О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ МАТРИЧНОГО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА

Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический университет, г. Майкоп

В статье изучаются свойства собственных значений мультипликативного интеграла от матричной функции второго порядка. Установлена связь между собственными значениями подынтегральной матричной функции и мультипликативным интегралом. В случае матричных функций второго порядка установлено, каким образом меняются коэффициенты характеристического уравнения подынтегральной матричной функции при калибровочном преобразовании.

Рассмотрим мультипликативный интеграл

$$Y(t)=\overset{\frown}{\int} E+A(t)dt\,, \tag{1}$$

где $A(t)$ – непрерывная матричная функция n -го порядка, $n\in N$.

Первообразная $Y(t)$ интеграла (1) удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$Y' = AY\,. \tag{2}$$

Согласно [1] первообразную $Y(t)$ можно представить в виде экспоненты от матричной функции $\Omega(t)$ следующим образом: $Y(t)=\exp(\Omega(t))$, где

$$\Omega(t)=\int_{t_0}^{t} A(t)dt+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[A(\tau),\int_{t_0}^{\tau} A(s)ds\right]+\frac{1}{12}\int_{t_0}^{t}\left[\left[A(\tau),\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right],\int_{t_0}^{\tau} A(s)ds\right]d\tau+\ldots \tag{3}$$

Известно, что для линейной однородной системы дифференциальных уравнений справедлива формула Лиувилля

$$\det Y(t)=\exp\left(\int spA(t)dt\right). \tag{4}$$

Выразим SpY через $Sp\Omega$ и $\det\Omega$. Тогда коэффициенты характеристического уравнения для матрицы Y в случае $n=2$ будут выражены через коэффициенты характеристического уравнения матрицы Ω и A.

Теорема 1. *Пусть* $n=2$. *Тогда*

$$SpY=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}^{\left[\frac{n}{2}\right]} S_{ij}(sp\Omega)^i(\det\Omega)^j\,, \tag{5}$$

где $\left[\frac{n}{2}\right]$ *– целая часть числа, а числа* S_{ij} *вычисляются из соотношения*

$$sp\Omega^m = sp\Omega(sp\Omega)^{m-1}-\det\Omega(sp\Omega)^{m-2}\,, m\in N \tag{6}$$

Доказательство.

Так как $Y(t)=\exp(\Omega(t))$, то

$$SpY=2+Sp\Omega+\frac{Sp\Omega^2}{2}+\cdots\frac{Sp\Omega^n}{n!}+\cdots \tag{7}$$

Из характеристического уравнения для матрицы Ω имеет следующую цепочку равенств:

$$sp\Omega = sp\Omega,$$
$$sp\Omega^2 = (sp\Omega)^2 - 2\det\Omega,$$
$$sp\Omega^3 = (sp\Omega)^3 - 3\det\Omega(sp\Omega),$$
$$sp\Omega^4 = (sp\Omega)^4 - 4\det\Omega(sp\Omega)^2 + 2(\det\Omega)^2,$$
$$sp\Omega^5 = (sp\Omega)^5 - 5\det\Omega(sp\Omega)^3 + 5(\det\Omega)^2 sp\Omega,$$
$$sp\Omega^6 = (sp\Omega)^6 - 5\det\Omega(sp\Omega)^4 + 9(\det\Omega)^2(sp\Omega)^2 - 2(\det\Omega)^3, \ldots$$

В общем случае данная цепочка формул задается соотношениями (6).

Отметим, что для коэффициентов цепочки формул существует следующая треугольная таблица:

Таблица 1

	1	$sp\Omega$	$(sp\Omega)^2$	$(sp\Omega)^3$	$(sp\Omega)^4$	$(sp\Omega)^5$	$(sp\Omega)^6$
1	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3!}$	$\frac{1}{4!}$	$\frac{1}{5!}$	$\frac{1}{6!}$
$\det\Omega$	$\frac{-2}{2!}$	$\frac{-3}{3!}$	$\frac{-4}{4!}$	$\frac{-5}{5!}$	$\frac{-6}{6!}$	$\frac{-7}{7!}$	…
$(\det\Omega)^2$	$\frac{2}{4!}$	$\frac{5}{5!}$	$\frac{9}{6!}$	$\frac{14}{7!}$	$\frac{20}{8!}$	…	…
$(\det\Omega)^3$	$\frac{-2}{6!}$	$\frac{-7}{7!}$	$\frac{-16}{8!}$	$\frac{-30}{9!}$	…	…	…
$(\det\Omega)^4$	$\frac{2}{8!}$	$\frac{9}{9!}$	$\frac{25}{10!}$	…	…	…	…
$(\det\Omega)^5$	$\frac{-2}{10!}$	$\frac{-11}{11!}$	…	…	…	…	…
$(\det\Omega)^6$	$\frac{2}{11!}$	…	…	…	…	…	…

Обозначим числа таблицы через S_{ij}. Тогда, подставив значения $sp\Omega^m$ в равенство (7), получим равенство (5). Теорема 1 доказана.

Отметим, что для числителей чисел $chisS_{ij}$ наблюдается рекуррентность, что позволяет заполнить таблицу 1, а именно, $|chisS_{ij}| + |chisS_{i+1,j-1}| = |chisS_{i+1,j}|$, где $chis$ – означает числитель.

Суммирование в равенстве (5) происходит по ходу «шахматного коня», начиная с числа, соответствующего множителю $(sp\Omega)^m$ вдоль побочной диагонали таблицы 1. Например, слагаемые $(sp\Omega)^5, \det\Omega(sp\Omega)^3, (\det\Omega)^2 sp\Omega$, соответствующие разложению $sp\Omega^5$ расположены по ходу «шахматного коня».

Теорема 2. *Пусть* λ_k, $k=1,2$ *– различные собственные значения матриц* $A(t)$, Λ_k, $k=1,2$ *– собственные значения матриц* $Y(t)$. *Тогда*

$$\Lambda_k = \exp\left(\int \lambda_k(t)dt\right). \tag{8}$$

Доказательство. Из равенства (3) имеем

$$sp\Omega(t) = sp\int A(t)dt, \tag{9}$$

откуда следует, что

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = \exp\int \lambda_1 dt + \exp\int \lambda_2 dt \,. \qquad (10)$$

Из формулы (4) следует, что

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = \exp\int \lambda_1 dt \exp\int \lambda_2 dt \,. \qquad (11)$$

Тогда из равенств (10) и (11) следует равенство (8). Теорема 2 доказана.

Интересно доказать аналог теоремы 2 для систем линейных уравнений произвольного порядка.

Следствие 1. Поиск решения уравнения $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ в виде $x = C_1 \exp\left(\int \lambda_1(t)dt\right) + C_2 \exp\left(\int \lambda_2(t)dt\right)$ приводит к известным соотношениям

$$p(t) = \frac{\lambda_2' - \lambda_1'}{\lambda_2 - \lambda_1} - (\lambda_2 + \lambda_1)\,,\ q(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2' - \lambda_2\lambda_1'}{\lambda_2 - \lambda_1} + \lambda_2\lambda_1 \,.$$

Пример 1. Пусть $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\lambda_{1,2} = \pm i$. Следовательно, $\Lambda_{1,2} = e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$. Значит, $\Lambda_1 + \Lambda_2 = \cos t + i\sin t + \cos t - i \sin t = 2\cos t$. $\Lambda_1\Lambda_2 = \exp(it)\exp(-it) = 1$.

В самом деле, имеем $Y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$, откуда следует, что $spY = 2\cos t$, $\det Y = 1$.

Пример 2. Пусть $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Следовательно, $\Lambda_{1,2} = e^{\pm t} = cht \pm isht$. Значит, $\Lambda_1 + \Lambda_2 = cht + isht + cht - isht = 2cht$. $\Lambda_1\Lambda_2 = \exp(t)\exp(-t) = 1$.

В самом деле, имеем $Y(t) = \begin{pmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{pmatrix}$, откуда следует, что $spY = 2cht$, $\det Y = 1$.

Рассмотрим свойства калибровочного преобразования, связанные с коэффициентами характеристического уравнения матричной функции второго порядка.

Теорема 3. *Пусть матричная функция второго порядка* $A(t)$ *подвергнута калибровочному преобразованию*

$$\tilde{A} = CAC^{-1} + C'C^{-1}, \qquad (4)$$

где C *– некоторая неособая матричная функция второго порядка. Тогда справедливы равенства:*

$$sp\tilde{A} = spA + \frac{(\det C)'}{\det C}\,, \qquad (5)$$

$$\det\tilde{A} = \det A + spA\frac{(\det C)'}{\det C} + \frac{\det C'}{\det C} - sp(AC^{-1}C')\,. \qquad (6)$$

Доказательство. Из равенства (4) имеем

$$sp\tilde{A} = spA + sp(C'C^{-1})\,.$$

Так как $sp\left(\begin{pmatrix} c_{11x} & c_{12x} \\ c_{21x} & c_{22x} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det C}\begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{11} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\det C}(c_{11x}c_{22} - c_{12x}c_{21} - c_{12}c_{21x} + c_{11}c_{22x}) =$ $= \frac{1}{\det C}(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})_x = \frac{1}{\det C}(\det C)_x$, то равенство (5) доказано.

Для доказательства равенства (6) воспользуемся равенством, справедливым для двух матриц A и B второго порядка:

$$\det(A+B)=\det A+\det B+spAspB-spAB.$$

Имеем $\det\tilde{A}=\det(A+C^{-1}C')=\det A+\det(C^{-1}C')+spAsp(C^{-1}C')-sp(AC^{-1}C')=$

$=\det A+\dfrac{\det C'}{\det C}+spA\dfrac{(\det C)'}{\det C}-sp(AC^{-1}C')$, то есть равенство (6) доказано.

Из теоремы 3 можно найти условия на калибровочные преобразования, при выполнении которых сохраняются коэффициенты характеристического уравнения для подынтегральной матричной функции A.

Следствие 1. Пусть выполнены условия

$$\frac{(\det C)'}{\det C}=0, \tag{7}$$

$$spA\frac{(\det C)'}{\det C}+\frac{\det C'}{\det C}-sp(AC^{-1}C')=0. \tag{8}$$

Тогда $sp\tilde{A}=spA$, $\det\tilde{A}=\det A$.

Определим явный вид калибровочной матрицы C, для которой выполняются условия (7) и (8). Из равенства (7) следует что $\det C=c$, где c – постоянная.

Распишем поэлементно условие (8). Учитывая равенство (7), из равенства (8) получаем

$$\frac{\det C'}{\det C}-spAC^{-1}C'=0.$$

Обозначим $C=(c_{ij}),\ A=(a_{ij})$. Тогда

$$\frac{c_{11x}c_{22x}-c_{12x}c_{22x}}{c}+sp\left(\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{c}\cdot\begin{pmatrix}c_{22} & -c_{12}\\ -c_{21} & c_{11}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_{11x} & c_{12x}\\ c_{21x} & c_{22}x\end{pmatrix}\right)=0,$$

или

$$\frac{c_{11x}c_{22x}-c_{12x}c_{22x}}{c}+\frac{1}{c}(a_{11}(c_{11x}c_{22}-c_{12}c_{21x})+a_{12}(c_{11}c_{21x}-c_{11x}c_{21})+,$$
$$+a_{21}(c_{12x}c_{22}-c_{12}c_{22x})+a_{22}(c_{11}c_{22x}-c_{12x}c_{21}))=0,$$

откуда следует, что

$$c_{11x}c_{22x}-c_{12x}c_{22x}+(a_{11}(c_{11x}c_{22}-c_{12}c_{21x})+a_{12}(c_{11}c_{21x}-c_{11x}c_{21})+$$
$$+a_{21}(c_{12x}c_{22}-c_{12}c_{22x})+a_{22}(c_{11}c_{22x}-c_{12x}c_{21}))=0. \tag{9}$$

Преобразуем равенство (9) относительно c_{11} и c_{11x}. Тогда равенство (9) перепишется в виде:

$$c_{11x}\cdot(c_{22x}+a_{11}c_{22}-a_{12}c_{21})+c_{11}\cdot(a_{12}c_{21x}+a_{22}c_{22x})-a_{11}c_{12}c_{21x}+$$
$$+a_{21}(c_{22}c_{12x}-c_{12}c_{21x})-a_{22}c_{21}c_{12x}=0. \tag{10}$$

Поскольку при $c_{22}\neq 0$ имеем $c_{11}=\dfrac{c+c_{12}c_{21}}{c_{22}}$ и $c_{11x}=\dfrac{(c_{12}c_{21})_x}{c_{22}}-\dfrac{c_{21x}(c+c_{12}c_{21})}{c_{22}^2}$, то равенство (10) относительно $\tilde{n}_{12},c_{12x}$ примет вид:

$$\left(\frac{c_{21}}{c_{22}}\left(c_{22x}+a_{11}c_{22}-a_{12}c_{21}\right)+a_{21}c_{22}-a_{22}c_{21}\right)\cdot c_{12x}+$$
$$+\left(\frac{c_{21x}}{c_{22}}\left(c_{22x}+a_{11}c_{22}-a_{12}c_{21}\right)+a_{11}c_{21x}-a_{21}c_{21x}\right)\cdot c_{12}+$$
$$+c\cdot\left(c_{22x}+a_{11}c_{22}-a_{12}c_{21}\right)=0. \tag{11}$$

Равенство (11) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной $\tilde{n}_{12}$. Поэтому калибровочная матрица $C=(c_{ij})$ вычисляется в явном виде.

Следствие 2. Найти калибровочные преобразования, при выполнении которых подынтегральная матричная функция $A(t)$ приводится к жордановой нормальной форме:

$$1).\ A(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix};\ 2).\ A(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix};\ 3).\ A(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}.$$

1). Имеем $\begin{pmatrix}c_{11x} & c_{12x}\\ c_{21x} & c_{22x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ или

$$c_{11x}=\lambda_1 c_{11}-a_{11}c_{11}-a_{21}c_{12}, \tag{12}$$

$$c_{12x}=\lambda_1 c_{12}-a_{12}c_{11}-a_{22}c_{12}, \tag{13}$$

$$c_{21x}=\lambda_2 c_{21}-a_{11}c_{21}-a_{21}c_{22}, \tag{14}$$

$$c_{22x}=\lambda_2 c_{22}-a_{12}c_{21}-a_{22}c_{22}. \tag{15}$$

Выразим c_{12} из уравнения (12) и подставим в уравнение (13). Тогда получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $\tilde{n}_{11}$:

$$\tilde{n}_{11xx}+\left(a_{21}\left(\frac{1}{a_{21}}\right)_x-2\lambda_1+a_{11}+a_{22})\right)\cdot c_{11x}+\left(-a_{21}\left(\frac{1}{a_{21}}\right)_x(\lambda_1-a_{11})-(\lambda_1-a_{11})_x+\right.$$

$$\left.+\lambda_1^2-(a_{11}+a_{22})\lambda_1+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)\cdot c_{11}=0. \tag{16}$$

Выразим c_{21} из уравнения (15) и подставим в уравнение (14). Тогда получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $\tilde{n}_{22}$:

$$\tilde{n}_{22xx}+\left(a_{12}\left(\frac{1}{a_{12}}\right)_x-2\lambda_2+a_{11}+a_{22})\right)\cdot c_{22x}+\left(-a_{12}\left(\frac{1}{a_{12}}\right)_x(\lambda_2-a_{11})-(\lambda_2-a_{11})_x+\right.$$

$$\left.+\lambda_2^2-(a_{11}+a_{22})\lambda_2+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)\cdot c_{22}=0. \tag{17}$$

Если удается разрешить уравнения (16) и (17) относительно неизвестных функций c_{11} и $\tilde{n}_{22}$, то калибровочное преобразование будет представлено в явном виде.

2). Имеем $\begin{pmatrix}c_{11x} & c_{12x}\\ c_{21x} & c_{22x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ или

$$c_{11x}=\lambda_1 c_{11}+c_{21}-a_{11}c_{11}-a_{21}c_{12}, \tag{18}$$

$$c_{12x}=\lambda_1 c_{12}+c_{22}-a_{12}c_{11}-a_{22}c_{12}, \tag{19}$$

$$c_{21x}=\lambda_1 c_{21}-a_{11}c_{21}-a_{21}c_{22}, \tag{20}$$

$$c_{22x}=\lambda_1 c_{22}-a_{12}c_{21}-a_{22}c_{22}. \tag{21}$$

Система уравнений (18), (19), (20), (21) исследуется аналогично системе уравнений (12), (13), (14), (15). Случай 3) следует из случая 1).

Сформулируем задачу о понижении порядка линейного дифференциального уравнения. С помощью линейных замен и соответствующих матричных преобразований найдем условия для решения поставленной задачи в случае, когда порядок уравнения не превышает трех.

1). Рассмотрим уравнение

$$x''+a(t)x'+b(t)x=0.$$

Сделаем замену $u=ax'+bx$. Тогда

$$u' = \frac{a' - a^2 + b}{a} u + \left(-\frac{(a' - a^2 + b)b}{a} + b' - ab \right) x .$$

Полагая

$$-\frac{(a' - a^2 + b)b}{a} + b' - ab = 0 , \qquad (22)$$

получаем уравнение первого порядка

$$u' = \left(\frac{a'}{a} - a + \frac{1}{c_1 - t} \right) u = 0 ,$$

где c_1 – постоянная.

В матричной форме замена функций принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ b' - ab & a' - a^2 + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} . \qquad (23)$$

Из условия (22) следует, что определитель матрицы перехода равен нулю.
2). Рассмотрим уравнение

$$x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 . \qquad (24)$$

А). Сделаем замену $u = bx' + cx$. Тогда $u' = bx'' + (b' + c)x' + c'x$,
$u'' = (2b' + c - ab) + (b'' + 2c' - b^2)x' + (c'' - bc)x$.

В матричной форме замена функций принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b & 0 \\ c' & b' + c & b \\ c'' - dc & b'' + 2c' - b^2 & 2b' + c - ab \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix} . \qquad (25)$$

Исключая x' и x'' из (25), получаем уравнение

$$u'' - \frac{2b' + c - ab}{b} u' + \left(-\frac{b'' + 2c'' - b}{b} + \frac{(2b' + c - ab)(b' + c)}{b^2} \right) u = -\frac{\det A}{b^2} x ,$$

где A – матрица из равенства (25). Полагая $\det A = 0$, получаем уравнение второго порядка.
Б). Сделаем замену $v = ax'' + bx' + cx$. Тогда из уравнения (24) имеем
$v' = (a' + b - a^2)x'' + (b' + c - ab)x' + (c' - ac)x$.

В матричной форме замена функций принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b & a \\ c' - ac & b' + c - ab & a' + b - a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix} . \qquad (26)$$

Исключая x'', получаем уравнение

$$v' = \left(-a + \frac{a' + b}{a} \right) v - \frac{M_{x'} x'}{a} - \frac{M_x x}{a} ,$$

где $M_{x'} = \begin{vmatrix} c & a \\ c' - ac & a' + b - a^2 \end{vmatrix}$ и $M_x = \begin{vmatrix} b & a \\ b' + c - ab & a' + b - a^2 \end{vmatrix}$ – соответствующие переменным x' и x миноры матрицы из равенства (26). Полагая $M_{x'} = 0$ и $M_x = 0$, получаем уравнение первого порядка.

Представляет интерес решить сформулированную задачу для линейного дифференциального уравнения произвольного порядка.

Литература

1. *Magnus W.* On the exponential solution of differential equations for a linear operator. //Comm. on pure and appl. Math., 1954, v. 7, p. 649–673.

ABOUT THE PROPERTY VALUES OF THE MATRIX MULTIPLICATIVE INTEGRAL

L.Zh. Palandzhyants

We study the properties of the eigenvalues multiplicative integral of the second order matrix functions. It was found the relation between the eigenvalues of the matrix of the integrand functions and multiplicative integral. In the case of second-order matrix functions found how changing the coefficients of the characteristic equation of the integrand matrix function under a gauge transformation.

