ВЫЧИСЛЕНИЕ СКАЛЯРНОЙ ЧАСТОТЫ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.Х. Сташ, А.Д. Ушхо, А.Д. Есин

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Получена формула для вычисления скалярных частот нулей, знаков и корней решений некоторых классов линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение, колеблемость решений, число нулей функции, скалярная частота решения.

Данная работа посвящена исследованию асимптотического поведения решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка. Будем рассматривать свойства вещественных решений вещественных уравнений вида

$$\ddot{x}+a_1(t)\dot{x}+a_2(t)x=0 \qquad (1)$$

с непрерывными коэффициентами на положительной полуоси.

Определение 1 [1]. Нулями скалярной функции x назовем такие $t>0$, при которых $x(t)=0$.

Определение 2 [1]. Будем говорить, что в точке $t>0$ происходит смена знака функции $x(t)$, если в любой окрестности этой точки функция $x(t)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Заметим, что каждая точка смены знака функции $x(t)$ является нулем, но обратное не верно. Однако для однородного дифференциального уравнения второго порядка с непрерывными коэффициентами каждый нуль ненулевого решения является и точкой смены знака в силу теоремы существования и единственности.

Определение 3 [1]. Частоту нулей скалярной функции $x(t)$ определим формулой

$$\nu(x)\equiv\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{\pi}{T}\nu(x,T),$$

где $\nu(x,T)$ – число нулей x на промежутке $(0;T]$.

Например, функция $x=\sin wt$ на промежутке $(0;T]$ имеет $\left[\frac{wT}{\pi}\right]$ нулей, поэтому

$$\nu(\sin wt)\equiv\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{\pi}{T}\nu(y,T)=\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{\pi}{T}\left[\frac{wT}{\pi}\right]=\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{\pi}{T}\left(\frac{wT}{\pi}-\left\{\frac{wT}{\pi}\right\}\right)=w,$$

где $[a]$ – целая часть числа a, $\{a\}$ – дробная часть числа a ($0\le\{a\}<1$).

Теорема 1. Пусть для функций $p(t)$, $q(t)$ найдутся постоянные p и q, удовлетворяющие условию

$$q-p^2=c^2>0,$$

такие, что

$$\int_a^t\left|p(t)-p\right|dt=o(t), \qquad \int_a^t\left|q(t)-q\right|dt=o(t).$$

Тогда для любого ненулевого решения уравнения

$$\ddot{x} + 2p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{2}$$

справедливо равенство $\nu(x) = c$.

Доказательство. Замена переменных $\xi = ct$, $u = xe^{pt}$ преобразует уравнение (2) к виду

$$c^2 \cdot \ddot{u} + 2c[p(\xi/c) - p]\dot{u} + [q(\xi/c) - 2p \cdot p(\xi/c) + p^2]u = 0,$$

поэтому доказательство этой теоремы может быть сведено к доказательству ее частного случая

$$\ddot{u} + 2p(\xi)\dot{u} + q(\xi)u = 0, \tag{3}$$

когда $p = 0$, $q = 1$. В (3) точка означает уже производную по ξ. Полагая $v = \dot{u}$ и вводя на плоскости (u, v) полярные координаты $u = r\cos\varphi$, $v = -r\sin\varphi$, получим два уравнения

$$\frac{\dot{r}}{r} = -2p(\xi)\sin^2\varphi + (q(\xi) - 1)\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\dot{\varphi} = \sin^2\varphi - 2p(\xi)\sin\varphi\cos\varphi + q(\xi)\cos^2\varphi.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\dot{\varphi} = -2p(\xi)\sin\varphi\cos\varphi + (q(\xi) - 1)\cos^2\varphi$$

и беря интегралы от обеих частей, получим $\varphi(\xi) \sim \xi$ при $\xi \to +\infty$ [2].

Так как при обращении $u(\xi)$ в нуль $\varphi(\xi)$ проходит через значения $\pi n + \frac{\pi}{2}$, то $\pi n + \frac{\pi}{2} \sim \xi_n$ или $\pi n \sim \xi_n$ при $n \to +\infty$, где $\{\xi_n\}$ последовательность нулей какого-либо решения u уравнения (3) расположенных в порядке возрастания. Далее, возвращаясь к старым переменным, будем иметь эквивалентность

$$t_n \sim \left(\frac{\pi}{c}\right)n \text{ при } n \to +\infty,$$

которая для любого ненулевого решения x уравнения (2) равносильна

$$\nu(x,t) \sim \left(\frac{c}{\pi}\right)t \text{ при } t \to +\infty,$$

а значит, имеет место равенство

$$\nu(x) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu(x,t) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\left(\frac{c}{\pi}\right)t = c.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2. Пусть задано уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0, \tag{4}$$

где непрерывные на полуоси $[a, +\infty)$ функции $\omega(t) > 0$ и $\dot{\omega}(t)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\dot{\omega}}{2\omega^2}\right) = \alpha, \quad 0 \le |\alpha| < 1. \tag{5}$$

Тогда для любого ненулевого решения x уравнения (4) справедлива формула

$$\nu(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{t}\int_a^t \omega(t)dt.$$

Доказательство. Помимо некоторой гладкости функции $\omega(t)$ условие (5) означает, что $\omega(t)$ не может убывать быстрее, чем $\frac{1}{t}$, но может как угодно быстро возрастать, поэтому несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \omega(t)dt$ расходится.

Замена независимой переменной

$$\xi = \int_a^t \omega(t)dt \tag{6}$$

преобразует уравнение (4) в уравнение типа (2):

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + 2\left(\frac{\dot{\omega}}{2\omega^2}\right)\frac{dx}{d\xi} + x = 0. \tag{7}$$

Очевидно, что полуось $[a,+\infty)$ при преобразовании (6) переходит в полуось $[0,+\infty)$. Следовательно, к уравнению (7) применима теорема 1.

Теорема 2 полностью доказана.

Замечание 1. Доказанная теорема 2 остается в силе и после замены верхнего предела в определении частоты нулей на нижний предел.

Замечание 2. Доказанная теорема 2 остается в силе и после замены числа нулей решения в определении частоты нулей на число смен его знака или на число его корней, то есть нулей с учетом их кратностей.

Литература

1. *Сергеев И.Н.* Определения и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. – 2006. – Вып. 25. – С. 249-294.
2. *Соболь И.М.* Исследование асимптотического поведения решений линейного дифференциального уравнения второго порядка при помощи полярных координат// Математический сборник. – 1951. – Т. 28(70). – №3. – С. 707-714.

CALCULATION OF SCALAR FREQUENCY OF SOLUTIONS SOME CLASSES OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.Kh. Stash, A.D. Ushkho, A.D. Esin

In the article a formula for calculating the scalar zero frequency, signs and the roots of solutions of some classes linear homogeneous second order differential equations.

