_m(t),\ \ m=1,2,\ldots:$

$$Z_m(t)=B_m(t)+\int_0^t\int_0^\theta\sum_{k=1}^{\infty}a_{m,k}(t,\theta,\eta)Z_k(\eta)d\eta d\theta+$$

$$+\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\theta\sum_{k=1}^{\infty}b_{m,k}(t,\theta,\eta)Z_k(\eta)d\eta d\theta d\tau, \tag{7}$$

где введены такие обозначения:

$$B_m(t)=b_m(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{m,k}(t)}{\lambda_k^4}C_k''e^{-\lambda_k^2t}-t\sum_{k=1}^{\infty}b_{m,k}(t)C_k'-$$

$$-t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{m,k}(t)}{\lambda_k^2}C_k''-\sum_{k=1}^{\infty}b_{m,k}(t)C_k++\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{m,k}(t)}{\lambda_k^4}C_k''+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{m,k}(t)}{\lambda_k^2}C_k''e^{-\lambda_k^2t}-\sum_{k=1}^{\infty}a_{m,k}(t)C_k''-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{m,k}(t)}{\lambda_k^2}C_k'';$$

$$a_{m,k}(t,\theta,\eta)=-a_{m,k}(t)e^{-\lambda_k^2(\theta-\eta)};$$

$$b_{m,k}(t,\theta,\eta)=-b_{m,k}(t)e^{-\lambda_k^2(\theta-\eta)};$$

Далее нам понадобится еще одно пространство — пространство последовательностей суммируемых с квадратом на $[0,l]$ функций с метрикой

$$(X,Y)_4=\left(\int_0^l\sum_{k=1}^{\infty}x_n(t)y_n(t)dt\right)^{1/2}.$$

Обозначим это пространство через $\Im_1$. Тогда $X\{x_n(t)\}$ и $Y\{y_n(t)\}$ суть элементы $\Im_1$.

Сейчас мы установим, что системы (5) и (7) равносильны и в дальнейшем будем исследовать систему (7).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Если $\{f_n(t)\}$ — любая последовательность функций из $\Im$, имеющая абсолютно-непрерывные производные 1-го и 2-го порядков, удовлетворяющая* *системе (5) почти при всех* $t \in [0,l]$, *и если* $\{f_n^{'}(t)\} \in \Im$, *то функции* $Z_n(t)$, *определяемые для всех* $t \in [0,l]$ *из соотношений*

$$Z_n(t) = f_n^{'''}(t) + \lambda_n^2 f_n^{''}(t)$$

удовлетворяют системе (7).

При этом последовательность функций $\{Z_n(t)\} \in \Im_1$.

Обратно, если $\{Z_n(t)\}$ *— любая последовательность функций из* $\Im_1$, *удовлетворяющая системе (7), то функции* $f_n(t)$, *определяемые по формуле (6), абсолютно-непрерывны со своими производными до 2-го порядка включительно, удовлетворяют системе (5) почти при всех* $t \geq 0$. *Кроме того,* $\{f_n^{(i)}(t)\} \in \Im \quad (i = 0, 1, 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть функции $f_n(t)$ почти для всех $t \in [0,l]$ удовлетворяют системе

$$f_n^{'''}(t) + \lambda_n^2 f_n^{''}(t) = b_n(t) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(t) f_k^{'}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(t) f_k(t),$$

$$f_n(0) = C_n, \;\; f_n^{'}(0) = C_n^{'}, \;\; f_n^{''}(0) = C_n^{''}, \;\; n = 1, 2, ...$$

Положим

$$Z_n(t) = f_n^{'''}(t) + \lambda_n^2 f_n^{''}(t). \qquad (*)$$

Покажем, что функции $Z_n(t)$, определенные по формуле $(*)$ суммируемы с квадратом и последовательность $\{Z_n(t)\} \in \Im_1$. Почти для всех $t \in [0,l]$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Z_n(t)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n^{'''}(t) + \lambda_n^2 f_n^{''}(t)|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(t) - \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(t) f_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(t) f_k^{'}(t)|^2 \leq$$

$$\leq 3 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ |b_n(t)|^2 + |\sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(t) f_k(t)|^2 + |\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(t) f_k^{'}(t)|^2 \right\} =$$

$$= 3\sum_{k=1}^{\infty}\left\{|(f,V_n)|^2 + |\sum_{k=1}^{\infty}(V_k, s_3^x V_n) f_k(t)|^2 + |\sum_{k=1}^{\infty}(V_k, s_2^x V_n) f_k^{'}(t)|^2\right\}.$$

Почти всюду на отрезке $[0,l]$ справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty}(V_k, s_j^x V_n) f_n^{(i)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(V_k f_k^{(i)}(t), s_j^x V_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} V_k f_k^{(i)}(t), s_j^x V_n\right) =$$

$$= \left(s_j \sum_{k=1}^{\infty} V_k f_k^{(i)}(t), V_n\right), \quad (i = 0,1; \;\; j = 2,3).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}(V_k, s_j^x V_n) f_k^{(i)}(t)\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(s_j \sum_{k=1}^{\infty} V_k f_k^{(i)}(t), V_n\right)\right|^2 =$$

$$= \left(s_j \sum_{k=1}^{\infty} V_k f_k^{(i)}(t), s_j \sum_{k=1}^{\infty} V_k f_k^{(i)}(t)\right) \leq$$

$$\leq K\left(s_1^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} V_k f_k^{(i)}(t), s_1^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} V_k f_k^{(i)}(t)\right) = K\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 |f_k^{(i)}(t)|^2, \quad (i = 0,1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(l, V_n)|^2 = (f,f).$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|Z_n(t)|^2 < 3(f,f) + 3K\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|f_k(t)|^2 + 3K\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|f_k^{'}(t)|^2.$$

$$\left(\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty}|Z_n(t)|^2 dt\right)^{1/2} < 3\int_0^l (f,f)dt + 3K\left(\int_0^l \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|f_k(t)|^2 dt\right)^{1/2} +$$

$$+3K\left(\int_0^l \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|f_k^{'}(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Первый интеграл в правой части неравенства конечен, так как $f(t) \in H_1$, последние два интеграла тоже конечны, так как, по условию, $\{f_k^{(i)}(t)\} \in \Im$, $(i = 0,1)$. Следовательно,

$$\left(\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty}|Z_n(t)|^2 dt\right)^{1/2} < \infty,$$

то есть $\{Z_n(t)\} \in \Im_1$. Таким образом, функции $Z_n(t)$ суммируемы с квадратом и $\{Z_n(t) \in \Im_1\}$, причем

$$f_n(t) = \frac{C_n''}{\lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2 t} + \left(C_n' + \frac{C_n''}{\lambda_n^2}\right) t + \left(C_n - \frac{C_n''}{\lambda_n^4}\right) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\theta e^{-\lambda_n^2(\theta-\eta)} Z_n(\eta) d\eta d\theta d\tau$$

и

$$f_n'(t) = -\frac{C_n''}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 t} + \left(C_n' + \frac{C_n''}{\lambda_n^2}\right) + \int_0^t \int_0^\theta e^{-\lambda_n^2(\theta-\eta)} Z_n(\eta) d\eta d\theta,$$

$$f_n''(t) = C_n'' e^{-\lambda_n^2 t} + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\eta)} Z_n(\eta) d\eta,$$

$$f_n'''(t) \cong -\lambda_n^2 C_n'' e^{-\lambda_n^2 t} - \lambda_n^2 \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\eta)} Z_n(\eta) d\eta + Z_n(t) = -\lambda_n^2 f''(t) + Z_n(t).$$

Теперь подставив полученные значения для функций $f_n(t)$ и их производных в систему (5), мы получим, что функции определенные по формуле $(*)$, являются решением системы (7).

Итак, первая часть теоремы доказана. Перейдем к доказательству второй части. Пусть функции $Z_n(t)$ суммируемы с квадратом и удовлетворяют системе (7). Тогда, функции, определяемые равенством

$$f_n(t) = \frac{C_n''}{\lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2 t} + \left(C_n' + \frac{C_n''}{\lambda_n^2}\right) t + \left(C_n - \frac{C_n''}{\lambda_n^4}\right) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\theta e^{-\lambda_n^2(\theta-\eta)} Z_n(\eta) d\eta d\theta d\tau$$

абсолютно-непрерывны, так как равны сумме абсолютно-непрерывных функций.

Очевидно, что эти функции имеют абсолютно-непрерывные производные первого и второго порядков, а третьи производные существуют почти для всех t из $[0, l]$.

$$f_n'(t) = -\frac{C_n''}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 t} + \left(C_n' + \frac{C_n''}{\lambda_n^2}\right) + \int_0^t \int_0^\theta e^{-\lambda_n^2(\theta-\eta)} Z_n(\eta) d\eta d\theta,$$

$$f_n''(t) = C_n'' e^{-\lambda_n^2 t} + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\eta)} Z_n(\eta) d\eta,$$

$$f_n'''(t) \cong -\lambda_n^2 C_n'' e^{-\lambda_n^2 t} - \lambda_n^2 \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\eta)} Z_n(\eta) d\eta + Z_n(t) = -\lambda_n^2 f_n''(t) + Z_n(t).$$

Получается, что левая часть системы ($5'$) эквивалентна $Z_n(t)$. Если показать, что и правая часть ее эквивалентна $Z_n(t)$, то мы этим самым покажем, что $\{f_n(t)\}$ — решение системы (5).

Найдем значение выражения

$$b_n(t) - \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(t) f_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(t) f_k'(t).$$

Имеем:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(t) f_k(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n,k}(t)}{\lambda_k^4} C_k'' e^{-\lambda_k^2 t} - t \sum_{k=1}^{\infty} C_k' b_{n,k}(t) -$$

$$-t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n,k}(t)}{\lambda_k^2} C_k'' - \sum_{k=1}^{\infty} C_k b_{n,k}(t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n,k}(t)}{\lambda_k^4} C_k'' - \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\theta \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(t) e^{-\lambda_k^2 (\theta-\eta)} Z_k(\eta) d\eta d\theta d\tau;$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(t) f_k'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n,k}(t)}{\lambda_k^2} e^{-\lambda_k^2 t} - \sum_{k=1}^{\infty} C_k' a_{n,k}(t) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n,k}(t)}{\lambda_k^2} C_k'' - \int_0^t \int_0^\theta \sum_{k=1}^{\theta} a_{n,k}(t) e^{-\lambda_k^2 (\theta-\eta)} Z_k(\eta) d\eta d\theta;$$

$$b_n(t) \equiv b_n(t).$$

Складывая почленно слева и справа, получим:

$$b_n(t) - \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(t) f_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(t) f_k'(t) = B_n(t) +$$

$$+\int_0^t \int_0^\theta \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(t,\theta,\eta) Z_k(\eta) d\eta d\theta d\tau +$$

$$+\int_0^t \int_0^\tau \int_0^\theta \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(t,\theta,\eta) Z_k(\eta) d\eta d\theta d\tau,$$

где

$$B_n(t)=b_n(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{n,k}(t)}{\lambda_k^4}C_k^{''}e^{-\lambda_k^2 t}-t\sum_{k=1}^{\infty}C_k^{'}b_{n,k}(t)-$$

$$-t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{n,k}(t)}{\lambda_k^2}C_k^{''}-\sum_{k=1}^{\infty}C_kb_{n,k}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{n,k}(t)}{\lambda_k^4}C_k^{''}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{n,k}(t)}{\lambda_k^2}C_k^{''}e^{-\lambda_k^2 t}-\sum_{k=1}^{\infty}C_k^{'}a_{n,k}(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{n,k}(t)}{\lambda_k^2}C_k^{''};$$

$$a_{n,k}(t,\theta,\eta)=-a_{n,k}(t)e^{-\lambda_k^2(\theta-\eta)};$$

$$b_{n,k}(t,\theta,\eta)=-b_{n,k}(t)e^{-\lambda_k^2(\theta-\eta)}.$$

Правая часть полученного равенства совпадает с правой частью системы (7), которая по условию равна $Z_n(t)$.

Таким образом, почти всюду справедливо равенство:

$$f_n^{'''}(t)+\lambda_n^2 f_n^{''}(t)=b_n(t)-\sum_{k=1}^{\infty}b_{n,k}(t)f_k(t)-\sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k}(t)f_k^{'}(t)$$

и $\{f_k(t)\}$ — решение системы (5). Остается показать, что последовательности $\{f_n(t)\}$, $\{f_n^{'}(t)\}$, $\{f_n^{''}(t)\}$ принадлежат $\Im$. Покажем сначала, что последовательность $\{f_n^{''}(t)\}\in\Im$.

$$f_n^{''}(t)=C_n^{''}e^{-\lambda_n^2 t}+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\eta)}Z_n(\eta)d\eta.$$

$$\int_0^l\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2|f_n^{''}(t)|^2dt\le 2\int_0^l\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2|C_n^{''}|^2e^{-2\lambda_n^2 t}dt+$$

$$+2\int_0^l\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\left|\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\eta)}Z_n(\eta)d\eta\right|^2dt<$$

$$<\sum_{n=1}^{\infty}|C_n^{''}|^2+2\int_0^l\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^t\lambda_n^2e^{-2\lambda_n^2(t-\eta)}d\eta\cdot\int_0^t|Z_n(\eta)|^2d\eta\right\}dt<$$

$$<(g_0,g_0)+l\int_0^l\sum_{n=1}^{\infty}|Z_n(t)|^2dt<\infty.$$

Отсюда следует, что $\{f_n''(t)\} \in \Im$. Далее, имеем

$$f_n'(t) = f_n'(0) + \int_0^t f_n''(\tau)d\tau.$$

Тогда

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |f_n'(t)|^2 dt \le 2\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |f_n'(0)|^2 dt + 2\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left| \int_0^t f_n''(\tau)d\tau \right|^2 dt \le$$

$$\le 2l \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |C_n'|^2 + 2\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left\{ \int_0^t |f_n''(\tau)|^2 d\tau \cdot \int_0^t 1^2 d\tau \right\} dt <$$

$$\le 2l\left(s_1^{\frac{1}{2}}\psi_0, s_1^{\frac{1}{2}}\psi_0\right) + 2l^2 \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |f_n''(t)|^2 dt < \infty, \quad \text{то есть} \quad \{f_n'(t)\} \in \Im.$$

Аналогично показывается, что и $\{f_n(t)\} \in \Im$. Для этого нужно только воспользоваться равенством

$$f_n(t) = f_n(0) + \int_0^t f_n'(\tau)d\tau.$$

Таким образом теорема доказана.

Докажем теперь утверждение, обратное теореме 1.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\varphi_0, \quad \psi_0 \in D(s_1^{\frac{1}{2}}), \quad g_0 \in H$. *Если функции* $f_m(t), \quad m = 1, 2, ...$ *абсолютно-непрерывны, имеют абсолютно-непрерывные производные до 2-го порядка включительно и удовлетворяют почти всюду системе (5), а последовательность* $\{f_m''(t)\} \in \Im$, *то функция*

$$\widetilde{U}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) V_k \tag{8}$$

является обобщенным решением уравнения (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Покажем сначала, что свойства 1)-2) обобщенного решения выполняются для ряда (8).

По предположению

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |f_n''(t)|^2 dt < \infty.$$

Тогда
$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2|f_n^{'}(t)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\left|f_n^{'}(0)+\int_0^t f_n^{''}(\tau)d\tau\right|^2\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2|f_n^{'}(0)|^2+$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\left|\int_0^t f_n^{''}(\tau)d\tau\right|^2<2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2|f_n^{'}(0)|^2+2l\int_0^l\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2|f_n^{''}(t)|^2dt$$
и $\{f_n^{'}(t)\}\in\Im$ при всех t.

Аналогично,
$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2|b_n(t)|^2<2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2|f_n(0)|^2+2l\int_0^l\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2|f_n^{'}(t)|^2dt$$
и $\{f_n(t)\}\in\Im$ при всех $t\in[0,l]$,
$$(\widetilde{U},\widetilde{U})=\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(t)|^2\leq\frac{1}{\lambda_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2|f_n(t)|^2<\infty \text{ при любом } t,\ \ \lambda_0^2=\inf\{\lambda_k^2\}$$
и $\widetilde{U}(t)\in H$ при всех $t\geq 0$. Кроме того, $\widetilde{U}(t)\in H_1$ как предел (по норме H_1) последовательности функций
$$\widetilde{U}_n(t)=\sum_{k=1}^{N}f_k(t)V_k$$
из H_1.

Далее,
$$\left(s_1^{\frac{1}{2}}\widetilde{U},s_1^{\frac{1}{2}}\widetilde{U}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|f_k(t)|^2<\infty$$
и
$$\widetilde{U}(t)\in D\left(s_1^{\frac{1}{2}}\right)$$
при всех $t\geq 0$; кроме того, $s_1^{\frac{1}{2}}\widetilde{U}(t)\in H_1$.

При этом $s_1^{\frac{1}{2}}\widetilde{U}(t)\in H$ для всех $t\geq 0$, так как функция $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|f_k(t)|^2$, как видно, всюду конечна.

Теперь покажем, что $\widetilde{U}^{'}(t)$ существует в смысле нормы и равна $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k^{'}(t)V_k$, т. е. покажем, что
$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\widetilde{U}(t+h)-\widetilde{U}(t)}{h}-\sum_{k=1}^{\infty}f_k^{'}(t)V_k\right\|=0.$$

Нетрудно убедиться, что это равенство равносильно следующему:

$$\lim_{h\to 0}\Phi(h)\equiv\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{f_k(t+h)-f_k(t)}{h}-f_k'(t)\right|^2=0. \qquad (**)$$

Производная $f_k'(t)$ существует в обычном смысле, т. е.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_k(t+h)-f_k(t)}{h}=f_k'(t).$$

Представим равенство $(**)$ в такой форме:

$$\lim_{h\to 0}\Phi(h)\equiv\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{f_k(t+h)-f_k(t)}{h}-f_k'(t)\right|^2+$$

$$+\lim_{h\to 0}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{f_k(t+h)-f_k(t)}{h}-f_k'(t)\right|^2.$$

Обозначим первую сумму через $s_n(h)$, вторую – через $R_n(h)$. Тогда

$$\Phi(h)=s_n(h)+R_n(h).$$

Покажем, что $R_n(h)$ стремится равномерно к нулю при $h\to 0$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k'(t)|^2$$

сходится равномерно. Поэтому можно сделать

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|f_k'(t)|^2<\frac{\varepsilon}{8}$$

при $n>N_1(\varepsilon)$. Но

$$R_n(h)\le 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{f_k(t+h)-f_k(t)}{h}\right|^2+2\sum_{k=n+1}^{\infty}|f_k'(t)|^2.$$

Покажем, что и первую сумму правой части этого неравенства можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{8}$ при любом h. В самом деле,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{f_k(t+h)-f_k(t)}{h}\right|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int_0^{\tau}\int_0^{\theta}e^{-\lambda_k^2(\theta-\eta)}Z_k(\eta)d\eta d\theta d\tau\right|^2\le$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_0^{\tau} \int_0^{\theta} e^{-2\lambda_k^2(\theta-\eta)} d\eta d\theta d\tau \cdot \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_0^{\tau} \int_0^{\theta} |Z_k(\eta)|^2 d\eta d\theta d\tau <$$

$$< \frac{(t+h)^3 - t^3}{6h} \cdot \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_0^{\tau} \int_0^{\theta} \sum_{k=n+1}^{\infty} |Z_k(\eta)|^2 d\eta d\theta d\tau <$$

$$< l^3 \int_0^l \sum_{k=n+1}^{\infty} |Z_k(t)|^2 dt < \frac{\varepsilon}{8}$$

при $n > N_2(\varepsilon)$.

Таким образом, получаем, что $R_n(h) < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N(\varepsilon)$ (N наибольшее из N_1 и N_2) и любом h.

Возьмем какое-нибудь $n_0 \geq N$ и зафиксируем его. Тогда $s_{n_0}(h) < \varepsilon/2$ при $h < \delta(\varepsilon, n_0)$ (считаем, что $\varepsilon > 0,\ \ h > 0,\ \ \delta > 0$.) При этом получаем, что $\Phi(h) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Итак, $\Phi(h) < \varepsilon$ для $h < \delta$ и $\lim \Phi(h) = 0$. Следовательно,

$$\widetilde{U}'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t) V_k. \tag{8'}$$

Аналогичным образом показывается, что

$$\widetilde{U}''(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k''(t) V_k. \tag{8''}$$

При этом $\widetilde{U}'(t) \in D(s_1^{\frac{1}{2}})$ при всех $t \geq 0$, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k'(t)|^2 < \infty \text{ при всех } t \geq 0,$$

а $\widetilde{U}''(t) \in D(s_1^{\frac{1}{2}})$ почти для всех $t \geq 0$, ибо

$$\int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k''(t)|^2 dt < \infty.$$

Далее, $\widetilde{U}'(t),\ \ \widetilde{U}''(t) \in H$ при всех $t \geq 0$, так как

$$(\widetilde{U}', \widetilde{U}') = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k'(t)|^2 \leq \frac{1}{\lambda_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k'(t)|^2 < \infty;$$

$$(\widetilde{U}'',\widetilde{U}'')=\sum_{k=1}^{\infty}|f_k''(t)|^2\leq 2\sum_{k=1}^{\infty}|C_k''|^2e^{-2\lambda_k^2t}+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^t e^{-\lambda_k^2(t-\tau)}\lambda_k\cdot\frac{Z_k(\tau)}{\lambda_k}d\tau\right|^2<$$

$$<2\sum_{k=1}^{\infty}|C_k''|^2+\frac{1}{\lambda_0^2}\int_0^l\sum_{k=1}^{\infty}|Z_k(\tau)|^2d\tau<\infty.$$

Кроме того, $\widetilde{U}'(t)$, $\widetilde{U}''(t)\in H_1$ как пределы (по норме H_1) последовательностей соответствующих функций

$$\widetilde{U}_N^{(i)}(t)=\sum_{k=1}^{N}f_k^{(i)}(t)V_k\quad(i=1,2)$$

из H_1.

Очевидно, что $s_1^{\frac{1}{2}}\widetilde{U}'(t)$, $s_1^{\frac{1}{2}}\widetilde{U}^N(t)\in H_1$; при этом $s_1^{\frac{1}{2}}\widetilde{U}'(t)\in H$ для всех $t\geq 0$, а $s_1^{\frac{1}{2}}\widetilde{U}''(t)\in H$ почти для всех $t\geq 0$, ибо

$$\int_0^l\left(s_1^{\frac{1}{2}}\widetilde{U}''(t),s_1^{\frac{1}{2}}\widetilde{U}''(t)\right)dt=\int_0^l\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|f_k''(t)|^2dt<\infty.$$

Таким образом, мы доказали, что свойства 1)-2) обобщенного решения выполняются для функции $\widetilde{U}(t)$, определяемой рядом (8). Наряду с этим мы получили и некоторые свойства обобщенного решения.

Осталось нам доказать тождество (4). Прежде всего, возьмем в качестве $\Phi(t)$ уже знакомую нам функцию

$$\widetilde{\Phi}(t)=\begin{cases}c(t-t_0)^3V_n, & 0\leq t\leq t_0,\\ 0, & t_0<t\leq l,\end{cases}$$

где c, вообще говоря, комплексное число, отличное от нуля.

Тогда, воспользовавшись тем, что функция $\widetilde{U}(t)$ обладает свойствами 1)-2) обобщенного решения, найдем, как и при доказательстве теоремы 1, что левая часть равенства (4) примет в данном случае такой вид

$$\overline{C}\int_0^{t_0}f_n(t)dt+\overline{C}\lambda_n^2\int_0^{t_0}\int_0^t f_n(\tau)d\tau dt+$$

$$+\overline{C}\int_0^{t_0}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\theta\sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k}(\eta)f_k'(\eta)d\eta d\theta d\tau dt+$$

$$+\overline{C}\int_0^{t_0}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\theta\sum_{k=1}^{\infty}b_{n,k}(\eta)f_k(\eta)d\eta d\theta d\tau dt-$$

$$-\overline{C}\int_0^{t_0}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\theta b_n(\eta)d\eta d\theta d\tau dt-$$

$$-\frac{\overline{C}C_n^{*'}}{6}t_0^3-\frac{\overline{C}C_n^*}{2}t_0^2-\overline{C}C_n t_0.$$

С другой стороны, умножив n-ое уравнение системы (5) на $\overline{C}$ и проинтегрировав его три раза от 0 до t, найдем:

$$\overline{C}f_n(t)+\overline{C}\lambda_n^2\int_0^t f_n(\tau)d\tau+\overline{C}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\theta\sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k}(\eta)f_k'(\eta)d\eta d\theta d\tau+$$

$$+\overline{C}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\theta\sum_{k=1}^{\infty}b_{n,k}(\eta)f_k(\eta)d\eta d\theta d\tau-\overline{C}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^\theta b_n(\eta)d\eta d\theta d\tau-$$

$$-\frac{\overline{C}C_n^{*'}}{2}t^2-\overline{C}C_n^*t-\overline{C}C_n=0.$$

Еще раз проинтегрировав полученное равенство от 0 до t_0, мы, очевидно, получим, что выражение (9) равно нулю.

Аналогично, n-ое уравнение системы (5) проинтегрировав $r+1$ раз, убедимся, что равенство (4) справедливо для любой функции вида

$$\Phi(t)=\begin{cases} c(t-t_0)^r V_n, & 0\le t\le t_0,\\ 0, & t_0<t\le l\ \ (r\ge 3).\end{cases}\tag{10}$$

Рассмотрим совокупность всех функций, имеющих вид

$$\Phi(t)=\sum_{m=1}^{N}\varphi_m^N(t)V_m,\tag{11}$$

где $\varphi_m^N(t)$ — абсолютно-непрерывные функции, имеющие абсолютно-непре-рывные производные 1-го и 2-го порядков. Число N меняется от функции к функции, но конечное для каждой из них. Легко показать, что это множество функций плотно в M в норме:

$$\left\{\int_0^l \left[\left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}, \frac{\partial^3 U}{\partial t^3}\right) + \left(s_1^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, s_1^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + \left(s_1^{\frac{1}{2}}U, s_1^{\frac{1}{2}}U\right)\right]dt\right\}^{\frac{1}{2}} + \tag{12}$$

$$+\left[\left(\frac{\partial^2 U(0)}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 U(0)}{\partial t^2}\right) + \left(s_1^{\frac{1}{2}}\frac{\partial U(0)}{\partial t}, s_1^{\frac{1}{2}}\frac{\partial U(0)}{\partial t}\right) + \left(s_1^{\frac{1}{2}}U(0), s_1^{\frac{1}{2}}U(0)\right)\right]^{1/2}.$$

В самом деле, если $\Phi(t)$ — произвольная функция из M, то

$$s_1^{\frac{1}{2}}\Phi''_{t^2} \in H_1, \;\; \frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3} \in H_1, \;\; s_1^{\frac{1}{2}}\Phi \in H_1,$$

или

$$\int_0^l \left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3}, \frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3}\right)dt < \infty, \;\; \int_0^l \left(s_1^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, s_1^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)dt < \infty,$$

$$\int_0^l \left(s_1^{\frac{1}{2}}\Phi, s_1^{\frac{1}{2}}\Phi\right)dt < \infty.$$

Если положить $F_n(t) = (\Phi, V_n)$, то получим:

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} |F_n'''(t)|^2 dt < \infty, \;\; \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} |F_n''(t)|^2 dt < \infty, \;\; \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |F_n(t)|^2 dt < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^l \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^2 |F_k(t)|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^2 |F''(t)|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |F_k'''(t)|^2\right]dt < \varepsilon$$

для $n > N(\varepsilon)$ и если через Φ_n обозначить функцию $\sum\limits_{k=n}^{\infty} F_k(t)V_k$, то

$$\left\{\int\limits_0^l \left[\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3} - \frac{\partial^3\Phi_n}{\partial t^3}, \frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3} - \frac{\partial^3\Phi_n}{\partial t^3}\right) + \right.\right.$$

$$+\left(s_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi_n}{\partial t^2}\right), s_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi_n}{\partial t^2}\right)\right) +$$

$$\left.\left.+\left(s_1^{\frac{1}{2}}(\Phi - \Phi_n), s_1^{\frac{1}{2}}(\Phi - \Phi_n)\right)\right]dt\right\}^{1/2} +$$

$$
+\Bigg[\left(\frac{\partial^2\Phi(0)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\Phi_n(0)}{\partial t^2},\frac{\partial^2\Phi(0)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\Phi_n(0)}{\partial t^2}\right)+
$$

$$
+\left(s_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(0)-\Phi_n(0)),s_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(0)-\Phi_n(0))\right)+
$$

$$
+\left(s_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\Phi(0)}{\partial t}-\frac{\partial\Phi_n(0)}{\partial t}\right),s_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\Phi(0)}{\partial t}-\frac{\partial\Phi_n(0)}{\partial t}\right)\right)\Bigg]^{1/2}=
$$

$$
=\left\{\int_0^l\sum_{k=n+1}^{\infty}[\lambda_k^2|F_k(t)|^2+\lambda_k^2|F_k^{''}(t)|^2+|F_k^{'''}(t)|^2]dt\right\}^{1/2}+
$$

$$
+\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}(\lambda_k^2|F_k(0)|^2+\lambda_k^2|F_k^{'}(0)|^2+|F_k^{''}(0)|^2)\right]^{1/2}<\varepsilon_1
$$

для $n>N_1(\varepsilon)$.

Если теперь обозначить правую часть (4) через $\Im(\Phi)$ (при фиксированном $U=\widetilde{U}$), то

$$
|\Im(\Phi)-\Im(\Phi_n)|<\eta,\quad n>N_1(\eta).
$$

Таким образом, если функциональная $\Im(\Phi)$ обращается в нуль на всех функциях вида (11), то он тождественно равен нулю в M. Но каждую функцию вида (11) можно аппроксимировать с любой степенью точности в норме (12) линейными комбинациями вида (10).

Итак, тождество (4) справедливо для всех функций вида (11), а значит, и для любой функции Φ из M.

Таким образом, задача построения обобщенного решения уравнения (1) эквивалентна решению системы (5) в пространстве $\Im$, или, что все равно, решению системы (7) в пространстве $\Im_1$. Решив систему (7) в пространстве $\Im_1$, можно найти решение системы (5) в пространстве $\Im$ по формуле (6).

§ 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Выясним теперь вопрос о существовании и единственности решения системы (7).

Прежде всего систему (7) сведем к более простому виду. Имеем:

$$Z_n(t) = B_n(t) - \int_0^t \int_0^\theta \sum_{k=1}^\infty a_{n,k}(\eta) e^{-\lambda_k^2(\theta-\eta)} Z_k(\eta) d\eta d\theta -$$

$$- \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\theta \sum_{k=1}^\infty b_{n,k}(\eta) e^{-\lambda_k^2(\theta-\eta)} Z_k(\eta) d\eta d\theta d\tau.$$

Многократные интегралы в этом уравнении можно свести к однократным, а именно:

$$\int_0^t \int_0^\theta \sum_{k=1}^\infty a_{n,k}(\eta) e^{-\lambda_k^2(\theta-\eta)} Z_k(\eta) d\eta d\theta =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \int_0^t \int_0^\theta a_{n,k}(\eta) e^{-\lambda_k^2(\theta-\eta)} Z_k(\eta) d\eta d\theta =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \int_0^t d\theta \int_0^\theta a_{n,k}(\eta) e^{-\lambda_k^2(\theta-\eta)} Z_k(\eta) d\eta =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \int_0^t d\eta \int_\eta^t a_{n,k}(\eta) e^{-\lambda_k^2(\theta-\eta)} Z_k(\eta) d\theta =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \int_0^t a_{n,k}(\eta) e^{\lambda_k^2 \eta} Z_k(\eta) d\eta \int_\eta^t e^{-\lambda_k^2 \theta} d\theta =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \int_0^t a_{n,k}(\eta) e^{\lambda_k^2 \eta} \cdot \frac{1}{\lambda_k^2} (e^{-\lambda_k^2 \eta} - e^{-\lambda_k^2 t}) Z_k(\eta) d\eta =$$

$$= \int_0^t \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k^2} a_{n,k}(\eta) (1 - e^{-\lambda_k^2(t-\eta)}) Z_k(\eta) d\eta;$$

$$\int_0^t \int_0^\tau \int_0^\theta \sum_{k=1}^\infty b_{n,k}(\eta) e^{-\lambda_k^2(\theta-\eta)} Z_k(\eta) d\eta d\theta d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\theta \int_0^\theta b_{n,k}(\eta) e^{-\lambda_k^2(\theta-\eta)} Z_k(\eta) d\eta =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d\tau \int_0^\tau b_{n,k}(\eta) \frac{1}{\lambda_k^2} (1 - e^{-\lambda_k^2(\tau-\eta)}) Z_k(\eta) d\eta =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d\eta \int_\eta^t b_{n,k}(\eta) \frac{1}{\lambda_k^2} (1 - e^{-\lambda_k^2(\tau-\eta)}) Z_k(\eta) d\eta =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t b_{n,k}(\eta) \frac{1}{\lambda_k^2} [(t-\eta) - (1 - e^{-\lambda_k^2(t-\eta)})] Z_k(\eta) d\eta =$$

$$= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} b_{n,k}(\eta) [(t-\eta) - (1 - e^{-\lambda_k^2(t-\eta)})] Z_k(\eta) d\eta.$$

Вводя обозначения

$$a_{n,k}^*(t,\tau) = -a_{n,k}(t) \frac{1}{\lambda_k^2} (1 - e^{-\lambda_k^2(t-\tau)});$$

$$b_{n,k}^*(t,\tau) = -b_{n,k}(t) \frac{1}{\lambda_k^2} [(t-\tau) - \frac{1}{\lambda_k^2} (1 - e^{-\lambda_k^2(t-\tau)})];$$

$$q_{n,k}(t,\tau) = a_{n,k}^*(t,\tau) + b_{n,k}^*(t,\tau).$$

окончательно получим:

$$Z_n(t) = B_n(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} q_{n,k}(t,\tau) Z_n(\tau) d\tau \quad (n = 1, 2, 3, ...), \tag{7*}$$

где

$$q_{n,k}(t,\tau) = -\frac{1}{\lambda_k^2} \Big\{ (s_2 V_k, V_n)(1 - e^{-\lambda_k^2(t-\tau)}) + (s_3 V_k, V_n)[(t-\tau) -$$

$$- \frac{1}{\lambda_k^2} (1 - e^{-\lambda_k^2(t-\tau)})] \Big\}.$$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть условия теоремы 1 выполнены. Тогда решение системы* (7*) *существует в пространстве* $\Im_1$ *и оно единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Покажем сначала, что свободные члены системы (7^*) образуют последовательность из $\Im_1$, то есть что

$$\left(\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} |B_n(t)|^2 dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Напомним, чему равны элементы, входящие в $B_n(t)$.

$$a_{n,k}(t) = (s_2 V_k, V_n) = (V_k, s_2^* V_n); \quad b_{n,k}(t) = (s_3 V_k, V_n) = (V_k, s_3^* V_n);$$

$$b_n(t) = (f, V_n); \quad C_n = (\varphi_0, V_n); \quad C_n^{'} = (\psi_0, V_n); \quad C_n^{''} = (q_0, V_n)$$

Покажем, что каждый член, входящий в $B_n(t)$, принадлежит $\Im_1$. Имеем:

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n,k}(t)|^2 dt = \int_0^l (f, f) dt < \infty;$$

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \left| t \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{'} b_{n,k}(t)\right|^2 dt = \int_0^l t^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| (s_3 \sum C_k^{'} V_k, V_n)\right|^2 dt \leq$$

$$\leq l^2 \int_0^l \left(s_3 \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{'} V_k, s_3 \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{'} V_k\right) dt < K l^3 \left(s_1^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{'} V_k, s_1^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{'} V_k\right) =$$

$$= K l^3 \left(s_1^{\frac{1}{2}} \psi_0, s_1^{\frac{1}{2}} \psi_0\right) < \infty;$$

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} C_k b_{n,k}(t)\right|^2 dt < K l \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |C_k|^2 = K l \left(s_1^{\frac{1}{2}} \varphi_0, s_1^{\frac{1}{2}} \varphi_0\right) < \infty$$

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{'} a_{n,k}(t)\right|^2 dt < K l \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |C_k^{'}|^2 = K l \left(s_1^{\frac{1}{2}} \psi_0, s_1^{\frac{1}{2}} \psi_0\right) < \infty.$$

Далее,

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n,k}(t)}{\lambda_k^4} C_k^{''} e^{-\lambda_k^2 t}\right|^2 dt < \frac{1}{\lambda_0^8} \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(s_3 \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{''} e^{-\lambda_k^2 t} V_k, V_n\right)\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda_0^8} \int_0^l \left(s_3 \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{''} e^{-\lambda_k^2 t} V_k, s_3 \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{''} e^{-\lambda_k^2 t} V_k\right) dt <$$

$$< \frac{K}{\lambda_0^8} \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} |C_k^{''}|^2 \lambda_k^2 e^{-2\lambda_k^2 t} dt < \frac{K}{2\lambda_0^8} \sum_{k=1}^{\infty} |C_k^{''}|^2 = \frac{K(g_0, g_0)}{2\lambda_0^8} < \infty.$$

По аналогии,

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n,k}(t)}{\lambda_k^2} C_k^{''} e^{-\lambda_k^2 t} \right|^2 dt < \frac{K(g_0, g_0)}{2\lambda_0^4} < \infty.$$

Далее,

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \left| t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n,k}(t)}{\lambda_k^2} C_k^{''} \right|^2 dt < l^2 \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(s_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^{''} V_k}{\lambda_k^2}, V_n \right) \right|^2 dt =$$

$$= l^2 \int_0^l \left(s_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^{''} V_k}{\lambda_k^2}, s_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^{''} V_k}{\lambda_k^2} \right) dt <$$

$$< K l^3 \left(s_1^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^{''} V_k}{\lambda_k^2}, s_1^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^{''} V_k}{\lambda_k^2} \right) =$$

$$= K l^3 \sum \frac{|C_k^{''}|^2}{\lambda_k^4} \lambda_k^2 < \frac{K l^3 (g_0, g_0)}{\lambda_0^2} < \infty.$$

Аналогично,

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n,k}(t)}{\lambda_k^4} C_k^{''} \right|^2 dt < \frac{K l (g_0, g_0)}{\lambda_0^6} < \infty;$$

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n,k}(t)}{\lambda_k^2} C_k^{''} \right|^2 dt < K l \frac{(g_0, g_0)}{\lambda_0^2} < \infty.$$

Подставив найденные оценки, получим, что

$$\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} |B_n(t)|^2 dt < \infty.$$

Тогда и подавно

$$\left(\int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} |B_n(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Запишем систему (7^*) в матричной форме

$$Z(t) = B(t) + \int_0^t Q(t, \tau) Z(\tau) d\tau. \tag{13}$$

Покажем, что оператор Zz:

$$Zz = \int_0^t Q(t, \tau) z(\tau) d\tau$$

действует из $\Im_1$ в $\Im_1$.

Пусть $Z\{z_m\}$ — произвольный элемент из $\Im_1$. Тогда имеем:

$$\sum_{m=1}^{\infty}|(Zz)_m|^2 \leq 2\sum_{m=1}^{\infty}\left|-\int_0^t\sum_{k=1}^{\infty}a_{m,k}(\tau)\cdot\frac{1}{\lambda_k^2}(1-e^{-\lambda_k^2(t-\tau)})z_k(\tau)d\tau\right|^2+$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}\left|-\int_0^t\sum_{k=1}^{\infty}b_{m,k}(\tau)\cdot\frac{1}{\lambda_k^2}\left[(t-\tau)-\frac{1}{\lambda_k^2}(1-e^{-\lambda_k^2(t-\tau)})\right]z_k(\tau)d\tau\right|^2<$$

$$<2l\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{m,k}(\tau)\frac{1}{\lambda_k^2}z_k(\tau)\right|^2d\tau+$$

$$+2l^3\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\left|\sum_{k=1}^{\infty}b_{m,k}(\tau)\cdot\frac{1}{\lambda_k^2}z_k(\tau)\right|^2d\tau=$$

$$=2l\int_0^t\sum_{m=1}^{\infty}\left|\left(s_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k(\tau)}{\lambda_k^2}V_k,V_m\right)\right|^2d\tau+$$

$$+2l^3\int_0^t\sum_{m=1}^{\infty}\left|\left(s_3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k(\tau)}{\lambda_k^2}V_k,V_m\right)\right|^2d\tau=$$

$$=2l\int_0^t\left(s_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k(\tau)}{\lambda_k^2}V_k,s_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k(\tau)}{\lambda_k^2}V_k\right)d\tau+$$

$$+2l^3\int_0^t\left(s_3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k(\tau)}{\lambda_k^2}V_k,s_3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k(\tau)}{\lambda_k^2}V_k\right)d\tau<$$

$$<2lK\int_0^t\left(s_1^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k(\tau)}{\lambda_k^2}V_k,s_1^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k(\tau)}{\lambda_k^2}V_k\right)d\tau+$$

$$+2l^3K\int_0^t\left(s_1^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k(\tau)}{\lambda_k^2}V_k,s_1^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k(\tau)}{\lambda_k^2}V_k\right)d\tau=$$

$$=2lK(1+l^2)\int_0^t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|z_k(\tau)|^2}{\lambda_k^4}\cdot\lambda_k^2d\tau<\frac{2lK(1+l^2)}{\lambda_0^2}\int_0^t\sum_{k=1}^{\infty}|z_k(\tau)|^2d\tau.$$

Обозначим через $\overline{V(t)}$ функцию $\sum_{m=1}^{\infty}|V_m(t)|^2$ для любого элемента $V(t)$ из $\Im_1$. Тогда можно записать следующее неравенство

$$\overline{Zz}<K_0\int_0^t\overline{z(\tau)}d\tau,\quad \text{где } K_0=\frac{2lK}{\lambda_0^2}(1+l^2). \tag{14}$$

Это неравенство справедливо всюду на $[0, l]$. Пользуясь соотношением (14) нетрудно установить, что если z_1 и z_2 — два решения уравнения (13) из $\Im_1$, удовлетворяющие ему почти всюду, то $z_1 \equiv z_2$. Обозначим через W равность $z_1 - z_2$. Тогда

$$W(t) = \int_0^t Q(t, \tau) w(\tau) d\tau,$$

$$\overline{W(t)} = \int_0^t \overline{Q(t, \tau) w(\tau)} d\tau < K_0 \int_0^t \overline{w(\tau)} d\tau$$

и $\overline{w(t)} \equiv 0$ на $[0, \frac{1}{2K_0}]$. В самом деле, допустим противное и пусть $\overline{w(t)}$ в некоторой точке $t_0 \in [0, \frac{1}{2K_0}]$ отлична от нуля. Пусть $\overline{w(t_0)} = M$.

Тогда получаем, $M < K_0 M \int_0^{\frac{1}{2K_0}} d\tau = \frac{M}{2}$, что невозможно. Значит, $\overline{w(t)} \equiv 0$ на $[0, \frac{1}{2K_0}]$.

Отсюда следует, что и $w(t) \equiv 0$ на $[0, \frac{1}{2K_0}]$ и

$$W(t) = \int_{\frac{1}{2K_0}}^t Q(t, \tau) w(\tau) d\tau,$$

$$\overline{W(t)} = \int_{\frac{1}{2K_0}}^t \overline{Q(t, \tau) w(\tau)} d\tau < K_0 \int_{\frac{1}{2K_0}}^t \overline{w(\tau)} d\tau.$$

Следовательно, $\overline{W(t)} \equiv 0$ на $[\frac{1}{2K_0}, \frac{1}{K_0}]$ и так далее.

Решение уравнения (13) получается методом последовательных приближений

$$Z_1(t) = B(t) + \int_0^t Q(t, \tau) B(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t Q(t, \tau) \int_0^\tau Q(\tau, \tau_1) \beta(\tau_1) d\tau_1 d\tau + ... = \sum_{K=0}^\infty d_k(t). \qquad (15)$$

При этом

$$\overline{d_n(t)} < K_0^n \int_0^t \int_0^\tau ... \int_0^{\tau_{n-2}} \overline{B(\tau_{n-1})} d\tau_{n-1} d\tau_{n-2} ... d\tau <$$

$$< \frac{K_0^n l^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^l B(\tau) d\tau, \quad (n = 1, 2, ...),$$

$$d_0(t) = B(t), \quad \overline{d_0(t)} = \overline{B(t)}$$

и ряд (15) сходится в метрике $\Im_1$. Непосредственной подстановкой в уравнение (13) убеждаемся, что функция $Z_1(t)$ действительно является его решением.

Оценим норму решения уравнения (13)

$$\overline{Z_1(t)} < \overline{B(t)} + K_0 \int_0^t \overline{B(\tau)} d\tau + K_0^2 \int_0^t \int_0^\tau \overline{B(\tau_1)} d\tau_1 d\tau + ... =$$

$$= \overline{B(t)} + K_0 \int_0^t e^{K_0(t-\tau)} \overline{B(\tau)} d\tau. \tag{16}$$

Решение системы (5) получаем по формуле

$$f_n(t) = \frac{C_n''}{\lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2 t} + \left(C_n' + \frac{C_n''}{\lambda_n^2}\right) t + \left(C_n - \frac{C_n''}{\lambda_n^4}\right) + \int_0^t d_n(t,\tau) Z_n(\tau) d\tau, \tag{6*}$$

где

$$d_n(t,\tau) = \frac{1}{\lambda_n^2}\left[(t-\tau) - \frac{1}{\lambda_n^2}(1 - e^{-\lambda_n^2(t-\tau)})\right],$$

легко получаемой из формулы (6).

Запишем его в матричной форме

$$F(t) = C(t) + \int_0^t D(t,\tau) Z(\tau) d\tau. \tag{17}$$

Очевидно, что последовательность $\{(C)_n\}$ принадлежит пространству $\Im$.

Из теоремы 2 вытекает, что оператор TF:

$$TF = \int_0^t D(t,\tau) Z(\tau) d\tau$$

действует из $\Im_1$ в $\Im$ и нетрудно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |(TF)_n|^2 < \frac{t^3}{3\lambda_0^2} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} |Z_n(\tau)|^2 d\tau$$

или обозначив $\overline{\overline{\overline{TF}}}$ функцию $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |(TF)_n|^2$, где $F(t)$ — элемент из $\Im$, получим:

$$\overline{\overline{\overline{TF}}} < \frac{t^3}{3\lambda_0^2} \int_0^t \overline{Z(\tau)} d\tau.$$

Доказанные теоремы дают возможность установить существование и единственность обобщенного решения уравнения (1).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть для уравнения (1) выполнены следующие условия:*

1) s_1 *— положительно-определенный линейный оператор с областью определения* $D(s_1)$*, плотной в* H.

2) $s_2(t)$ *и* $s_3(t)$ *— семейства аддитивных и однородных в* H *операторов, подчиненных оператору* s_1 *в том смысле, что почти всюду на* $[0, l]$

$$D(s_i(t)) \supset D(s_1^{\frac{1}{2}}), \quad (s_i U(t), s_i U(t)) \leq K(s_1^{\frac{1}{2}} U, s_1^{\frac{1}{2}} U), \quad (i = 2, 3).$$

Кроме того, операторы $s_2(t)$ *и* $s_3(t)$ *действуют соответственно из* $D(s_2) \cap H_1$ *и* $D(s_3) \cap H_1$ *в* H_1*, т. е. если* $V(t)$ *— элемент* H_1*, принадлежащий* $D(s_i)$ *почти при всех* t*, то* $s_i U \in H_1$ $(i = 2, 3)$.

3) *Свободный член* $f(t)$ *уравнения (1) принадлежит* H_1*, а начальные элементы* $\varphi_0, \psi_0 \in D(s_1^{\frac{1}{2}})$*,* $g_0 \in H$.

При этих условиях уравнение (1) имеет единственное обобщенное решение.

Эта теорема вытекает как следствие из предыдущих теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Существование решения. Если условия 1)-3) выполнены, то по теореме 4 в $\Im_1$ существует решение системы (7). Этому решению, по теореме 2 соответствует последовательность абсолютно-непрерывных со своими производными до второго порядка включительно функций $f_m(t)$, $\{f_m(t)\} \in \Im$, удовлетворяющих почти всюду системе (5). Но тогда, по теореме 3, функция $\widetilde{U}(t) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m(t) V_m$ будет обобщенным решением задачи.

2. Единственность решения. Каждому обобщенному решению соответствует (теорема 1) последовательность абсолютно-непрерывных функций $f_m(t)$, $\{f_m(t)\} \in \Im$, удовлетворяющая почти всюду системе

(5). Но решение системы (5), получаемое по формуле (6), единственно, так как решение системы (7) единственно (теорема 4), а между решениями обоих систем установлено взаимно-однозначное соответствие (теорема 2).

Теорема доказана.

§ 4. ОЦЕНКА НОРМЫ РЕШЕНИЯ. ХАРАКТЕР ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ

Теперь установим ряд свойств обобщенного решения уравнения (1).

Дадим прежде всего оценку функции

$$M(U)=\int_0^t\left(s_1^{\frac12}U,s_1^{\frac12}U\right)dt=\int_0^t\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2|f_m(\tau)|^2d\tau.$$

$$\overline{\overline{\overline{F(t)}}}=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2|f_m(t)|^2\le 6\Big\{\frac{1}{\lambda_0^8}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2|C_m^{''}|^2e^{-2\lambda_m^2t}+t^2\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2|C_m^{'}|^2+$$

$$+\frac{t^2}{\lambda_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}|C_m^{''}|^2+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2|C_m|^2+\frac{1}{\lambda_0^6}\sum_{m=1}^{\infty}|C_m^{''}|^2+\overline{\overline{\overline{TF}}}\Big\};$$

$$\overline{\overline{\overline{F(t)}}}<6\Big\{\frac{1}{\lambda_0^8}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m|C_m^{''}|^2e^{-2\lambda_m^2t}+t^2\left(s_1^{\frac12}\psi_0,s_1^{\frac12}\psi_0\right)+\frac{t^2}{\lambda_0^2}(g_0,g_0)+ \tag{18}$$

$$+\left(s_1^{\frac12}\varphi_0,s_1^{\frac12}\varphi_0\right)+\frac{1}{\lambda_0^6}(g_0,g_0)+\frac{t^3}{3\lambda_0^2}\int_0^t\overline{Z(\tau)}d\tau\Big\};$$

$$M(U)=\int_0^t\overline{\overline{\overline{F(\tau)}}}d\tau<\frac{3}{\lambda_0^8}(g_0,g_0)+2t^3\left(s_1^{\frac12}\psi_0,s_1^{\frac12}\psi_0\right)+\frac{2t^3}{\lambda_0^2}(g_0,g_0)+$$

$$+6t\left(s_1^{\frac12}\varphi_0,s_1^{\frac12}\varphi_0\right)+\frac{6t}{\lambda_0^6}(g_0,g_0)+\int_0^t\frac{2\tau^3}{\lambda_0^2}\int_0^\tau\overline{Z(\tau_1)}d\tau_1d\tau<$$

$$<\left(\frac{3}{\lambda_0^8}+\frac{2t^3}{\lambda_0^2}+\frac{6t}{\lambda_0^6}\right)(g_0,g_0)+2t^3\left(s_1^{\frac12}\psi_0,s_1^{\frac12}\psi_0\right)+$$

$$+6t\left(s_1^{\frac12}\varphi_0,s_1^{\frac12}\varphi_0\right)+\frac{t^4}{2\lambda_0^2}\int_0^t\overline{Z(\tau)}d\tau;$$

Но

$$\int_0^t\overline{Z(\tau)}d\tau<\int_0^t\overline{B(\tau)}d\tau+K_0\int_0^t\int_0^\tau e^{K_0(\tau-\tau_1)}\overline{B(\tau_1)}d\tau_1d\tau.$$

Надо теперь оценить величину $\overline{B(t)}$. Для этого воспользуемся оценками в теореме 4.

Тогда

$$\overline{B(t)}<9\{(f,f)+Kt^2\left(s_1^{\frac12}\psi_0,s_1^{\frac12}\psi_0\right)+K\left(s_1^{\frac12}\varphi_0,s_1^{\frac12}\varphi_0\right)+$$

$$+K\left(s_1^{\frac{1}{2}}\psi_0, s_1^{\frac{1}{2}}\psi_0\right) + \frac{K}{\lambda_0^8}\sum_{k=1}^{\infty}|C_k''|^2\lambda_k^2 e^{-2\lambda_k^2 t} + \frac{K}{\lambda_0^4}\sum_{k=1}^{\infty}|C_k''|^2\lambda_k^2 e^{-2\lambda_k^2 t} +$$

$$+\frac{t^2K}{\lambda_0^2}(g_0, g_0) + \frac{K}{\lambda_0^6}(g_0, g_0) + \frac{K}{\lambda_0^2}(g_0, g_0).$$

Надо еще оценить $\int_0^t \overline{B(\tau)}d\tau$ и

$$\int_0^t \int_0^\tau e^{K_0(\tau-\tau_1)} B(\tau_1)d\tau_1 d\tau.$$

Но, так как получаются при этом очень громоздкие вычисления, то запишем только окончательную оценку нормы решения:

$$M(U) < \alpha(t)\left(s_1^{\frac{1}{2}}\varphi_0, s_1^{\frac{1}{2}}\varphi_0\right) + \beta(t)\cdot\left(s_1^{\frac{1}{2}}\psi_0, s_1^{\frac{1}{2}}\psi_0\right) +$$

$$+\gamma(t)\cdot(g_0, g_0) + \delta(t)\cdot\int_0^t (f, f)d\tau. \tag{19}$$

Из неравенства (19) вытекает корректность поставленной задачи: если V — решение уравнения

$$\frac{d^3V}{dt^3} + s_1\frac{d^2V}{dt^2} + s_2(t)\frac{dV}{dt} + s_3(t)V = f_1(t),$$

$$V|_{t=0} = \varphi_1, \;\; \left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=0} = \psi_1, \;\; \left.\frac{d^2V}{dt^2}\right|_{t=0} = g_1; \;\; f_1 \in H_1,$$

$$\varphi_1, \psi_1 \in D\left(s_1^{\frac{1}{2}}\right), \;\; g_1 \in H,$$

то

$$\int_0^l \left(s_1^{\frac{1}{2}}(U-V), s_1^{\frac{1}{2}}(U-V)\right)_H dt < 2^*\left(s_1^{\frac{1}{2}}(\varphi_0-\varphi_1), s_1^{\frac{1}{2}}(\varphi_0-\varphi_1)\right)^{1/2} +$$

$$+\beta^*\left(s_1^{\frac{1}{2}}(\psi_0-\psi_1), s_1^{\frac{1}{2}}(\psi_0-\psi_1)\right)^{1/2} + \gamma^*(g_0-g_1, g_0-g_1)^{1/2} +$$

$$+\delta^*\left(\int_0^l (f-f_1, f-f_1)dt\right)^{1/2}.$$

В определении обобщенного решения требуется, чтобы элемент $U(t)$ и его производная $U'(t)$ принадлежали множеству $D\left(s_1^{\frac{1}{2}}\right)$ почти для всех t из $[0,l]$. При доказательстве теоремы 3 было установлено, что $U(t)$ и $U'(t)$ принадлежат множеству $D\left(s_1^{\frac{1}{2}}\right)$ при всех $t \geq 0$ и являются элементами $D\left(s_1^{\frac{1}{2}}\right)$, непрерывно зависящими от t. Что касается второй производной $U''(t)$, то было показано, что $U''(t) \in D\left(s_1^{\frac{1}{2}}\right)$ для почти всех $t \geq 0$. Теперь мы докажем теорему, которая более точно характеризует свойства второй производной обобщенного решения.

ТЕОРЕМА 6. *Если имеют предположения теоремы 5, то* $U''(t)$ *принадлежит множеству* $D\big(s_1^{\frac{1}{2}}\big)$ *при всех* $t > 0$ *и является элементом* $D\big(s_1^{\frac{1}{2}}\big)$*, непрерывно зависящим от* t *в промежутке* $(0,l]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Первая часть теоремы получается из неравенства:

$$\left(s_1^{\frac{1}{2}}U''(t), s_1^{\frac{1}{2}}U''(t)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m^2 |f_m''(t)|^2 <$$

$$< 2\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 |C_m''|^2 e^{-2\lambda_m^2 t} + \int_0^l \sum_{m=1}^{\infty} |Z_m(t)|^2 dt.$$

Очевидно, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 |C_m''|^2 e^{-2\lambda_m^2 t}$$

сходится при любом $t > 0$, а интеграл

$$\int_0^l \sum_{m=1}^{\infty} |Z_m(t)|^2 dt$$

конечен, так как $\{Z_m(t)\} \in \Im_1$.

Следовательно, $U''(t) \in D\left(s_1^{\frac{1}{2}}U''(t)\right)$ при всех $t > 0$.

Вторая часть теоремы также просто доказывается.

Возьмем какое-нибудь фиксированное положительное число $\delta > 0$, не превосходящее l.

Тогда, если $t \in [\delta, l]$, то

$$\sum_{m=n}^{\infty} \lambda_m^2 |f_m''(t)|^2 < 2\sum_{m=n}^{\infty} \lambda_m^2 |C_m''|^2 e^{-2\lambda_m^2 \delta} + \int_0^l \sum_{m=n}^{\infty} |Z_m(t)|^2 dt < \varepsilon$$

для $n > N(\varepsilon)$. Следовательно, $s_1^{\frac{1}{2}}U''(t)$ непрерывно зависит от t в промежутке $(0, l]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если дополнительно предположить, что $g_0 \in D\big(s_1^{\frac{1}{2}}\big)$, то из доказательства следует, что $U''(t) \in D\big(s_1^{\frac{1}{2}}\big)$ при всех $t \geq 0$, причем функция $s_1^{\frac{1}{2}}U''(t)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$.

§ 5. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА

Для приближенного решения уравнения (1) может служить метод Галеркина. Пользуясь бесконечными системами, дадим обоснование метода Галеркина в частном случае, когда в качестве полной ортонормированной системы взята последовательность собственных элементов V_k оператора s_1. Каждый агрегат Галеркина

$$U_m(t) = \sum_{k=1}^{m} f_k^m(t) V_k$$

определяется из условий:

1) для всех $t \in [0, l]$ $\ U_m(t), \ U_m^{'}(t) \in H$; почти для всех t

$$s_1^{\frac{1}{2}} U_m, s_1^{\frac{1}{2}} U_m^{'} \in H.$$

2) $U_m(t), \ U_m^{'}(t) \in H_1, \ s_1^{\frac{1}{2}} U_m(t), s_1^{\frac{1}{2}} U_m^{'}(t) \in H_1$

3) Справедлива (тождественно по t) система уравнений:

$$(U_m, V_k) + \int_0^t \left(s_1^{\frac{1}{2}} U_m, s_1^{\frac{1}{2}} V_k \right) dt + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\theta [(U_m^{'}, s_2^* V_k) +$$

$$+ (U_m, s_3^* V_k) - (f, V_k)] d\eta d\theta d\tau - [(g_0, V_k) + \lambda_k^2 (\psi_0, V_k)] \frac{t^2}{2} -$$

$$- [(\psi_0, V_k) + \lambda_k^2 (\varphi_0, V_k)] t - (\varphi_0, V_k) = 0, \ \ (k = 1, 2, ...m) \qquad (20)$$

или

$$f_k^m(t) = -\lambda_k^2 \int_0^t f_k^m(\tau) d\tau - \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\theta \sum_{i=1}^{m} a_{k,i}(\eta) f_i^{m'}(\eta) d\eta d\theta d\tau -$$

$$- \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\theta \sum_{i=1}^{m} b_{k,i}(\eta) f_i^m(\eta) d\eta d\theta d\tau - \frac{C_k^{*'}}{2} t^2 - C_k^* t - C_k \quad (k = 1, 2, ...m).$$

Из последних равенств следует, что функции $f_k^m(t)$ абсолютно-непрерывны, имеют абсолютно-непрерывные производные 1-го и 2-го порядков и удовлетворяют почти для всех $t \geq 0$ системе

$$f_k^{m'''}(t) = -\lambda_k^2 f_k^{m''}(t) - \sum_{i=1}^{m} a_{k,i}(t) f_i^{m'}(t) - \sum_{i=1}^{m} b_{k,i}(t) f_i^m(t) + b_k(t), \ \ (21)$$

$$f_k^m(0) = C_k, \;\; f_k^{m'}(0) = C_k^{'}, \;\; f_k^{m''}(0) = C_k^{''}, \;\; (k = 1, 2, ...m).$$

Система (21) является урезанной по отношению к системе (5). Таким образом, обоснование метода Галеркина в указанном частном случае сводится к выяснению условий, при которых решение системы (5), урезанной по n, стремится (в определенном смысле) к решению полной системы.

Докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда, если $\{U_m\}$ — последовательность агрегатов, полученных методом Галеркина (по системе V_k), то*

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^l ||U^{''}(t) - U_m^{''}(t)||^2_{s_1^{\frac{1}{2}}} dt = 0.$$

Кроме этого, $||U^{(i)}(t) - U_m^{(i)}(t)||_{s_1^{\frac{1}{2}}} \rightrightarrows 0$ на отрезке $[0, 1]$ для $i = 0, 1$ и $||U^{''}(t) - U_m^{''}(t)||_{s_1^{\frac{1}{2}}} \rightrightarrows 0$ на любом отрезке $[\delta, l]$, $\delta > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Нетрудно убедиться, что конечная система (21) при любом фиксированном m имеет единственное решение в классе последовательностей абсолютно-непрерывных функций $\{f_k^m(t)\}$, имеющих абсолютно-непрерывные производные первых двух порядков.

Это решение определяется по формуле:

$$f_k^m(t) = \frac{C_k^{''}}{\lambda_k^4} e^{-\lambda_k^2 t} + \left(C_k^{'} + \frac{C_k^{''}}{\lambda_k^2}\right) t + \left(C_k - \frac{C_k^{''}}{\lambda_k^4}\right) +$$

$$+ \int_0^t d_k(t, \tau) Z_k^m(\tau) d\tau \;\; (k = 1, 2, ...m), \tag{22}$$

где $Z_k^m(t)$ — функции, суммируемые с квадратом и удовлетворяющие тождественно системе интегральных уравнений:

$$Z_k^m(t) = B_k(t) + \int_0^t \sum_{i=1}^m q_{k,i}(t, \tau) Z_i^m(\tau) d\tau, \;\; k = 1, 2...m. \tag{23}$$

Между системами (21) и (23) установлено взаимно-однозначное соответствие. Поэтому, достаточно показать, что система (23) имеет единственное решение в $\Im_1$.

Введем вспомогательные функции

$$r_k^m(t) = Z_k(t) - Z_k^m(t), \quad k = 1, 2 \ldots m.$$

Тогда

$$r_k^m(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} q_{k,i}(t,\tau) Z_i(\tau) d\tau - \int_0^t \sum_{i=1}^{m} q_{k,i}(t,\tau) Z_i^m(\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^t \sum_{i=1}^{m} q_{k,i}(t,\tau) r_i^m(\tau) d\tau + \int_0^t \sum_{i=m+1}^{\infty} q_{k,i}(t,\tau) Z_i(\tau) d\tau$$

или в матричной форме

$$R_m(t) = B_m(t) + \int_0^t Q_m(t,\tau) R_m(\tau) d\tau. \tag{24}$$

При этом каждая функция $r_k^m(t)$ интегрируема с квадратом, и $\{r_k^m(t)\} \in \Im_1$.

Свободный член уравнения (24) также принадлежит пространству $\Im_1$. В самом деле,

$$\int_0^l \sum_{k=1}^{m} \left| \int_0^t \sum_{i=m+1}^{\infty} q_{k,i}(t,\tau) Z_i(\tau) d\tau \right|^2 dt =$$

$$= \int_0^l \sum_{k=1}^{m} \left| \int_0^t \Bigg\{ \sum_{i=m+1}^{\infty} a_{k,i}(t) \frac{1}{\lambda_i^2} (1 - e^{-\lambda_i^2 (t-\tau)}) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} b_{k,i}(t) \left[(t-\tau) - \frac{1}{\lambda_i^2} (1 - e^{-\lambda_i^2 (t-\tau)}) \right] \Bigg\} Z_i(\tau) d\tau \right|^2 dt <$$

$$< \frac{2}{\lambda_0^2} \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^t \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} (s_2 V_i, V_k) Z_i(\tau) d\tau \right|^2 dt +$$

$$+ \frac{2l^2}{\lambda_0^2} \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^t \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} (s_3 V_i, V_k) Z_i(\tau) d\tau \right|^2 dt <$$

$$< \frac{2l^2}{\lambda_0^2} \int_0^l \left(s_2 \sum_{i=m+1}^{\infty} V_i \frac{Z_i(t)}{\lambda_i}, s_2 \sum_{i=m+1}^{\infty} V_i \frac{Z_i(t)}{\lambda_i} \right) dt+$$

$$+ \frac{2l^4}{\lambda_0^2} \int_0^l \left(s_3 \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{Z_i(t)}{\lambda_i} V_i, s_3 \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{Z_i(t)}{\lambda_i} V_i \right) dt <$$

$$< \frac{2l^2}{\lambda_0^2} K \int_0^l \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \cdot \lambda_i^2 |Z_i(t)|^2 dt+$$

$$+ \frac{2l^4}{\lambda_0^2} K \int_0^l \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \cdot \lambda_i^2 |Z_i(t)|^2 dt <$$

$$< \frac{2l^2(1+l^2)}{\lambda_0^2} K \int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} |Z_i(t)|^2 dt = K_0 l \int_{i=1}^{\infty} |Z_i(t)|^2 dt.$$

Как и в теореме 4, легко установить, что оператор $L_m W$:

$$(L_m W)_k = \begin{cases} \int_0^t \sum_{i=1}^m q_{k,i}(t,\tau) W_i(\tau) d\tau, & k \leq m, \\ 0, & k > m, \end{cases}$$

действует из $\Im_1$ в $\Im_1$. При этом

$$\overline{L_m W} \leq K_0 \int_0^t \overline{W(\tau)} d\tau, \quad K_0 = \frac{2l(1+l^2)}{\lambda_0^2}.$$

Отсюда, как и в теореме 4, заключаем, что система (23) имеет единственное решение в $\Im_1$. При этом

$$\overline{R_m(t)} \leq \overline{B_m(t)} + K_0 \int_0^t e^{K_0(t-\tau)} \overline{B_m(\tau)} d\tau, \tag{25}$$

где

$$\overline{B_m(t)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big| \int_0^t \sum_{i=m+1}^{\infty} q_{k,i}(t,\tau) Z_i(\tau) d\tau \Big|^2 \leq \frac{2l}{\lambda_0^2} \int_0^l \big(s_2 \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{Z_i(\tau)}{\lambda_i} V_i,$$

$$s_2 \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{Z_i(\tau)}{\lambda_i} V_i \big) d\tau + \frac{2l^3}{\lambda_0^2} \int_0^l \left(s_3 \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{Z_i(\tau)}{\lambda_i} V_i, s_3 \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{Z_i(\tau)}{\lambda_i} V_i \right) d\tau <$$

$$< K_0 \int_0^l \sum_{i=m+1}^{\infty} |Z_i(\tau)|^2 d\tau.$$

Так как последовательность $\{Z_m(t)\} \in \Im_1$, то при неограниченном возрастании m интеграл

$$\int_0^l \sum_{i=m+1}^{\infty} |Z_i(t)|^2 dt \to 0.$$

Таким образом, величина

$$\overline{R_m(t)} = \sum_{k=1}^{m} |Z_k(t) - Z_k^m(t)|^2$$

стремится к нулю при неограниченном возрастании m равномерно на всем отрезке $[0, l]$.

Теперь рассмотрим разность $f_k(t) - f_k^m(t)$.

$$f_k(t) - f_k^m(t) = \int_0^t d_k(t,\tau)[Z_k(\tau) - Z_k^m(\tau)]d\tau;$$

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2 |f_k(t) - f_k^m(t)|^2 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2 \left| \int_0^t \frac{1}{\lambda_k^2}\left[(t-\tau) - \frac{1}{\lambda_k^2}(1 - e^{-\lambda_k^2(t-\tau)})\right] r_k^m(\tau)d\tau \right|^2 <$$

$$< \frac{l^3}{\lambda_0^2} \int_0^t \sum_{k=1}^{m} |r_k^m(\tau)|^2 d\tau < \frac{l^3}{\lambda_0} \int_0^l \overline{R_m(\tau)} d\tau \text{ на } [0, l].$$

Аналогично, нетрудно показать, что и

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2 |f_k^{(i)}(t) - f_k^{m(i)}(t)|^2 < K_i \int_0^l \overline{R_m(\tau)} d\tau, \ \ (i = 1, 2; \ \ K_i - const).$$

Но $\int\limits_0^l \overline{R_m(\tau)} d\tau \to 0$ при $m \to \infty$, так как $\overline{R_m(t)} \rightrightarrows 0$ на $[0, l]$ при неограниченном возрастании m. Следовательно, величина

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2 |f_k^{(j)}(t) - f_k^{m(j)}(t)|^2$$

стремится к нулю при неограниченном возрастании m равномерно на всем отрезке $[0, l]$, $(j = 0, 1, 2)$.

Так как последовательность $\{f_k''(t)\} \in \Im$, то при неограниченном возрастании m интеграл

$$\int_0^l \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k''(t)|^2 dt \to 0.$$

Для доказательства первой части теоремы остается воспользоваться равенством:

$$\int_0^l ||U'' - U''_m||^2_{s_1^{\frac{1}{2}}} dt = \int_0^l \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2 |f''_k(t) - f_k^{m''}(t)|^2 dt + \int_0^l \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k^2 |f''_k(t)|^2 dt.$$

При доказательстве теоремы 3 было установлено, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k(t)|^2$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |f'_k(t)|^2$$

сходятся равномерно на отрезке $[0, l]$, а при доказательстве теоремы 6 было показано, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |f''_k(t)|^2$$

сходится равномерно на любом отрезке $[\delta, l], \quad \delta > 0$.

Поэтому выражение

$$||U^{(i)}(t) - U_m^{(i)}(t)||^2_{s_1^{\frac{1}{2}}} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2 |f_k^{(i)}(t) - f_k^{m(i)}(t)|^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k^{(i)}(t)|^2 \quad (26)$$

стремится равномерно к нулю при неограниченном возрастании m для $i = 0, 1$ на отрезке $[0, l]$, а для $i = 2$ на каждом отрезке $[\delta, l], \quad \delta > 0$. Таким образом, теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если предположить дополнительно, что $g_0 \in D\big(s_1^{\frac{1}{2}}\big)$, то из равенств (26) следует, что и $||U''(t) - U''_m(t)||$ стремится к нулю равномерно на всем отрезке $[0, l]$ при неограниченном возрастании m.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С.Н. Об одном классе функциональных уравнений с частными производными. // Известия АН СССР. Сер. матем. 1940. Том 4. No 1. С. 17–26.

2. Халилов З.И. К методу разложения по собственным функциям главной части уравнения в решении смешанных задач. // Доклады АН Азербайджанской ССР. 1954. Том 10. No 4.

3. Коробейник Ю.Ф. Бесконечные системы линейных дифференциальных уравнений. Автореферат диссертации на соискание учч-ной степени канд. физ.-мат. наук. – Ростов-на-Дону, 1955. 15 с.

4. Коробейник Ю.Ф. О решении операторных уравнений методом Фурье // Труды Воронежского семинара по функциональному анализу. 1957. Выпуск 6. С. 71-86.

5. Ладыженская О.А. О решении нестационарных операторных уравнений различных типов. // Доклады АН СССР. 1955. Том 102. No 2. С. 207-210.

6. Михлин С.Г. Прямые методы в математической физике: монография / С.Г. Михлин. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы [ОГИЗ ГТТИ], 1950. – 422 с.

7. Вишик М.И. Задачи Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения // Матем. сб. 1956. Том 39(81). No 1. С. 51-148.

8. Красносельский М.А., Крейн С.Г., Соболевский П.Е. О дифференциальных уравнениях с неограниченными операторами в банаховых пространствах. // Доклады АН СССР. 1956. Том 3. No 1. С. 19-22.

9. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с..

10. Натансон И.П. Теория функций вещественного переменного. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 399 с..

Содержание второй части

стр.

Научное издание

Мамий Казбек Сагидович

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Редактор В.Б. Тлячев

Подписано в печать 01. 03. 2014. Формат 60x90 1/16.

Усл. печ. л. 9,8. Тираж 100 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ИП Солодовников А.Н.

Тел. 8-961-522-32-33. Email: andre-sol@mail.ru

Оригинал-макет данного издания и оформление обложки

выполнены В.Б. Тлячевым в пакете LaTeX.