2015 г. **№20**

Т р у д ы Ф О Р А

АБЕЛЕВЫ РАСШИРЕНИЯ СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ OSP (1,2) НАД ПОЛЕМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

О.К. Тен

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Получено описание абелевых расширений ортосимплектической супералгебры Ли $\operatorname{osp}(1,2)$ с помощью неприводимого модуля над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 2$.

В данной работе мы приводим полученное нами описание абелевых расширений ортосимплектической супералгебры Ли $\operatorname{osp}(1,2)$ с помощью неприводимого модуля над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 2$. В первой части работы мы устанавливаем соответствие между расширениями супералгебры Ли и ее двумерными когомологиями. Тогда описание расширений следует из описания двумерных когомологий с коэффициентами в неприводимом модуле. Во второй части мы доказываем аналог теоремы А. С. Джумадильдаева [2] о тривиальности когомологий. В частности, мы показали, что когомологии супералгебры Ли с коэффициентами в неприводимом ограниченном модуле тривиальны, а потому все абелевы расширения с помощью неприводимых неограниченных модулей являются расщепляемыми. В случае ограниченных модулей когомологии были описаны в работе [3]. Из этого описания и соответствия между расширениями и когомологиями мы получаем нужное описание расширений с точностью до эквивалентности. Полученные результаты сформулированы в теореме 4. Заметим, что в случае поля характеристики 0 когомологии супералгебры Ли $\operatorname{osp}(1,2)$ являются тривиальными, и, следовательно, все абелевы расширения являются расщепляемыми.

Будем считать, что основное поле K имеет характеристику $p > 2$. Все необходимые определения, принятые в работе, приведены в 1 и 2 частях.

Результаты работы были получены при участии Е. С. Ильченко (1999 г., доказательство теоремы А. С. Джумадильдаева для супералгебр Ли) и А. Ш. Хачака (2002 г., описание четных двумерных когомологий супералгебры Ли $\operatorname{osp}(1,2)$ с коэффициентами в простых ограниченных модулях).

1. Абелевые расширения и когомологии супералгебр Ли. Пусть $L = L_{\bar 0} \oplus L_{\bar 1}$ — супералгебра Ли над K, $V = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$ — L-модуль. Тогда коцепной комплекс $C(L, M) = (C^q(L, M), d)$ определяется следующим образом [1]: суперпространство q-мерных коцепей

$$C^q(L, M) = C^q_{\bar 0}(L, M) \oplus C^q_{\bar 1}(L, M)$$

состоит из q-линейных отображений

$$c : \underbrace{L_{\bar 0} \times \ldots \times L_{\bar 0}}_{q_0} \times \underbrace{L_{\bar 1} \times \ldots \times L_{\bar 1}}_{q_1} \to V_r, \quad \deg c = q_1 + r,$$

где $q_0 + q_1 = q$, $r \in \{\bar 0, \bar 1\}$, кососимметрических относительно элементов из $L_{\bar 0}$ и симметрических относительно элементов из $L_{\bar 1}$, операция кограницы

$$d \colon C^q_p(L, V) \to C^{q+1}_p(L, V), \quad p \in \{\bar 0, \bar 1\}, q = 1, 2, \ldots$$

определяется равенством

$$
\begin{aligned}
dc(g_1,\dots,g_{q_0},h_1,\dots,h_{q_1}) = &\sum_{1\leqslant s<t\leqslant q_0}(-1)^{s+t-1}c([g_s,g_t],g_1,\dots,\hat{g}_s,\dots,\hat{g}_t,\dots,g_{q_0},h_1,\dots,h_{q_1})+\\
&+\sum_{s=1}^{q_0}\sum_{t=1}^{q_1}(-1)^{s-1}c(g_1,\dots,\hat{g}_s,\dots,g_{q_0},[g_s,h_t],h_1,\dots,\hat{h}_t,\dots,h_{q_1})+\\
&+\sum_{1\leqslant s<t\leqslant q_1}c([h_s,h_t],g_1,\dots,g_{q_1},h_1,\dots,\hat{h}_s,\dots,\hat{h}_t,\dots,h_{q_1})+\\
&+\sum_{s=1}^{q_0}(-1)^s g_s c(g_1,\dots\hat{g}_s,\dots,g_{q_0},h_1,\dots,h_{q_1})+\\
&+(-1)^{q_1-1}\sum_{s=1}^{q_1}h_s c(g_1,\dots,g_{q_0},h_1,\dots,\hat{h}_s,\dots,h_{q_1}),
\end{aligned}
$$

где, как обычно, значок $\hat{}$ означает, что соответствующий член отсутствует.

Обозначим через $Z^q(L,V)=Z^q_{\bar 0}(L,V)\oplus Z^q_{\bar 1}(L,V)$, $B^q(L,V)=B^q_{\bar 0}(L,V)\oplus B^q_{\bar 1}(L,V)$ суперпространства q-мерных коциклов и кограниц: $Z^q_p(L,V)=\{z\in C^q_p(L,V)\mid dz=0\}$, $B^q_p(L,V)=dC^{q-1}_p(L,V)$, $p=\bar 0,\bar 1$. Факторпространство $H^q(L,V)=H^q_{\bar 0}(L,V)\oplus H^q_{\bar 1}(L,V)$, где $H^q_p(L,V)=Z^q_p(L,V)/B^q_p(L,V), p\in\{\bar 0,\bar 1\}$ называется суперпространством q-мерных когомологий супералгебры Ли L с коэффициентами в L-модуле V.

Имеет место стандартное соответствие между двумерными когомологиями супералгебры Ли и ее абелевыми расширениями. Расширением $\widehat{L}$ супералгебры Ли L посредством супералгебры Ли V называется точная последовательность

$$0\to V\overset{i}{\to}\widehat{L}\overset{\pi}{\to}L\to 0,$$

где i,π — четные гомоморфизмы. Расширение $0\to V\overset{i'}{\to}\tilde{L}\overset{\pi'}{\to}L\to 0$, называется эквивалентным исходному расширению $0\to V\overset{i}{\to}\widehat{L}\overset{\pi}{\to}L\to 0$, если существует изоморфизм $\varphi\colon\widehat{L}\to\tilde{L}$ супералгебр Ли такой, что диаграмма коммутативна. Имеет место следующая

Теорема 1. Всякое расширение $\widehat{L}$ супералгебры Ли L посредством L-модуля V, рассматриваемого как абелева супералгебра Ли, определяет класс двумерных четных когомологий супералгебры Ли L со значениями в V, по которому расширение восстанавливается однозначно. Расщепляемое расширение соответствует нулевому классу когомологий.

Доказательство. Пусть $0\to V\overset{i}{\to}\widehat{L}\overset{\pi}{\to}L\to 0$ — расширение. Отождествим $V=V_{\bar 0}\oplus V_{\bar 1}$ с $i(V)=i(V_{\bar 0}))\oplus i(V_{\bar 1}\subseteq\widehat{L}$. Т.к. V — идеал в $\widehat{L}$, то V является $\widehat{L}$-модулем относительно присоединенного действия. Соответствующее представление супералгебры Ли $\widehat{L}$ обозначим через θ. В силу коммутативности V имеем: $\theta(V)=0$. Тогда на V задается структура $L=\widehat{L}/V$-модуля, соответствующее представление которого будем также обозначать через θ: если $x\in L_\alpha$, $v\in V_\beta$, то $\theta(x)v=[y,v]$, где $y\in\widehat{L}_\alpha$ такое, что $\pi(y)=x$.

Пусть теперь $S=S_0\oplus S_1$ — дополнительное к V подсуперпространство в $\widehat{L}$: $\widehat{L}=V\oplus S$. Тогда отображение $\pi\colon S\to L$ биективно, так что $S_0\oplus S_1=\mu(L_0\oplus L_1)$, где μ — четное обратное к π отображение.

Пусть $\varphi(x,y)=[\mu(x),\mu(y)]-\mu([x,y])$, $x,y\in L$. Тогда получаем: $\pi([\mu(x),\mu(y)]-\mu([x,y]))=0$ и $\varphi(x,y)\in V$. Т.к. μ четно, то $\varphi\colon L\times L\to V$ четно.

Всякий однородный элемент $\widehat{L}$ однозначно представляется в виде $m+\mu(x)$, $m\in V_\alpha, x\in L_\alpha$. Следовательно, $\widehat{L}$ можно отождествить с $V\oplus L$: $m+\mu(x)\mapsto(m,x)$. При этом, так как

$$[m+\mu(x),n+\mu(y)]=\mu([x,y])+\theta(x)n-(-1)^{my}\theta(y)m+\varphi(x,y),$$

то естественно положить в $V\oplus L$:

$$[(m,x),(n,y)]=(\theta(x)n-(-1)^{my}\theta(y)m+\varphi(x,y),[x,y]).$$

Из условия, что $V\oplus L$ является супералгеброй Ли, получаем, что φ — четный 2-коцикл. Аналогичным образом проверяется, что если φ — четный 2-коцикл, то пространство $V\oplus L$ с соответствующим умножением является расширением супералгебры Ли L посредством V.

Таким образом, каждому расширению ставится в соответствие четный 2-коцикл. Заметим, что наше соответствие зависит от выбора обратного к π отображения μ. Пусть $\mu'\colon L\to\widehat{L}$ — другое такое отображение. Обозначим $g(x)=\mu'(x)-\mu(x)$. Тогда $\pi(g(x))=0$ и $g(x)\in V$, т.е. $g\colon L\to V$. По определению g четно. Но тогда

$$\varphi'(x,y)=[\mu'(x),\mu'(y)]-\mu'([x,y])=\varphi(x,y)+\theta(x)g(y)-(-1)^{xy}\theta(y)g(x)-g([x,y])=\varphi(x,y)+dg(x,y).$$

Таким образом, четные 2-коциклы, описывающие расширение с точностью до эквивалентности, образуют смежный класс. Теорема доказана. □

2. Аналог теоремы А. С. Джумадильдаева о тривиальности когомологий.

Пусть $L=L_{\bar 0}\oplus L_{\bar 1}$ — супералгебра Ли и $U(L)$ — его универсальная обертывающая алгебра. Тогда, если $M=M_{\bar 0}\oplus M_{\bar 1}$ — модуль над супералгеброй Ли $L=L_{\bar 0}\oplus L_{\bar 1}$, то M является модулем над супералгеброй $U(L)$. Для всякого элемента $x\in U(L)$ обозначим через x_M линейный оператор, соответствующий элементу x при данном представлении. Справедливо следующее утверждение о тривиальности групп когомологий супералгебр Ли. Аналогичное утверждение для алгебр Ли было доказано А. С. Джумадильдаевым в работе [3].

Теорема 2. Пусть M — модуль над супералгеброй Ли $L=L_{\bar 0}\oplus L_{\bar 1}$. Тогда, если для некоторого четного элемента $x\in L_{\bar 0}$ существует p-многочлен $f(t)=\sum_{i\geqslant 0}\alpha_i t^{p^i}\in K[t]$ такой, что элемент $f(x)\in U(L)$ является центральным, а оператор $f(x)_M$ является невырожденным, то $H^*(L,M)=0$.

Доказательство теоремы следует доказательству в случае алгебр Ли с некоторыми поправками, учитывающими случай супералгебр Ли.

Пусть θ — представление супералгебры Ли L в пространстве коцепей

$$C_p^q=\bigoplus_{\substack{r+s=q,\\ s+t=p}}\operatorname{Hom}(\wedge^r L_{\bar 0}\otimes S^s L_{\bar 1},M_t),$$

определенное следующим образом:

$$\begin{aligned}(\theta(g+h)c)(g_1,\dots,g_r,h_1,\dots,h_s)&=g_Mc(g_1,\dots,g_r,h_1,\dots,h_s)+(-1)^{s-1}h_Mc(g_1,\dots,g_r,h_1,\dots,h_s)+\\ &+\sum_{1\leqslant j\leqslant r}c([g,g_j],g_1,\dots,\hat{g}_j,\dots,g_r,h_1,\dots,h_s)+\sum_{1\leqslant j\leqslant s}c(g_1,\dots,g_r,[g,h_j],h_1,\dots,\hat{h}_j,\dots,h_s)+\\ &+\sum_{1\leqslant j\leqslant r}c([h,h_j],g_1,\dots,g_r,h_1,\dots,\hat{h}_j,\dots,h_s),\end{aligned}$$

где $g,g_1,\dots,d_r\in L_{\bar 0}$, $h,h_1,\dots,h_s\in L_{\bar 1}$. Продолжим это представление до представления θ универсальной обертывающей алгебры $U(L)$. Нетрудно проверить, что для всякого $x\in L$ имеет место равенство: $d\theta(x)=\theta(x)d$.

Лемма. Для произвольного p-многочлена $f(t)\in K[t]$ и для любого четного элемента x супералгебры Ли L имеет место равенство $\theta(f(x))=f(\theta(x))$.

Доказательство. Достаточно проверить для одночлена $f(t)=t^{p^i}$. Надо установить, что для произвольной коцепи c. Рассмотрим представления θ_q $(0\leqslant q\leqslant k$ алгебры Ли $L_{\bar 0}$ в пространстве полилинейных отображений, заданные следующим образом:

$$\begin{aligned}&\theta_0(x)=x_M,\\ &(\theta_q(x)c)(g_1,\dots,g_r,h_1,\dots,h_s)=(-1)^{q-1}c([x,g_q],g_1,\dots,\hat{g}_q,\dots,g_r,h_1,\dots,h_s)+\\ &\qquad+c(g_1,\dots,g_r,[x,h_q],h_1,\dots,\hat{h}_q,\dots,h_s),\ \text{если } 0<q\leqslant k.\end{aligned}$$

Для любого $x \in L_{\bar{0}}$ эндоморфизмы θ_q, $0 \leqslant q \leqslant k$ попарно коммутируют и, следовательно, $\theta(x)^{p^i} = \left(\sum_{0\leqslant q\leqslant k} \theta_q(x)\right)^{p^i} = \sum_{0\leqslant q\leqslant k} \theta_q(x)^{p^i} = \sum_{0\leqslant q\leqslant k} \theta_q(x^{p^i}) = \theta(x^{p^i})$. □

Следствие. Если в условиях теоремы 2 элемент $f(x) \in U(L)$ является центральным, то $\theta(f(x)) = f(x)_M$ и $f(x)_M d = df(x)_M$.

Доказательство первого равенства проводится точно также, как и в работе А. С. Джумадильдаева. Для доказательства второго равенства воспользуемся представлением $dc = c^{(1)} + c^{(2)} + c^{(3)} + c^{(4)} + c^{(5)}$ для $c \in \mathrm{Hom}\,(\wedge^r L_{\bar{0}} \otimes S^s L_{\bar{1}}, M_t)$, где

$$\begin{aligned}
c^{(1)}(g_1,\ldots,g_r,h_1,\ldots,h_s) &= \sum_{1\leqslant s<t\leqslant q_0} (-1)^{s+t-1} c([g_s,g_t],g_1,\ldots,\hat{g}_s,\ldots,\hat{g}_t,\ldots,g_{q_0},h_1,\ldots,h_{q_1})\\
c^{(2)}(g_1,\ldots,g_r,h_1,\ldots,h_s) &= \sum_{s=1}^{q_0}\sum_{t=1}^{q_1}(-1)^{s-1}c(g_1,\ldots,\hat{g}_s,\ldots,g_{q_0},[g_s,h_t],h_1,\ldots,\hat{h}_t,\ldots,h_{q_1})\\
c^{(3)}(g_1,\ldots,g_r,h_1,\ldots,h_s) &= \sum_{1\leqslant s<t\leqslant q_1} c([h_s,h_t],g_1,\ldots,g_{q_1},h_1,\ldots,\hat{h}_s,\ldots,\hat{h}_t,\ldots,h_{q_1})\\
c^{(4)}(g_1,\ldots,g_r,h_1,\ldots,h_s) &= \sum_{s=1}^{q_0}(-1)^s g_s c(g_1,\ldots\hat{g}_s,\ldots,g_{q_0},h_1,\ldots,h_{q_1})\\
c^{(5)}(g_1,\ldots,g_r,h_1,\ldots,h_s) &= (-1)^{q_1-1}\sum_{s=1}^{q_1} h_s c(g_1,\ldots,g_{q_0},h_1,\ldots,\hat{h}_s,\ldots,h_{q_1}),
\end{aligned}$$

Тогда, как и в работе [2] показывается, что $f(x)_M$ перестановочен с d. □

Доказательство теоремы 2. Из предыдущего утверждения следует, что для невырожденного линейного оператора $f(x)_M$ обратный оператор $\overline{x} = f(x)_M^{-1}$ также перестановочен с d: $\overline{x}d = d\overline{x}$.

Для четного элемента x из супералгебры L рассмотрим эндоморфизм $i(x)$ внутреннего умножения коцепного комплекса $C^*(L,M)$: $(i(x)c)(g_1,\ldots,g_r,h_1,\ldots,h_s) = c(x,g_1,\ldots,g_r,h_1,\ldots,h_s)$. Нетрудно проверить, что имеет место равенство: $di(x)+i(x)d = \theta(x)$ для всякого четного $x \in L_{\bar{0}}$. Тогда, домножая это равенство на элемент вид$\theta(x)^q$, с учетом его перестановочности с d, получаем, что $di_q(x) + i_q(x)d = \theta^{q+1}(x)$ для некоторого эндоморфизма $i_q(x)$ степени -1. Тогда, взяв линейную комбинацию таких соотношений, получаем, что $di_f(x) + i_f(x)d = f(\theta(x))$ для некоторого эндоморфизма $i_f(x)$ степени -1. Следовательно, $di_f(x) + i_f(x)d = f(x)_M$, откуда, пользуясь перестановочностью $\overline{x}$ с d, получаем, что $d\rho + \rho d = 1_M$, где гомоморфизм гомотопии ρ равен $\overline{x}i_f(x)$. Теорема доказана. □

Теорема 3. Если L — ограниченная супералгебра Ли и M — неприводимый не ограниченный L-модуль, то $H^*(L,M) = 0$.

Доказательство следует из того, что если L-модуль M является неограниченным, то найдется четный элемент $x \in L_{\bar{0}}$ такой, что центральный элемент $y = x^p - x^{[p]} \in U(L)$ на M действует ненулевым образом. Тогда, по лемме Шура получаем, что y_M невырожден. □

3. Абелевы расширения супералгебры Ли $\mathrm{osp}\,(1,2)$**.** Супералгебра Ли $\mathrm{osp}\,(1,2)$ определяется как подалгебра

$$\mathrm{osp}\,(1,2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ e & a & b \\ -d & c & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d,e \in K \right\}$$

супералгебры Ли $\mathrm{gl}\,(1|2)$, при этом

$$\mathrm{osp}\,(1,2)_{\bar{0}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c \in K \right\} \simeq \mathrm{sl}(2),$$

$$\mathrm{osp}\,(1,2)_{\bar 1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ e & 0 & 0 \\ -d & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; d, e \in K \right\}.$$

Базис

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &[e,h] = -2e, && [h,f] = 2f, && [e,f] = h, \\ &[h,x] = x, && [h,y] = -\,y, && [e,x] = 0, \\ &[e,y] = x, && [f,x] = y, && [f,y] = 0, \\ &[x,x] = 2e, && [x,y] = -\,h, && [y,y] = -\,2f. \end{aligned}$$

В случае поля положительной характеристики супералгебра osp $(1,2)$ является ограниченной с p-структурой, заданной равенствами $e^{[p]} = 0, h^{[p]} = h, f^{[p]} = 0$. Описание неприводимых представлений супералгебры Ли osp $(1,2)$ над полем положительной характеристики было получено в работе [4]. В частности, в ней доказано, что все простые ограниченные osp $(1,2)$-модули над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 2$ с точностью до гомоморфизма перемены четности изоморфны $M(d) = \wedge^d V_0$, $d = 0, 1, \ldots, p-2$, где V_0 — стандартный osp $(1,2)$-модуль размерности $(1,2)$. Воспользуемся следующей реализацией модуля $M(d)$, полученной в [4]: обозначим через $u_0, \ldots, u_d$ и $v_0, \ldots, v_{d+1}$ базисы соответственно в $M(d)_{\bar 0}$ и $M(d)_{\bar 1}$, тогда действие osp $(1,2)$ в $M(d)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} &e \cdot v_i = (d-i+2)v_{i-1}, && e \cdot u_i = (d-i+1)u_{i-1} \\ &f \cdot v_i = (i+1)v_{i+1}, && f \cdot u_i = (i+1)u_{i+1} \\ &h \cdot v_i = (d-2i+1)v_i, && h \cdot u_i = (d-2i)u_i \\ &x \cdot v_i = u_{i-1}, && x \cdot u_i = (d-i+1)v_i \\ &y \cdot v_i = -\,u_i, && y \cdot u_i = (i+1)v_{i+1}. \end{aligned}$$

Здесь $i = 0, \ldots, d+1$ и, если индекс выходит за допустимые границы, то соответствующий элемент равен 0.

В работе [3] мы показали, что $H^2_{\bar 0}(L, M(d)) \cong K$, в случае $d = 0, \ldots, p-3$, и $H^2_{\bar 0}(L, M(p-2)) \cong K^2$: если $\dim M(d) \leqslant 2p-3$, то в качестве базиса пространства $H^2_{\bar 0}(L, V)$ можно взять четный коцикл φ, а если $\dim M(d) = 2p-1$, то четные коциклы φ, ψ, где $\varphi(h,f) = u_0$, $\varphi(h,y) = v_0$, $\varphi(f,x) = u_0$, $\psi(h,e) = 2u_{p-2}$, $\psi(h,f) = 2u_p$, $\psi(h,x) = 2v_{p-1}$, $\psi(h,y) = 2v_p$, $\psi(e,f) = u_{p-1}$, $\psi(e,x) = v_{p-2}$, $\psi(e,y) = v_{p-1}$, $\psi(x,x) = 2u_{p-2}$, а все оставшиеся значения на базисных векторах, кроме очевидным образом связанных с указанными, считаются равными нулю.

Из результатов теоремы 3 и указанного описания двумерных когомологий вытекает следующее описание абелевых расширений супералгебры Ли osp $(1,2)$.

Теорема 4. Если $\hat L = \hat L_{\bar 0} \oplus \hat L_{\bar 1}$ — нерасщепляемое абелевое расширение супералгебры Ли osp $(1,2)$ с помощью неприводимого модуля V, то $V \cong M(d)$ или $\Pi M(d)$, $0 \leqslant d \leqslant p-2$, где Π — гомоморфизм изменения четности. С точностью до эквивалентности нерасщепляемые расширения супералгебры Ли osp $(1,2)$ с помощью неприводимого модуля $M(d)$ исчерпываются алгебрами, заданными следующими структурными соотношениями:

1) $\hat{L}_{\bar{0}} = \langle e, h, f, u_0, \ldots, u_d \rangle$, $\hat{L}_{\bar{1}} = \langle x, y, v_0, \ldots, v_{d+1} \rangle$ $(0 \leqslant d \leqslant p-3)$,

$$\begin{aligned}
[h,e] &= 2e, & [h,f] &= -2f + \alpha u_0, & [e,f] &= h,\\
[h,x] &= x, & [h,y] &= -y + \alpha v_0, & [e,x] &= 0,\\
[e,y] &= x, & [f,x] &= y + \alpha u_0, & [f,y] &= 0,\\
[x,x] &= 2e, & [x,y] &= -h, & [y,y] &= -2f,\\
[e,v_i] &= (d-i+2)v_{i-1}, & [e,u_i] &= (d-i+1)u_{i-1} & [f,v_i] &= (i+1)v_{i+1},\\
[f,u_i] &= (i+1)u_{i+1} & [h,v_i] &= (d-2i+1)v_i, & [h,u_i] &= (d-2i)u_i\\
[x,v_i] &= u_{i-1}, & [x,u_i] &= (d-i+1)v_i & [y,v_i] &= -u_i,\\
[y,u_i] &= (i+1)v_{i+1},
\end{aligned}$$

$i = 0, \ldots, d+1$, произведения других пар базисных векторов, кроме очевидным образом связанных с указанными, считаются равными нулю.

2) $\hat{L}_{\bar{0}} = \langle e, h, f, u_0, \ldots, u_{p-2} \rangle$, $\hat{L}_{\bar{1}} = \langle x, y, v_0, \ldots, v_{p-1} \rangle$,

$$\begin{aligned}
[h,e] &= 2e + 2\gamma u_{p-2}, & [h,f] &= -2f + \beta u_0 + 2\gamma u_p, & [e,f] &= h + \gamma u_{p-1},\\
[h,x] &= x + 2\gamma v_{p-1}, & [h,y] &= -y + \beta v_0 + 2\gamma v_p, & [e,x] &= \gamma v_{p-2},\\
[e,y] &= x + \gamma v_{p-1}, & [f,x] &= y + \beta u_0, & [f,y] &= 0,\\
[x,x] &= 2e + 2\gamma u_{p-2}, & [x,y] &= -h, & [y,y] &= -2f,\\
[e,v_i] &= (d-i+2)v_{i-1}, & [e,u_i] &= (d-i+1)u_{i-1} & [f,v_i] &= (i+1)v_{i+1},\\
[f,u_i] &= (i+1)u_{i+1} & [h,v_i] &= (d-2i+1)v_i, & [h,u_i] &= (d-2i)u_i\\
[x,v_i] &= u_{i-1}, & [x,u_i] &= (d-i+1)v_i & [y,v_i] &= -u_i,\\
[y,u_i] &= (i+1)v_{i+1},
\end{aligned}$$

$i = 0, \ldots, p-1$, произведения других пар базисных векторов равны нулю.

Расширения, соответствующие различным значениям d, α, β, γ неэквивалентны.

Список литературы

1. *Фукс Д. Б.* Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. – М. 1984.

2. *Джумадильдаев А. С.* О когомологиях модулярных алгебр Ли // Мат. сборник. 1982. Т. 119. С. 132–149.

3. *Тен О. К., Хачак А. Ш.* Когомологии суперагебры Ли osp $(1,2)$ над полем положительной характеристики // Труды ФОРА. 2012. № 17. С. 65–67.

4. *Тен О. К., Устименко С. В.* Неприводимые представления суперагебры Ли osp $(1,2)$ над полем положительной характеритики // Дифф. и интегр. уравнения, анализ и алгебра. Сб. научн. трудов. КалмГУ. Элиста, 1996. С. 28–31.

O.K. Ten

Abelian extensions of the Lie superalgebra osp $(1,2)$ **over fields of positive characteristic**

Lie superalgebra osp $(1,2)$ abelian extensions with irreducible modules over characteristic $p > 2$ fields obtained.

