О БИФУРКАЦИОННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

В.Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль

Доказано, что бифуркационные множества в пространстве всех полиномиальных векторных полей на плоскости, соответствующие «простейшим» негрубым траекториям, являются аналитическими подмногообразиями коразмерности один.

1. Введение. Понятие грубого векторного поля – векторного поля, не меняющего топологическую структуру фазового портрета при малых возмущениях поля – было введено А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным [1]. Они дали необходимые и достаточные условия грубости в пространстве C^r-векторных полей с C^r-нормой ($r \geq 1$) на двумерном диске и двумерной сфере. А.А. Андроновым и Е.А. Леонтович [2, 3] описаны простейшие негрубые векторные поля на плоскости – векторные поля первой степени негрубости и их бифуркации – перестройки фазовых портретов при возмущениях векторных полей. Описание множества Σ_0^r грубых C^r-векторных полей на любых замкнутых ориентируемых поверхностях и доказательство его плотности в пространстве X^r всех C^r-векторных полей получены М.М. Пейксото [4]. Векторные поля первой степени негрубости на ориентируемых поверхностях изучены С.Х. Арансоном [5]. Более широкое множество Σ_1^r негрубых векторных полей на поверхностях – квазиобщих рассматривалось Дж. Сотомайором [6]. Он доказал, что Σ_1^r является погруженным C^{r-1}-подмногообразием коразмерности один в X^r ($r \geq 4$) и всюду плотно в $\mathrm{X}^r \setminus \Sigma_0^r$.

Естественно рассматривать грубость относительно некоторых специальных классов векторных полей. Грубость и бифуркационные многообразия в пространстве векторных полей на плоскости, задаваемых дифференциальными уравнениями второго порядка, изучались автором [7, 8]. Описание множества полиномиальных векторных полей степени $\leq n$ на плоскости, грубых относительно пространства всех таких векторных полей давняя и, насколько автору известно, до сих пор нерешенная проблема. Еще меньше известно о структуре множества негрубых полиномиальных векторных полей. Тем не менее, некоторые результаты работы [6] о существовании бифуркационных многообразий можно перенести и на пространство полиномиальных векторных полей. Мы сделаем это в настоящей работе.

На плоскости рассмотрим полиномиальное векторное поле степени $\leq n$: $X = P\partial/\partial x + Q\partial/\partial y$, где

$$P(x,y) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_{k,m-k}x^k y^{m-k},\ Q(x,y) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_{k,m-k}x^k y^{m-k}.$$

Векторное поле X естественно отождествляется с арифметическим вектором $(a_{0,0}, b_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, ..., b_{n,0}, ..., b_{0,n})$ из $\mathbf{R}^{(n+1)(n+2)}$, а множество P_n всех полиномиальных векторных полей степени $\leq n$, с пространством $\mathbf{R}^{(n+1)(n+2)}$ с евклидовой нормой.

2. Бифуркационное многообразие седловой связки. Пусть векторное поле $X \in \mathrm{P}_n$ имеет грубые седла z_k^0, $k \in \{\alpha, \omega\}$, возможно совпадающие, и траекторию L, α-предельную к z_α^0 и ω-предельную к z_ω^0 – седловую связку. В случае $z_\alpha^0 = z_\omega^0$ потребуем, чтобы седловая величина $\sigma = \operatorname{div} X(z_\alpha^0) \neq 0$.

Так как компоненты X являются аналитическими функциями от (x, y, X), то, используя теорему о неявной функции, получаем, что существуют окрестность B_0 поля X в P_n, окрестность V_0 дуги $\overline{L} = L \cup \{z_1^0, z_2^0\}$, в которой любое векторное поле $Y \in B_0$ имеет грубые седла

$z_k(Y)=(x_k(Y),\,y_k(Y))$, $k\in\{\alpha,\omega\}$, и не имеет других особых точек, при этом $z_k(\cdot)$ – аналитическая функция, $z_k(X)=z_k^0$, $z_\alpha(Y)=z_\omega(Y)$, если $z_\alpha^0=z_\omega^0$.

Теорема 1. *Существуют окрестность* $B\subset B_0$ *поля* X *в* P_n, *окрестность* $V\subset V_0$ *дуги* $\overline{L}$ *и аналитическая функция* $f:B\to\mathbf{R}$ *такие, что для любого* $Y\in B$

1) $z_k(Y)\in V$, $k\in\{\alpha,\omega\}$;

2) $df_Y\neq 0$;

3) $f(Y)=0$ *тогда и только тогда, когда существует траектория поля* Y, *лежащая в* V, α*-предельная к* $z_\alpha(Y)$ *и* ω*-предельная к* $z_\omega(Y)$;

4) если $z_\alpha^0\neq z_\omega^0$, *то* Y *не имеет в* V *замкнутых траекторий;*

5) если $z_\alpha^0=z_\omega^0$, *то* Y *имеет в* V *замкнутую траекторию только при* $\sigma f(Y)<0$, *она единственная, грубая, устойчивая (неустойчивая) если* $\sigma<0$ $(\sigma>0)$;

6) при $f(Y)\neq 0$ *поле* Y *грубое в* V, *а при* $f(Y)=0$ *имеет в* V *первую степень негрубости.*

Таким образом, бифуркационное множество векторных полей $Y|_V$ *при* $Y\in B$ *совпадает с* $f^{-1}(0)$ *и является аналитическим подмногообразием* P_n *коразмерности один.*

Доказательство. Мы можем выбрать на плоскости аффинные координаты ξ,η, связанные с координатами x,y равенствами

$$x=\widehat{x_k}(\xi,\eta,Y)=x_k(Y)+c_{11}^k(Y)\xi+c_{12}^k(Y)\eta\;,\; y=\widehat{y_k}(\xi,\eta,Y)=y_k(Y)+c_{21}^k(Y)\xi+c_{22}^k(Y)\eta,\quad k\in\{\alpha,\omega\},$$

где $c_{ij}^k(Y)$ – аналитические функции, $\det(c_{ij}^k(Y))>0$, так, чтобы неустойчивая (устойчивая) инвариантная прямая линейной части поля Y в точке $z_k(Y)$ задавалась уравнением $\eta=0$ ($\xi=0$).

Лемма. *Число* $\delta>0$ *и окрестность* $B_1\subset B_0$ *поля* X *в* P_n *можно выбрать так, что седло* $z_k(Y)$, $k\in\{\alpha,\omega\}$, *векторного поля* $Y\in B_1$ *имеет неустойчивое (устойчивое) локальное инвариантное многообразие, задаваемое уравнением* $\eta=\hat\eta(\xi,Y)$, $|\xi|<\delta$ ($\xi=\hat\xi(\eta,Y)$, $|\eta|<\delta$), *где* $\hat\eta$ ($\hat\xi$) *– аналитическая функция,* $\hat\eta(0,Y)=\widehat{\eta'_\xi}(0,Y)=0$, $|\hat\eta(\xi,Y)|<\delta$ ($\hat\xi(0,Y)=\widehat{\xi'_\eta}(0,Y)=0$, $|\hat\xi(\eta,Y)|<\delta$).

Доказательство леммы. Согласно [9, с. 238–239] или [10, с. 216-217] мы можем выбрать δ и B_1 так, что векторное поле $Y\in B_1$ имеет неустойчивое локальное инвариантное многообразие, задаваемое уравнением $\eta=\hat\eta(\xi,Y)$, $|\xi|<\delta$, где $\hat\eta(\xi,Y)$ является суммой ряда по степеням ξ с коэффициентами, аналитически зависящими от $Y\in B_1$, мажорируемым сходящимся числовым рядом, причем $\hat\eta(0,Y)=\widehat{\eta'}_\xi(0,Y)=0$. Так как параметр Y принадлежит конечномерному пространству, то по теореме Вейерштрасса [11, с. 288] $\hat\eta(\xi,Y)$ – аналитическая функция. Аналогично получаем утверждение леммы об устойчивом локальном инвариантном многообразии.

Замечание 1. В работе А. М. Ляпунова [12, с. 127] (см. также [10, с. 216-217]) доказано существование аналитических устойчивого и неустойчивого локальных инвариантных многообразий седла аналитического векторного поля в $\mathbf{R}^n$ при любом $n\geq 2$. Однако, приведенные там конструкции из-за резонансов при $n>2$ не дают даже непрерывной зависимости от параметров. По-видимому, доказательство аналитической зависимости локальных инвариантных многообразий многомерного седла от параметра вообще отсутствует. Доказательство гладкости локальных инвариантных многообразий седла и их гладкой зависимости от параметра для гладкого векторного поля, гладко зависящего от параметра, имеется в разных работах, например в книге [13].

Вернемся к доказательству теоремы. Ограничимся случаем $z_\alpha^0\neq z_\omega^0$. Случай $z_\alpha^0=z_\omega^0$ рассматривается аналогично. Выберем окрестность $V\subset V_0$ дуги $\overline{L}$, ограниченную кусочно-гладкой замкнутой кривой $\partial V=\overset{\frown}{a_1a_2...a_{13}}$, состоящей из гладких дуг $\overset{\frown}{a_ka_{k+1}}$, расположенных так, как указано на рис.1, в точках которых векторное поле X им трансверсально, причем в точках дуг $\overset{\frown}{a_4a_5}$, $\overset{\frown}{a_8a_9}$ и $\overset{\frown}{a_{12}a_{13}}$ поле направлено из V, а в остальных точках ∂V направлено внутрь V.

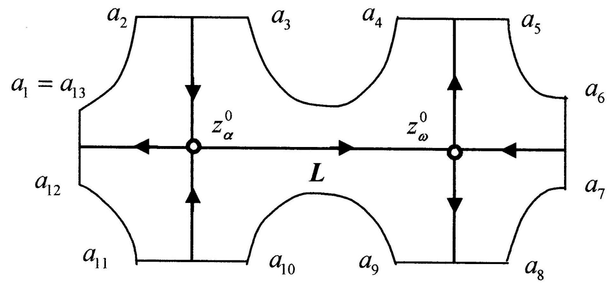

Рис. 1. Окрестность V .

Мы можем считать, что число δ и окрестность B_1, фигурирующие в утверждении леммы, выбраны столь малыми, что 1) любое векторное поле $Y \in B_1$ в точках ∂V направлено так, как описано выше для поля X ; 2) окрестности седел z_k^0, $k \in \{\alpha, \omega\}$, задаваемые в координатах (ξ, η) неравенствами $|\xi| < \delta, |\eta| < \delta$ принадлежат V и не пересекаются между собой; 3) точки на неустойчивом (устойчивом) инвариантном многообразии седла z_α^0 (z_ω^0), соответствующими значениям параметра $\xi \in (0, \delta)$ ($\eta \in (0, \delta)$), принадлежат сепаратрисе L .

Определим отображения $\varphi_k : (-\delta, \delta) \to \mathbf{R}^2$, $k \in \{\alpha, \omega\}$, положив

$$\varphi_\alpha(s) = (\hat{x}_\alpha(\delta/2, s, X), \hat{y}_\alpha(\delta/2, s, X)), \quad \varphi_\omega(s) = (s, \hat{x}_\omega(\delta/2, X), \hat{y}_\omega(s, \delta/2, X)).$$

Обозначим $I_k = \varphi_k(-\delta, \delta)$, $k \in \{\alpha, \omega\}$.

Мы можем выбрать окрестность $B_2 \subset B_1$ поля X так, чтобы неустойчивое (устойчивое) инвариантное многообразие седла $z_\alpha(Y)$ ($z_\omega(Y)$) $Y \in B_2$, трансверсально пересекало дугу I_α (I_ω) в точке $\varphi_\alpha(\mathrm{H}(Y))$ ($\varphi_\omega(\mathrm{K}(Y))$), где $\mathrm{H}(Y)$ ($\mathrm{K}(Y)$) – аналитическая функция. Если окрестность B_2 достаточно мала, то существует такое число $\rho > 0$, что определено отображение $\varphi_\alpha(s) \mapsto \varphi_\omega(\chi(s, Y))$, $s \in (\mathrm{H}(X) - \rho, \mathrm{H}(X) + \rho)$, по траекториям векторного поля $Y \in B_2$. Поскольку траектория аналитического векторного поля, аналитически зависящего от параметров, аналитически зависит от начальной точки, параметров и времени [10] , то из [14, с. 81–84] следует, что $\chi(s, Y)$ – аналитическая функция. Выберем окрестность $B \subset B_2$ поля X так, чтобы при $Y \in B$ $\mathrm{H}(Y) \in (\mathrm{H}(X) - \rho, \mathrm{H}(X) + \rho)$. Тогда определена аналитическая функция $f : B \to \mathbf{R}$, $f(Y) = \chi(\mathrm{H}(Y), Y) - \mathrm{K}(Y)$. Ясно, что $f(Y) = 0$ тогда и только тогда, когда существует траектория поля Y , лежащая в V , α -предельная к $z_\alpha(Y)$ и ω -предельная к $z_\omega(Y)$.

Докажем, что $df_X \neq 0$. Векторное поле $X^\perp = -Q\partial/\partial x + P\partial/\partial y \in \mathrm{P}_n$. Находим

$$df_X(X^\perp) = \left.\frac{d}{d\mu}\right|_{\mu=0} f(X + \mu X^\perp) =$$

$$= \frac{\partial \chi}{\partial s}(\mathrm{H}(X), X) \left.\frac{d}{d\mu}\right|_{\mu=0} \mathrm{H}(X + \mu X^\perp) + \left.\frac{d}{d\mu}\right|_{\mu=0} \chi(\mathrm{H}(X), X + \mu X^\perp) - \left.\frac{d}{d\mu}\right|_{\mu=0} \mathrm{K}(X + \mu X^\perp).$$

Так как реперы $(X(\varphi_\alpha(s)), \varphi_\alpha'(s))$ и $(X(\varphi_\omega(s)), \varphi_\omega'(s))$ имеют положительную ориентацию, то из [4, лемма 11.1] следует, что функция $\mu \mapsto \mathrm{H}(X + \mu X^\perp)$ возрастает, функция $\mu \mapsto \mathrm{K}(X + \mu X^\perp)$ убывает в некоторой окрестности нуля. Поэтому $\left.\frac{d}{d\mu}\right|_{\mu=0} \mathrm{H}(X + \mu X^\perp) \geq 0$ и $-\left.\frac{d}{d\mu}\right|_{\mu=0} \mathrm{K}(X + \mu X^\perp) \geq 0$.

Из [14, с. 81–84] также следует, что $\frac{\partial \chi}{\partial s}(\mathrm{H}(X), X) > 0$. Согласно [4, с. 385-391 , с. 406-407]

$$\left.\frac{d}{d\mu}\right|_{\mu=0} \chi(\mathrm{H}(X), X + \mu X^\perp) = M \int_0^\tau e^{\int_s^\tau \operatorname{div} X(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))dt} ((\tilde{x}'(s))^2 + (\tilde{y}'(s))^2) ds > 0,$$

где число $M>0$, а $x=\tilde{x}(t),\ y=\tilde{y}(t),\ t\in[0,\tau]$ – уравнение дуги траектории L между точками $\varphi_\alpha(\mathrm{H}(X))$ и $\varphi_\omega(\mathrm{K}(X))$. Таким образом, $df_X(X^\perp)>0$ и $df_X\neq 0$. Взяв окрестность B достаточно малой будем иметь $df_Y\neq 0$ при любом $Y\in B$.

Остальные утверждения теоремы при $z_\alpha^0\neq z_\omega^0$ очевидны, а при $z_\alpha^0=z_\omega^0$ следуют из описания бифуркаций петли сепаратрисы седла [3, с. 294].

Замечание 2. Для пространства X^r C^r-гладких ($r\geq 2$) векторных полей на двумерном ориентируемом многообразии аналогичное теореме 1 утверждение (с $f\in C^{r-1}$) имеется в [6, с. 28]. В доказательстве того, что $df_X\neq 0$ там сделана ошибка. Производная $\left.\dfrac{d}{d\mu}\right|_{t=0} f(X+\mu V)$ считается для векторного поля V, которое задается в координатах в локальной карте класса C^r, и потому V поле класса C^{r-1}, то есть $V\notin \mathrm{X}^r$, и нельзя утверждать, что $df_X(V)=\left.\dfrac{d}{d\mu}\right|_{t=0} f(X+\mu V)$. Эту ошибку нетрудно исправить некоторым усложнением конструкции или, как это сделано выше, взяв в качестве V векторное поле, ортогональное X в некоторой римановой метрике.

3. Бифуркационное многообразие двойного цикла. Следующее утверждение аналогично лемме 2.4 из [6].

Теорема 2. *Пусть векторное поле $X\in \mathrm{P}_n$ имеет двойной предельный цикл* Γ [3, с. 118] *и V_0 – его окрестность, не содержащая особых точек и других замкнутых траекторий. Тогда существуют окрестность $V\subset V_0$ цикла Γ, окрестность B поля X в P_n и аналитическая функция $f:B\to\mathbf{R}$ такие, что для любого $Y\in B$*

1) граница окрестности V состоит из двух гладких замкнутых кривых трансверсальных полю Y;

2) $df_Y\neq 0$;

3) $f(Y)=0$ тогда и только тогда, когда Y имеет в V единственную замкнутую траекторию – двойной цикл;

4) $f(Y)<0$ тогда и только тогда, когда Y не имеет в V замкнутых траекторий;

5) $f(Y)>0$ тогда и только тогда, когда Y имеет в V две замкнутые траектории, обе грубые.

6) при $f(Y)\neq 0$ поле Y грубое в V, а при $f(Y)=0$ имеет в V первую степень негрубости.

Доказательство теоремы повторяет доказательство леммы 2.4 из [6] с тем отличием, что следует проследить за аналитичностью используемых функций, а то, что $df_Y\neq 0$ доказывать так же, как в теореме 1.

4. Бифуркационные многообразия сложного фокуса и седло-узла. Следующие утверждения и их доказательства аналогичны леммам 3.2 и 3.12 из [6]. Мы их приводим для полноты изложения.

Теорема 3. *Пусть векторное поле $X\in \mathrm{P}_n$ имеет устойчивый сложный фокус z_0 кратности один* [3, с. 253] *и V_0 – его окрестность, не содержащая других особых точек и замкнутых траекторий. Тогда существуют окрестность $V\subset V_0$ точки z_0, окрестность B поля X в P_n и аналитическая функция $f:B\to\mathbf{R}$ такие, что для любого $Y\in B$*

1) ∂V гладкая замкнутая кривая, трансверсальная полю Y;

2) $df_Y\neq 0$;

3) Y имеет в V единственную особую точку, она является устойчивый сложным фокусом кратности один при $f(Y)=0$, устойчивым (неустойчивым) грубым фокусом $f(Y)<0$ ($f(Y)>0$);

4) Y имеет в V единственную, устойчивую и грубую замкнутую траекторию при $f(Y)>0$ и не имеет в V замкнутых траекторий при $f(Y)\leq 0$;

5) при $f(Y)\neq 0$ поле Y грубое в V, а при $f(Y)=0$ имеет в V первую степень негрубости.

Теорема 4. *Пусть векторное поле $X\in \mathrm{P}_n$ имеет седло-узел z_0 кратности два* [3, с. 234-235] *и V_0 – его окрестность, не содержащая других особых точек и замкнутых траекторий. Тогда существуют окрестность $V\subset V_0$ точки z_0, окрестность B поля X в P_n и аналитическая функция $f:B\to\mathbf{R}$ такие, что для любого $Y\in B$*

1) $df_Y \neq 0$ *;*

2) Y не имеет в V замкнутых траекторий;

3) Y имеет в V единственную особую точку при $f(Y)=0$, она является седло-узлом кратности два;

4) Y не имеет в V особых точек при $f(Y)>0$;

5) Y имеет в V две грубые особые точки, седло и узел при $f(Y)<0$;

6) при $f(Y)\neq 0$ поле Y грубое в V, а при $f(Y)=0$ имеет в V первую степень негрубости.

Замечание 3. Если при условиях теоремы 4 $\operatorname{div} X(z_0)<0(>0)$ и выходящая (входящая) сепаратриса седло-узла L $\omega(\alpha)$-предельна к z_0, не являясь входящей (выходящей) сепаратрисой, то утверждение теоремы верно для некоторой окрестности V замкнутой кривой $\overline{L}$ – петли сепаратрисы седло-узла, со следующим изменением: $Y\in B$ имеет в V единственную, причем устойчивую (неустойчивую) замкнутую траекторий при $f(Y)>0$ и не имеет замкнутых траекторий в остальных случаях [3, с. 329-337].

Литература

1. *Андронов А.А.* Грубые системы / А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин // ДАН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247-251.
2. *Андронов А.А.* К теории изменения качественной структуры разбиения плоскости на траектории / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович // ДАН СССР. 1938. Т. 21, № 9. С. 427-430.
3. *Андронов А.А.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука, 1967. 488 с.
4. *Peixoto M.M.* Structural stability on 2-dimensional manifolds / M.M. Peixoto // Topology. 1962. V. 1, P. 101-120.
5. *Арансон С.Х.* Об отсутствии устойчивых по Пуассону траекторий и траекторий, двоякоасимптотических к двойному циклу, у динамических систем первой степени негрубости на ориентируемых двумерных многообразиях / С.Х. Арансон // Мат. сб. 1968. Т. 76. С. 214-230.
6. *Sotomayor J.* Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds / J. Sotomayor // Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 5-46.
7. *Ройтенберг В.Ш.* Грубые дифференциальные уравнения второго порядка / В.Ш. Ройтенберг // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып.4. Ярославль, Изд-во ЯГТУ, 2004. С. 55 - 65.
8. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркационных многообразиях коразмерности один в пространстве дифференциальных уравнений второго порядка / В.Ш. Ройтенберг // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып.4. Ярославль, Изд-во ЯГТУ, 2004. С. 65-75.
9. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкаре. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 392 с.
10. *Бибиков Ю.Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие / Ю.Н. Бибиков. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 232 с.
11. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат. М.: Наука, 1969. 576 с.
12. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
13. *Шильников Л.П.* Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. Часть 1. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. 416 с.
14. *Андронов А.А.* Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука, 1966. 568 с.

ON BIFURCATION MANIFOLDS IN THE SPACE OF PLANAR POLYNOMIAL VECTOR FIELDS

V.Sh. Roitenberg

We prove that bifurcation sets in the space of all planar polynomial vector fields, corresponding to «simplest» structural unstable trajectories, are analytical submanifolds of codimension one.