2 0 1 3 г **№ 18**

Т р у д ы Ф О Р А

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА

В.А. Козлов, Л.Ж. Паланджянц

Армавирская государственная педагогическая академия, г. Армавир
Майкопский государственный технологический университет, г. Майкоп

Предлагается некоторый набор задач, связанный с приложениями теории мультипликативного интеграла от матричных функций произвольного порядка. К числу таких задач относятся мультипликативно-дифференциальные уравнения и вычисление полиномиальных мультипликативных интегралов.

1. Вспомогательные предложения

Мультипликативный интеграл от непрерывной матричной функции n-го порядка $A(t)$ в интервале (t_0, t) определим следующим образом [1,2]:

$$Y(t) = \lim_{\Delta t_k \to 0} (E + A(\tau_n)\Delta t_n) \cdots (E + A(\tau_1)\Delta t_1) = \int_{t_0}^{\overset{\frown}{t}} E + A(\tau) d\tau, \tag{1.1}$$

(E в (1.1) означает единичную матрицу n-го порядка).

Существует мультипликативный интеграл, связанный с обратным порядком умножения матриц в (1.1) и обозначается

$$Z = \int_{t_0}^{\overset{\smile}{t}} E + A(\tau) d\tau \tag{1.2}$$

Связь между этими видами мультипликативных интегралов (1.1) и (1.2) выражается соотношением

$$\left(\int_{t_0}^{\overset{\frown}{t}} E + A(\tau) d\tau \right)^{-1} = \int_{t_0}^{\overset{\smile}{t}} E - A(\tau) d\tau .$$

Операции мультипликативного дифференцирования $D_t Y = Y' Y^{-1}$ и мультипликативного интегрирования (1.1) взаимно обратны.

Если $D_t Y = A$, то

$$\int_{t_0}^{\overset{\frown}{t}} E + A(\tau) d\tau = Y(t) Y^{-1}(t_0). \tag{1.3}$$

Формула (1.3) есть аналог формулы Ньютона-Лейбница. Матрица $Y(t)$ является одной из первообразных мультипликативного интеграла. Остальные первообразные получаются из $Y(t)$ умножением на постоянную матрицу C. Умножение производится слева или справа в зависимости от вида мультипликативного интеграла. Первообразная $Y(t)$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$Y' = A(t) Y \tag{1.4}$$

Мультипликативный интеграл (1.1) представляется в интегральной форме в виде матриканта системы (1.4):

$$Y(t)=E+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}A(\tau)\int_{t_0}^{\tau}A(s)dsd\tau+\cdots \tag{1.5}$$

В случае непрерывной матричной функции $A(t)$ ряд (1.5) равномерно сходится. Можно показать при помощи дифференцирования, что ряд (1.5) является формальным решением уравнения (1.4). Соответственно, первообразная $Z(t)$ мультипликативного интеграла (1.2) удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений: $Z'=-ZA(t)$.

Существует дифференциальное представление мультипликативного интеграла:

$$Y(t)=E+A\cdot t+\left(A^2-A'\right)\frac{t^2}{2}+\left(A''-2AA'-A'A+A^3\right)\frac{t^3}{3!}+\ldots+P_n(t)\frac{t^n}{n!}+\ldots, \tag{1.6}$$

где $P_n=AP_{n-1}-P'_{n-1}, \quad P_0=E.$

Можно показать при помощи дифференцирования, что ряд (1.6) является формальным решением уравнения (1.4).

2. Мультипликативно-дифференциальные уравнения

В алгебре $n\times n$-матричных функций от одной вещественной переменной $t\in R$ определим мультипликативную производную [1]:

$$D_tY(t)=Y'(t)Y^{-1}.$$

Операции мультипликативного дифференцирования и мультипликативного интегрирования взаимно обратны:

$$\overset{\frown}{\int} E+D_tY(t)dt=Y(t),$$

$$D_t\overset{\frown}{\int} E+A(t)dt=A(t),$$

где $A(t)$ – $n\times n$-матричная функция от одной вещественной переменной $t\in R$.

На основе мультипликативной производной определим понятие мультипликативно-дифференциального уравнения.

Назовем мультипликативно-дифференциальным уравнением первого порядка соотношение, связывающее искомую матричную функцию, независимую переменную и мультипликативную производную искомой матричной функции:

$$F(t,Y,D_tY)=0. \tag{2.1}$$

Полагая, что уравнение (2.1) разрешимо относительно мультипликативной производной, получаем:

$$D_tY=f(t,Y). \tag{2.2}$$

Отметим, что мультипликативно-дифференциальное уравнение первого порядка (2.2) сводится к обыкновенному матричному дифференциальному уравнению

$$Y'=f(t,Y)Y. \tag{2.3}$$

Аналогично определяются мультипликативно-интегральные уравнения, когда искомая матричная функция находится под знаком мультипликативного интеграла. Некоторые примеры мультипликативно-интегральных уравнений приведены в работе А.Н.Мартынюка [3]:

$$\overset{\frown}{\int} E+Y(t)dt=Y^n(t), \qquad \overset{\frown}{\int} E+Y(t)dt=Y^{-n}(t), \tag{2.4}$$

соответственно с решениями:

$Y(t) = -\left(\frac{x}{n}E + C\right)^{-1}$ при условии $[Y, Y'] = 0$, $Y(t) = -\left(-\frac{x}{n}E + C\right)^{-1}$ при условии $[Y^{-1}, Y'] = 0$, где C – постоянная матрица. Отметим, что мультипликативно-интегральные уравнения (2.4) соответствуют следующим мультипликативно-дифференциальным уравнениям:

$$D_t Z = Z^{\frac{1}{n}},\ Z = Y^n \text{ и } D_t Z = Z^{-\frac{1}{n}},\ Z = Y^{-n}. \tag{2.5}$$

Задача 1. Рассмотрим мультипликативно-дифференциальное уравнение:

$$D_t Y = Y^{-n-1},\ n \in N. \tag{2.6}$$

Из уравнения (2.6) имеем:

$$Y^n Y' = E. \tag{2.7}$$

Умножим обе части уравнения (2.7) слева на Y^{-1}, а справа на Y, и полученные уравнения снова умножим слева на Y^{-1}, а справа на Y. В результате имеем последовательность уравнений:

$$Y^n Y' = E,\ Y^{n-1} Y' Y = E,\ Y^{n-2} Y' Y = E, \ldots,\ Y' Y^n = E. \tag{2.8}$$

Складывая почленно обе части уравнений последовательности (2.8), получаем:

$$Y^n Y' + Y^{n-1} Y' Y + \ldots + Y' Y^n = (n+1)E,$$

$$(Y^{n+1})' = (n+1)E,$$

откуда следует, что $Y = ((n+1)tE + C)^{\frac{1}{n+1}}$, где C – постоянная матрица.

Задача 2. Рассмотрим мультипликативно-дифференциальное уравнение:

$$D_t Y = Y^{n-1},\ n \in N. \tag{2.9}$$

Из уравнения (2.9) имеем:

$$Y^{-n} Y' = E. \tag{2.10}$$

Умножим обе части уравнения (2.10) справа на Y^{-1}, а слева на Y, и полученные уравнения снова умножим справа на Y^{-1}, а слева на Y. В результате имеем последовательность уравнений:

$$Y^{-n+1} Y' Y^{-1} = E,\ Y^{-n+2} Y' Y^{-2} = E, \ldots,\ Y^{-1} Y' Y^{-n} = E. \tag{2.11}$$

Сложим почленно обе части уравнений последовательности (2.11) и умножим полученное уравнение на $(-E)$:

$$-Y^{-n+1} Y' Y^{-1} - Y^{-n+2} Y' Y^{-2} - \ldots - Y^{-1} Y' Y^{-n+1} = -(n+1)E, \tag{2.12}$$

Левая часть уравнения (2.12) представляет собой полную производную:

$$(Y^{-n+1})' = -(n+1)E,$$

откуда следует, что $Y = (-(n+1)tE + C)^{\frac{1}{-n+1}}$, где C – постоянная матрица.

Задача 3. Рассмотрим мультипликативно-дифференциальное уравнение:

$$D_t Y = Y^{\frac{1-n}{n}},\ n \in N. \tag{2.13}$$

Из уравнения (2.13) имеем:

$$Y' = Y^{\frac{1}{n}}. \tag{2.14}$$

С помощью замены $Z = Y^{\frac{1}{n}}$ уравнение (2.14) запишется в виде:

$$(Z^n)' = Z. \tag{2.15}$$

Покажем, что $[Z,Z']=0$. Имеем $[Y,Y']=[Y,Y^{\frac{1}{n}}]=0$. Дифференцируя равенство $[Y,Y']=0$, получаем $[Y,Y'']=0$. Учитывая, что $Y=Z^n$ и $Y''=Z'$, получаем $[Z^n,Z']=0$. Следовательно, при $n=1$ имеет место равенство $[Z,Z']=0$.
Дифференцируя правую часть уравнения (2.15), получаем:

$$Z^{n-1}Z'+Z^{n-2}Z'Z+\ldots+Z'Z^{n-1}=Z,$$

или $Z^{n-2}Z'=\dfrac{1}{n}E$. Сравнивая это уравнение с уравнением (2.7), получаем $Z=(\dfrac{(n+1)}{n}tE+C)^{\frac{1}{n-1}}$, а, следовательно, $Y=(\dfrac{(n+1)}{n}tE+C)^{\frac{n}{n-1}}$.

Задача 4. Рассмотрим мультипликативно-дифференциальное уравнение:

$$D_tY=Y^{\frac{-1-n}{n}},\ n\in N. \qquad (2.16)$$

Из уравнения (2.16) имеем:

$$Y'=Y^{-\frac{1}{n}}. \qquad (2.17)$$

С помощью замены $Z=Y^{-\frac{1}{n}}$ уравнение (2.17) запишется в виде:

$$(Z^{-n})'=Z.$$

$$-Z^{-n}Z'Z^{-1}-Z^{-n+1}Z'Z^{-2}-\ldots-Z^{-1}Z'Z^{-n}=Z, \qquad (2.18)$$

Покажем, что $[Z,Z']=0$. Имеем $[Y,Y']=[Y,Y^{-\frac{1}{n}}]=0$. Дифференцируя равенство $[Y,Y']=0$, получаем $[Y,Y'']=0$. Учитывая, что $Y=Z^{-n}$ и $Y''=Z'$, получаем $[Z^{-n},Z']=0$. Следовательно, при $n=1$ имеет место равенство $[Z^{-1},Z']=0$. Рассмотрим тройку матриц (Z^{-1},Z,Z'). Из тождества Якоби $[Z^{-1},[Z,Z']]+[Z',[Z^{-1},Z]]+[Z,[Z',Z^{-1}]]=0$ имеем: $[Z^{-1},[Z,Z']]=0$, откуда, учитывая равенство $[Z^{-1},Z']=0$, получаем, что $[Z,Z']=0$.

Из уравнения (2.18) получаем: $Z^{-n-2}Z'=-\dfrac{1}{n}E$. Сравнивая это уравнение с уравнением (10), получаем $Z=\left(\dfrac{(n+3)}{n}tE+C\right)^{\frac{1}{-n-1}}$, а, следовательно, $Y=\left(\dfrac{(n+3)}{n}tE+C\right)^{\frac{n}{-n-1}}$.

Заметим, что для решения уравнений (2.5) не требуется дополнительного условия перестановочности функции со своей производной.

Задача 5. Рассмотрим мультипликативно-дифференциальное уравнение:

$$D_tY=aY+b,\ n\in N, \qquad (2.19)$$

где a, b – произвольные постоянные.

Из уравнения (2.19) имеем:

$$Y'=aY^2+bY. \qquad (2.20)$$

Умножим обе части уравнения (2.20) справа на Y^{-1}, и слева на Y^{-1}. Тогда $Y^{-1}Y'Y^{-1}=aE+bY^{-1}$, откуда следует, что

$$-(Y^{-1})'=aE+bY^{-1}. \qquad (2.21)$$

Уравнение (2.21) имеет постоянное частное решение $Y_1^{-1}=-\dfrac{a}{b}E$. Сделаем замену $Y^{-1}=Y_1^{-1}+Y_0^{-1}$. Тогда уравнение (2.21) примет вид: $-(Y_0^{-1})'=bY^{-1}$, то есть, $Y_0^{-1}=C\exp(-bt)$, где C – постоянная матрица. Следовательно, $Y^{-1} = -\frac{a}{b}E + C\exp(-bt)$ или $Y = (-\frac{a}{b}E + C\exp(-bt))^{-1}$.

Задача 6. Рассмотрим мультипликативно-дифференциальное уравнение:

$$D_t Y = kA(t)Y^{\frac{1}{k}},\ k \in N, \tag{2.22}$$

где $A(t) \in C(R)$.

Введем обозначение: $B(t) = \int A(t)dt$.

Лемма 1. *Пусть матричная функция перестановочна со своим интегралом (случай Лаппо-Данилевского):*

$$[A(t), B(t)] = 0. \tag{2.23}$$

Тогда выполняется условие:

$$(E-B)^{-k+1}A = A(E-B)^{-k+1},\ k \in N. \tag{2.24}$$

Доказательство. Из условия (2.23) следует, что

$$(E-B)A = A(E-B),\ k \in N.$$

Тогда $(E-B)A = A(E-B)^k(E-B)^{-k+1},\ k \in N$. Так как $A(E-B)^k = (E-B)^k A$, то $(E-B)A = (E-B)^k A(E-B)^{-k+1}$, или $(E-B)^{-k+1}A = A(E-B)^{-k+1}$, то есть, получаем условие (2.24). Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* (2.23). *Тогда уравнение* (2.22) *имеет частное решение* $Y(t) = (E - B(t))^{-k}$.

Доказательство. Имеем

$$Y' = (E-B)^{-k}A(E-B)^{-1} + (E-B)^{-k+1}A(E-B)^{-2} + \ldots + (E-B)^{-1}A(E-B)^{-k}.$$

По лемме 1 $Y' = kA(E-B)^{-k-1}$ или $Y' = kAY^{\frac{k+1}{k}}$, то есть $D_t Y = kA(t)Y^{\frac{1}{k}},\ k \in N$.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. При $k = 1$ получается результат работы [4]. В работе [5] указана формула дифференцирования функции от операторов, зависящих от параметра, применение которой упрощает вычисления, связанные с использованием леммы 1.

Задача 7. Рассмотрим мультипликативно-дифференциальное уравнение:

$$D_t Y = -kA(t)Y^{-\frac{1}{k}},\ k \in N, \tag{2.25}$$

где $A(t) \in C(R)$.

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* (2.23). *Тогда уравнение* (2.25) *имеет частное решение* $Y(t) = (E - B(t))^k$.

Доказательство. Имеем

$$Y' = -(E-B)^{k-1}A - (E-B)^{k-2}A(E-B) - \ldots - A(E-B)^{k-1}.$$

Из условия (2.24) $Y' = -kA(E-B)^{k-1}$ или $Y' = -kAY^{\frac{k-1}{k}}$, то есть $D_t Y = -kA(t)Y^{-\frac{1}{k}},\ k \in N$.

Теорема 2 доказана.

Замечание 2. При $k = 1$ получается результат работы [4].

Задача 8. Рассмотрим мультипликативно-дифференциальное уравнение:

$$D_t Y = A(t) + YB(t)Y^{-1}, \tag{2.26}$$

где $A(t), B(t) \in C(R)$.

Решение уравнения (2.26) представляется в виде $Y = XCZ$, где $X' = AX$, $Z' = BZ$, C – постоянная матрица (см., например,[6]). В терминах мультипликативного интеграла $D_t X = A$, $D_t Z^{-1} = -B$, то есть, $X = \int\limits^{\cap} E + A(t)dt$, $Z = \int\limits^{\cup} E - B(t)dt$.

Задача 9. Рассмотрим мультипликативно-дифференциальное уравнение [7]:

$$D_t Y = A(t)Y^{-1} - Y, \tag{2.27}$$

где $A(t) \in C(R)$.

Замена $D_t X = Y$ приводит уравнение (2.27) к виду

$$Z'' = A(t)Z, \tag{2.28}$$

решение которого в работе [8] представлено в виде сходящегося ряда.

Обозначим $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ два линейно независимые решения уравнения (2.28), удовлетворяющие условиям $Y_1(0) = E_n$, $Y_1'(0) = 0$, $Y_2(0) = 0$, $Y_2'(0) = E_n$, где E_n – единичная матрица n-го порядка.

Введем обозначения $\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ A(t) & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{Z} = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{pmatrix}$.

Тогда уравнение (2.28) можно записать в виде $\tilde{Z}' = \tilde{A}(t)\tilde{Z}$, $Y(0) = E_{2n}$ или в терминах мультипликативного интеграла $\tilde{Z} = \int\limits_{t_0}^{\overset{t}{\cap}} E_{2n} + \tilde{A}(\tau)d\tau$.

Задача 10. Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение Риккати [6,10]:

$$Y' = XCY + AY - YD - B, \tag{2.29}$$

где $A(t), B(t), C(t), D(t) \in C(R)$.

Покажем, что уравнение (2.29) получается в результате калибровочного преобразования блочной $2n \times 2n$-матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ к блочно-треугольному виду. О формулах калибровочного преобразования (см., например, [9], с. 17).

$$\begin{pmatrix} E & Y \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & -Y \\ 0 & E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E & Y \\ 0 & E \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} E & -Y \\ 0 & E \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} A + YC & -AY - YCY + B + YD + Y' \\ C & -CY + D \end{pmatrix}$, откуда, в силу уравнения (2.29), следует блочная треугольность $2n \times 2n$-матрицы.

В терминах мультипликативного интеграла калибровочное преобразование подынтегральной матричной функции соответствует мультипликативному интегрированию по частям.

3. Мультипликативное интегрирование степеней полиномиальных матричных функций

Задачу о мультипликативном интегрировании степеней полиномиальных матричных функций впервые сформулировал О.В. Мантуров в статье [11], где предлагался метод интегрирования, основанный на переходе от степени полиномиальной матрицы к степеням ее элементов.

Наш метод основан на использовании характеристического уравнения мультипликативного интеграла, который позволяет снизить степень полиномиальной матрицы. Кроме того, выяснялось, что характеристическое уравнение исходной полиномиальной матрицы совпадает с характеристическим уравнением для разностного уравнения типа Фибоначчи, связывающее между собой элементы степени полиномиальной матрицы. Это обстоятельство позволяет, не переходя к элементам степени полиномиальной матрицы, записать характеристическое уравнение для разностного уравнения, используя коэффициенты характеристического уравнения исходной полиномиальной матрицы. Для полиномиальной матрицы порядка, не превышающего четырех, характеристическое уравнение можно разрешить в явном виде. В случае, когда порядок полиномиальной матрицы больше четырех, возникает задача о нахождении условий, при которых соответствующее характеристическое уравнение разрешимо в явном виде.

Задача 11. Рассмотрим полиномиальную матрицу с единичным определителем [11]:

$$T_m = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^m .$$

Вычислим в явном виде матричную функцию $A(t) = T_m' T_m^{-1}$, то есть, вычислим подынтегральную матричную функцию мультипликативного интеграла $\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt = T_m(t)$.

Введем обозначение $Y = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение матрицы Y имеет вид: $Y^2 = tY - 1$. Выразим матрицу Y^m через матрицу Y.

Пусть $Y^m = a_m Y + b_m$. Поскольку имеют место равенства $a_m = a_{m-1}t + b_{m-1}$, $b_{m-1} = a_{m-2}$, то

$$a_m = a_{m-1}t + a_{m-2}, \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) представляет собой разностное уравнение типа Фибоначчи. Общее решение уравнения (3.1) записывается в виде:

$$a_m = c_1\lambda_1^m + c_2\lambda_2^m ,$$

где λ_1 и λ_2 корни уравнения $\lambda^2 - t\lambda - 1 = 0$, то есть, $\lambda_{1,2} = \frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2}{4} + 1}$; c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Выберем начальные условия. Из равенства $Y^2 = tY - 1$ имеем:

$\begin{cases} a_2 = t \\ b_2 = 1 \end{cases}$. С учетом условий $\begin{cases} a_2 = ta_1 + b_1 \\ b_2 = a_1 \end{cases}$, получаем $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = t \end{cases}$

Учитывая начальные условия $a_1 = 1$ и $a_2 = t$, решение уравнения (3.1) запишется в виде:

$$a_m = \frac{\lambda_2(\lambda_2 - t)t}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_1^m + \frac{\lambda_1(t - \lambda_1)t}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_2^m \tag{3.2}$$

Таким образом,

$$(Y^m)' = a_m' Y + a_m Y' + a_{m-1}' \tag{3.3}$$

Вычислим обратную матрицу $Y^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение матрицы Y^{-1} имеет вид: $Y^{-2} = tY^{-1} - 1$, то есть, совпадет с характеристическим уравнением матрицу Y. Выразим матрицу Y^{-m} через матрицу Y^{-1}. Очевидно, что $Y^{-m} = a_m Y^{-1} + b_m$ или

$$Y^{-m} = a_m Y^{-1} + a_{m-1} \tag{3.4}$$

Найдем теперь $A(t) = T_m' T_m^{-1}$, используя равенства (3.3) и (3.4).

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_m a_m' + a_{m-1}a_{m-1}' + ta_{m-1}a_m' + a_m a_{m-1} & a_{m-1}a_m' - a_m a_{m-1}' - a_m^2 \\ -a_{m-1}a_m' + a_m a_{m-1}' & a_m a_m' + a_{m-1}a_{m-1}' + ta_m a_{m-1}' \end{pmatrix},$$

где a_m вычисляется по формуле (3.3).

Задача 12. Рассмотрим полиномиальную матрицу с единичным определителем

$$T_m(t)=\begin{pmatrix} t & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^m$$

Вычислим в явном виде матричную функцию $A(t)=T_m'T_m^{-1}$, то есть, вычислим подынтегральную матричную функцию мультипликативного интеграла

$$\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt = T_m(t). \tag{3.5}$$

Введем обозначение $Y=\begin{pmatrix} t & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение матрицы Y имеет вид: $Y^3=tY^2+1$. Выразим матрицу Y^m через матрицы Y и Y^2.

Пусть $Y^m=a_mY^2+b_mY+c_m$. Поскольку имеют место равенства $a_m=a_{m-1}t+b_{m-1}$, $b_m=c_{m-1}$, $c_m=a_{m-1}$, то

$$a_m=a_{m-1}t+a_{m-3}, \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) представляет собой разностное уравнение типа Фибоначчи с характеристическим уравнением

$$\lambda^3=t\lambda^2+1. \tag{3.7}$$

Общее решение уравнения (3.5) записывается в виде:

$$a_m=c_1\lambda_1^m+c_2\lambda_2^m+c_3\lambda_3^m, \tag{3.8}$$

где $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ – различные корни уравнения (3.7).

Выберем начальные условия. Из равенств $Y^3=tY^2+1$, $Y^4=t^2Y^2+Y+t$ имеем: $\begin{cases} a_3=t\\ b_3=0\\ c_3=1\end{cases}$ и $\begin{cases} a_4=t\\ b_4=0\\ c_4=1\end{cases}$. С учетом условий $\begin{cases} a_m=ta_{m-1}+b_{m-1}\\ b_m=c_{m-1}\\ c_m=a_{m-1}\end{cases}$, получаем $\begin{cases} a_1=0\\ a_2=1\\ a_3=t\end{cases}$.

Следовательно, для нахождения c_1, c_2 и c_3 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0=c_1+c_2+c_3,\\ 1=c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+c_3\lambda_3,\\ t=c_1\lambda_1^2+c_2\lambda_2^2+c_3\lambda_3^2,\end{cases}$$

откуда следует, что

$$c_1=\frac{1}{\Delta}((\lambda_2-\lambda_3)(t-\lambda_2-\lambda_3)),\ c_2=\frac{1}{\Delta}((\lambda_1-\lambda_3)(t-\lambda_1-\lambda_3)),\ c_3=\frac{1}{\Delta}((\lambda_2-\lambda_1)(t-\lambda_2-\lambda_1)),$$

$$\Delta=\lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2)+\lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3)+\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1).$$

Следовательно, равенство (3.8) запишется в виде:

$$a_m=\frac{1}{\Delta}((\lambda_2-\lambda_3)(t-\lambda_2-\lambda_3)\lambda_1^m+(\lambda_1-\lambda_3)(t-\lambda_1-\lambda_3)\lambda_2^m+(\lambda_2-\lambda_1)(t-\lambda_2-\lambda_1)\lambda_3^m. \tag{3.9}$$

Таким образом,

$$(Y^m)'=(a_mY^2+a_{m-2}Y+a_{m-1})'=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 2a_mt+2a_{m-2}t+a_{m-1} & a_m+a_{m-2} & 0\\ 0 & a_{m-1} & a_{m-2}\\ a_m+a_{m-2} & 0 & a_{m-1}\end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Имеем $Y^{-m} = a_m Y^{-2} + a_{m-2} Y^{-1} + a_{m-1}$. Следовательно,

$$Y^{-m} = \begin{pmatrix} a_{m-1} & a_m & a_{m-2} \\ a_{m-2} & a_{m-1} & -ta_{m-2} \\ a_m & a_{m-2} & -ta_m + a_{m-2} \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Найдем теперь $(a_{ij}) = A(t) = T_m' T_m^{-1}$, используя равенства (3.10) и (3.11).

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (2ta_m + 2ta_{m-2} + a_{m-1})' a_{m-1} + (a_m + a_{m-2})' a_{m-2}\,, \\
a_{12} &= (2ta_m + 2ta_{m-2} + a_{m-1})' a_m + (a_m + a_{m-2})' a_{m-1}\,, \\
a_{13} &= (2ta_m + 2ta_{m-2} + a_{m-1})' a_{m-2} - t(a_m + a_{m-2})' a_{m-2} \\
a_{21} &= a_{m-1}' a_{m-2} + a_{m-2}' a_m\,, \\
a_{22} &= a_{m-1}' a_{m-1} + a_{m-2}' a_{m-2}\,, \\
a_{23} &= -ta_{m-1}' a_{m-2} + a_{m-2}' (-ta_m + a_{m-2})\,, \\
a_{31} &= (a_m + a_{m-2})' a_{m-1} + a_{m-1}' a_m\,, \\
a_{32} &= (a_m + a_{m-2})' a_m + a_{m-1}' a_{m-2}\,, \\
a_{33} &= (a_m + a_{m-2})' a_{m-2} + a_{m-1}' (-ta_m + a_{m-2})\,,
\end{aligned}$$

где a_m вычисляется по формуле (3.8).

Таким образом, вычислена подынтегральная функция мультипликативного интеграла (3.5).

Литература

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. − 552 с.
2. *Мантуров О.В.* Мультипликативный интеграл.// Проблемы геометрии. 1990, т. 22, с. 167-215.
3. *Мартынюк А.Н.* О табличных формулах в теории мультипликативного интеграла // Труды кафедры геометрии МГОУ, 2005, № 2, с. 23-27.
4. *Лаптинский В.Н., Пугин В.В.* О нелинейных матричных дифференциальных уравнениях первого порядка // Дифференциальные уравнения, 1968. Т.5. № 8. С. 1523-1525.
5. *Буренков В.И.* О формуле дифференцирования функции от операторов, зависящих от параметра // Мат. заметки, 1971, 10, № 2. С. 207-218.
6. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
7. *Zidek Jaroslav* Maticova Riccatiovf rovnica a jej niektore specialue riesenia. (Матричное уравнение Риккати и его некоторые специальные решения) //«Sb. UTA z Brno», 1986, B, 3, с. 21.
8. *Парасюк Э.М.* Один вид решения матричного дифференциального уравнения второго порядка // Львов. политех. ин-т, 1980, 6 с. Деп. в ВИНИТИ 21.07.80, № 3196–80ДЕП.
9. *Паланджянц Л.Ж.* Геометрия мультипликативного интеграла. − Майкоп. МП «Качество», 1997. − 94 с.
10. *Reid W.T.* Riccati diff. equations. Academic Press, 1972. − 213 c.
11. *Мантуров О.В.* Об одной задаче теории мультипликативного интеграла. Дифференциальная геометрия и приложения. – М. 1982. С. 3–17. Деп. в ВИНИТИ 22.03.83, №1442-83Деп.

CERTAIN PROBLEMS OF MULTIPLICATIVE INTEGRAL

V.A. Kozlov, L.Zh. Palandzhyants

The problems of applications the multiplicative integral theory of arbitrary order matrix functions are considered. In particular, the problems solution of multiplicative differential equations and calculation of polynomial multiplicative integrals.

