

ПРОЦЕССЫ КАСКАДНОГО ТИПА В ФИЗИКЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

М.Х. Хоконов

Кабардино-Балкарский госуниверситет, г. Нальчик

Рассмотрены каскадные процессы потерь энергии первоначальной частицей (электроном, позитроном) за счёт излучения жёстких гамма квантов. Актуальность этого обусловлена интенсивными экспериментальными и теоретическими исследованиями электромагнитных процессов в сильных внешних полях, превышающих критическое поле Швингера.

1. Введение

Пусть имеется стохастическая последовательность однотипных физических процессов, сопровождающих прохождение частицы через вещество. Это может быть потеря энергии быстрой заряженной частицей на атоме вещества за счёт ионизации последнего, или рождение электронно-позитронной пары гамма квантом при взаимодействии с атомным ядром и т.д. Каждый такой процесс характеризуется некоторым сечением σ . Если число атомов вещества-мишени в единице объёма есть N , то величина $d\nu = \sigma N v dt$ представляет собой вероятность взаимодействия данного вида за время dt , здесь v — скорость частицы. Стохастическую последовательность таких элементарных взаимодействий называют каскадом. Чаще всего под каскадом понимают электромагнитный или адронный каскады. В первом случае речь идёт о процессе, показанном на рис. 1. Первоначальный фотон, попадая в вещество, рождает электронно-позитронную пару. Электрон и позитрон излучают гамма кванты взаимодействуя с атомами вещества (тормозное излучение). Гамма кванты, в свою очередь, снова рождают пары и т.д. Траектории фотонов на рис.1 показаны штриховыми линиями, а электронам и позитронам соответствуют сплошные линии. Первичный гамма квант на рис.1 даёт в итоге 7 электронно-позитронных пар (всего 14 частиц) и 7 гамма квантов.

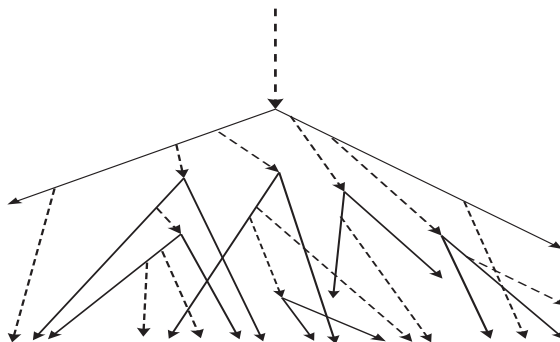


Рис. 1. Электромагнитный каскад.

В настоящей работе основное внимание будет уделено каскадным процессам потерь энергии первоначальной частицей (электроном, позитроном) за счёт излучения жёстких гамма квантов. Актуальность этой проблемы обусловлена интенсивными экспериментальными и теоретическими исследованиями электромагнитных процессов в сильных внешних полях, превышающих критическое поле Швингера \mathcal{E}_c , когда сила, действующая на электрон равна

$$F_c = e\mathcal{E}_c = \frac{m^2 c^3}{\hbar} \approx 10^{16} \frac{\text{eV}}{\text{cm}}, \quad (1.1)$$

где e и m – заряд и масса покоя электрона. Физический смысл величины (1.1) заключается в том, что F_c есть сила, при которой работа, совершаемая электроном на комптоновской длине $\lambda_c = \hbar/mc$ равна его энергии покоя mc^2 .

Величину электромагнитного поля удобно характеризовать безразмерным Лоренц-инвариантным параметром поля χ . В случае электростатического поля этот параметр в лабораторной системе отсчёта имеет вид

$$\chi = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c} \gamma \quad (1.2)$$

где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ – Лоренц-фактор электрона, движущегося в поле с напряжённостью \mathcal{E} , $\beta = v/c$, c – скорость света в вакууме.

На сегодняшний день поля, соизмеримые или даже превосходящие критическое поле Швингера, достигаются в лабораторных условиях в двух случаях. Это в ориентированных кристаллах при прохождении через них электронов (позитронов), а также гамма-квантов с энергиями превышающими ~ 100 ГэВ [1], или в полях, создаваемых тера или пета-ваттными лазерами [2, 3]. В кристаллах электростатическое поле атомных цепочек вдоль основных кристаллографических направлений создаёт силу, действующую на электрон, движущийся вдоль одного из таких направлений, равную

$$F \approx \frac{2Ze^2}{da_F} \sim 10^3 \frac{\text{eV}}{\text{E}} = 10^{11} \frac{\text{eV}}{\text{cm}}, \quad (1.2)$$

где Z – атомный номер вещества мишени, d – расстояние между соседними атомами в атомной цепочке кристалла, $a_F = 0.883a_0Z^{-1/3}$ – параметр экранирования Томаса-Ферми, $a_0 = 0.53 \text{ E}$ – радиус Бора. При энергии электрона 100 ГэВ $\gamma \sim 10^5$ и формула (1.2) даёт $\chi \approx 1$. Это означает, что сила, действующая на такой электрон в системе отсчёта, в которой этот электрон покоится, равна $\sim 10^{16} \text{ eV/cm}$, что совпадает со значением (1.1).

2. Процессы пуассоновского типа

Пусть величина $P(t)$ определяет вероятность того, что за промежуток времени $(0, t)$ не произойдёт ни одного акта взаимодействия в системе. Под взаимодействием может пониматься любой физический процесс, характеризуемый соответствующим сечением σ : отдельный акт рассеяния налетающей частицы на атоме вещества; рождение электронно-позитронной пары гамма-квантом на атоме или во внешнем поле; излучение фотона релятивистским электроном, и т.д. Взаимодействие, как было отмечено выше, можно характеризовать также вероятностью интересующего нас процесса, отнесённую к единице времени V . В случаях, когда скорость движения можно считать постоянной (это часто бывает при релятивистских скоростях или в случае не слишком толстых мишеней) удобно ввести вероятность взаимодействия на единице длины пути. Эту величину будем также обозначать V (например, в случае взаимодействия с атомами мишени $V = N\sigma$). Как правило, величина V , определяющая интегральное сечение взаимодействия, слабо зависит от энергии взаимодействующей частицы E , хотя соответствующее дифференциальное сечение может сильно зависеть от E . Сечение взаимодействия за единицу времени V имеет и другую трактовку. Именно, величина Vdt есть вероятность взаимодействия за бесконечно малый интервал времени dt . Размерность величины V есть [1/секунда] (или [1/см]).

Поскольку $P(t)$ есть вероятность того, что за промежуток времени $(0, t)$ не произойдёт ни одного акта взаимодействия, то вероятность $P(t + dt)$ того, что взаимодействие не произойдёт за время $(0, t + dt)$ будет произведением двух величин: вероятности $P(t)$ и величины $1 - vdt$. Последняя определяет вероятность того, что взаимодействие не произойдёт за время dt . Имеем

$$P(t + dt) = P(t)(1 - vdt). \quad (2.1)$$

Таким образом, вероятность того, что за промежуток времени $(0, t)$ не произойдёт ни одного акта взаимодействия равна

$$P(t) = \exp(-vt). \quad (2.2)$$

Решение (2.2) удовлетворяет очевидному начальному условию $P(0) = 1$.

Определим вероятность $P_1(t)$ того, что за время $(0, t)$ произойдёт ровно один акт взаимодействия (на это указывает нижний индекс). Вероятность ровно одного взаимодействия за время $(0, t + dt)$ будет равна сумме двух вероятностей — вероятности того, что взаимодействие произойдёт на отрезке времени $(0, t)$ (она равна $P_1(t)$), умноженной на вероятность отсутствия взаимодействия за время dt , и вероятности того, что взаимодействие произойдёт за время dt , умноженной на вероятность того, что за время $(0, t)$ взаимодействия не будет. Это приводит к уравнению

$$P_1(t + dt) = P_1(t)(1 - vdt) + P_0(t)vdt. \quad (2.3)$$

Здесь и далее часто будем использовать обозначение для вероятности (2.2) $P_0(t) \equiv P(t)$. Решая уравнение (2.3) получаем

$$P(t) = vt \exp(-vt). \quad (2.4)$$

Рассуждая аналогичным образом, уравнение, определяющее вероятность $P_k(t)$ того, что за конечное время t произойдёт ровно k актов взаимодействия, примет вид рекуррентного соотношения

$$P_k(t + dt) = P_k(t)(1 - vdt) + P_{k-1}(t)vdt, \quad (2.5)$$

где индекс $k = 1, 2, \dots$ определяет число актов взаимодействия, P_0 определяется выражением (2.2). Решением уравнений (2.5) является распределение Пуассона

$$P_k(\xi) = \frac{\xi^k}{k!} \exp(-\xi), \quad (2.6)$$

где безразмерный параметр ξ определяет среднее число взаимодействий за время t :

$$\xi = vt \equiv \langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(t). \quad (2.7)$$

Часто безразмерная величина ξ играет роль временной переменной. Особенностью распределения Пуассона является то, что для него среднеквадратичное отклонение от среднего совпадает с самим средним:

$$\langle \Delta k^2 \rangle \equiv \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \xi. \quad (2.8)$$

Как и должно быть

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1. \quad (2.9)$$

Как будет ясно из дальнейшего, каскадные процессы во многих важных случаях сводятся к процессам пуассоновского типа.

3. Исторический обзор

Тормозное излучение

В своей пионерской работе [4] по расчёту сечения тормозного излучения с помощью новых в то время методов квантовой электродинамики, Бёте и Гайтлер привели решение следующей задачи. Известна дифференциальная вероятность $\nu_{\omega}(E)d\omega dt$, что за бесконечно малый промежуток времени dt движущийся через однородное вещество электрон излучит фотон, энергия которого лежит в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$, здесь E — энергия электрона. Требуется определить вероятность

$W_\omega(E_0, t)d\omega$ того, что к моменту времени t электрон потеряет на излучение энергию, лежащую в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$, если первоначальная энергия электрона равна E_0 .

Дифференциальную вероятность Бёте-Гайтлера для излучения фотона релятивистским электроном на пути $dx = cdt$ можно приближённо аппроксимировать выражением [4]

$$\nu_\omega(E)d\omega dx = \frac{4}{3}A \frac{d\omega dx}{E \ln\left(\frac{E}{E-\omega}\right)} \approx \frac{4}{3}A \frac{d\omega dx}{\omega}, \quad (3.1)$$

где

$$A = \frac{1}{L_{RAD}} = 4\alpha r_0^2 NZ \ln 183Z^{-1/3}, \quad (3.2)$$

здесь $\alpha = 1/137$, $r_0 = e^2/mc^2$ – классический радиус электрона. Величина L_{RAD} есть длина, на которой электрон теряет почти всю свою энергию на излучение и называется радиационной длиной.

Для дифференциального сечения (3.1) Бёте и Гайтлер нашли следующее выражение для функции распределения по потерям энергии

$$W_\omega(E_0, x)d\omega = \left(\ln \frac{E_0}{E_0 - \omega}\right)^{(4/3)Ax-1} \frac{d\omega}{E_0 \Gamma\left(\frac{4}{3}Ax\right)}, \quad (3.3)$$

где $x = ct$, Γ – гамма функция. Распределение (3.3) нормировано

$$\int_0^{E_0} W_\omega(E_0, t)dx = 1, \quad (3.4)$$

и при $x \rightarrow 0$ удовлетворяет начальному условию $W_\omega \rightarrow \delta(\omega)$. С другой стороны, как и должно быть, для малых толщин мишени вероятность (3.3) переходит в (3.1):

$$W_\omega(E_0, x)d\omega \rightarrow \frac{4}{3}A \frac{d\omega dx}{E \ln\left(\frac{E_0}{E_0 - \omega}\right)} = \nu_\omega(E_0)d\omega dx. \quad (3.5)$$

При выводе распределения (3.3) Бёте и Гайтлер не решали кинетических уравнений, а исходили из очевидного условия, которому должна, помимо условия (3.5), удовлетворять функция распределения для двух произвольных моментов времени, следующих друг за другом:

$$W_\omega(E_0, t_1 + t_2) = \int_0^\omega W_{\omega-u}(E_0 - u, t_1)W_u(E_0, t_2)du. \quad (3.6)$$

Это соотношение есть ни что иное, как определение Марковского процесса.

Заметим, что величина ω в (3.3) и (3.6) не есть энергия одного фотона, как в формулах (3.1), (3.5), а представляет собой полную потерю энергии на излучение, то есть ω в (3.1), (3.5) есть сумма энергий всех излучённых фотонов одним электроном $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots$.

Спектр интенсивности излучения связан с функцией распределения по потерям энергии соотношением $I_\omega(E_0, t) = \omega W_\omega(E_0, t)$ и определяет энергию излучения в заданном интервале $(\omega, \omega + d\omega)$. Потери энергии на излучения равны

$$\Delta E(t) = \int_0^{E_0} I_\omega(E_0, t)d\omega. \quad (3.7)$$

На рис.2 схематично иллюстрируется спектр интенсивности тормозного излучения. Сплошная кривая представляет спектр в мишени бесконечно малой толщины Δx , см. (3.1). Спектр приближённо можно аппроксимировать «ступенькой» с высотой $\sim (4/3)A$. В этом случае ω есть энергия одного излучаемого фотона. В мишени с конечной толщиной вероятность излучения двух и более фотонов отлична от нуля, а спектр интенсивности смещается за счёт этого в область более жёстких частот (штриховая линия на рис.2). По оси ординат на рис.2 отложена интенсивность излучения, делённая на толщину мишени.

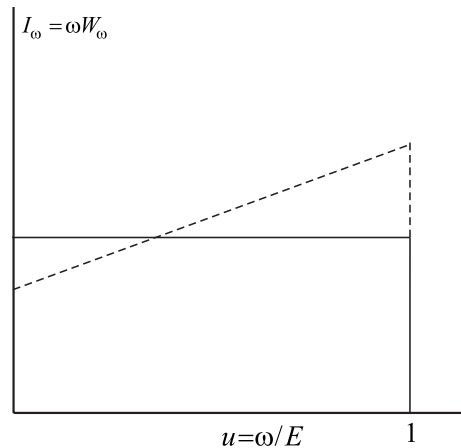


Рис. 2. Сплошная линия – спектр интенсивности Бёте-Гайтлера для тормозного излучения в мишени бесконечно малой толщины, штриховая линия – то же самое в мишени конечной толщины.

Каскадная теория электромагнитных ливней

В 1938 году вышла классическая работа Ландау и Румера [5] описывающая развитие электромагнитного каскада показанного на рис.1. В этой работе впервые вводятся уравнения каскадного типа. Пусть число частиц (электронов и позитронов) с энергиями в интервале $(E, E + dE)$ в электромагнитном ливне на глубине x равно $F(E, x)dE$, а число гамма квантов равно $G(E, x)dE$. Дифференциальную вероятность излучения фотона с энергией ω частицей с энергией E на длине dx обозначим как $\nu_\omega(E)d\omega dx$, а вероятность рождения пары фотоном с энергией ω обозначим $\mu_E(\omega)dE dx$, где E – энергия электрона. Полные вероятности излучения и рождения пар равны

$$\nu(E) = \int_0^E \nu_\omega(E)d\omega \quad \text{– вероятность излучения фотона электроном (позитроном),} \quad (3.8)$$

$$\mu(\omega) = \int_0^\omega \mu_E(\omega)dE \quad \text{– вероятность рождения пары фотоном.}$$

Глубина проникновения ливня в среду характеризуется длиной x , отсчитываемой от точки попадания первичной частицы в среду, в которой развивается ливень. Дифференциальные вероятности излучения и рождении пар задаются формулами Бёте и Гайтлера [4]

$$\nu_u(E) = A \frac{E^2 + (E - u)^2 - (2/3)E(E - u)}{uE^2}, \quad (3.9)$$

$$\mu_u(E) = A \frac{u^2 + (E - u)^2 + (2/3)u(E - u)}{E^3}, \quad (3.10)$$

где

$$A = \frac{1}{L_{RAD}} = 4\alpha r_0^2 N_e \bar{Z} \ln 183 \bar{Z}^{-1/3}. \quad (3.11)$$

В отличие от выражения (3.2) формула (3.11) учитывает, что среда может состоять из атомов различных типов. Тогда эффективный атомный номер вещества определится как

$$\bar{Z} = \sum_i n_i Z_i (Z_i + 1) / N_e, \quad (3.12)$$

где n_i — число ядер в 1 см^3 , имеющих заряд Z_i , N_e — полное число электронов в 1 см^3 .

Система каскадных уравнений Ландау-Румера для функций распределения числа частиц и фотонов имеет вид [5]:

$$\frac{\partial F(E)}{\partial x} = 2 \int_E^\infty G(u) \mu_E(u) du + \int_E^\infty F(u) \nu_{u-E}(u) du - \int_0^E F(E) \nu_{E-u}(E) du, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial G(E)}{\partial x} = \int_E^\infty F(u) \nu_E(u) du - \int_0^E G(E) \mu_u(E) du. \quad (3.14)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (3.13) определяет увеличение числа частиц за счёт рождения пар гамма квантами. Множитель 2 констатирует тот факт, что частицы рождаются парами. Второй член в правой части (3.13) связан с увеличением числа частиц в заданном интервале их энергий за счёт того, что частицы с БОЛЬШИМИ энергиями попадают в этот интервал потеряв часть своей энергии на излучение, а последний член в (3.13) показывает убыль частиц в заданном интервале их энергий за счёт потерь энергии на излучение. Число гамма квантов с заданной энергией может увеличиваться за счёт излучения фотонов с такими энергиями частицами. Этот процесс описывается первым слагаемым в правой части (3.14). Уменьшение числа гамма квантов связано с их исчезновением за счёт рождения пар (последний член в (3.14)).

Решение системы каскадных уравнений (3.13), (3.14) основано преобразовании степенного типа, что существенно опирается на степенной характер зависимости дифференциальных сечений от своих переменных в (3.9), (3.10) [5]. В данной работе нас интересует только вид каскадных уравнений для электромагнитного ливня.

Уравнение Ландау для ионизационных потерь энергии

Если быстрая частица с начальной энергией E_0 проходит слой вещества толщиной x , то благодаря ионизационным потерям, её энергия E на выходе будет меньше, т.е. потерянная энергия $\Delta = E_0 - E > 0$. Каскадный процесс последовательных взаимодействий налетающей частицы с атомами мишени, приводящих к ионизации последних, показан на рис.3. Столкновения с атомами мишени носят стохастический характер, так же как и величина теряемой в каждом взаимодействии энергии.

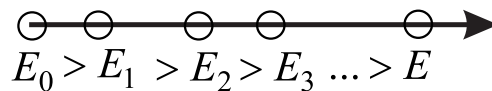


Рис. 3. Каскадный процесс ионизационных потерь энергии заряженной частицей с начальной энергией E_0 . Каждый акт ионизации атома мишени показан кружком.

Введём функцию распределения частиц по потерянными энергиям на заданной глубине $W(\Delta, x)$ (здесь мы придерживаемся обозначений Ландау [6]), она представляет собой вероятность того, что частица с заданной начальной энергией E_0 , проходя слой вещества x , потеряет долю энергии, лежащую между Δ и $\Delta + d\Delta$. Пусть $g(\epsilon, E)d\epsilon$ есть вероятность того, что частица с энергией

E потеряет энергию \mathcal{E} на единице длины пути. Далее, будем предполагать, что слой вещества достаточно невелик, так что ионизационные потери энергии много меньше полной энергии ионов и можно считать, что дифференциальное сечение g не зависит от энергии, т.е. $g(\mathcal{E}, E) \approx g(\mathcal{E}, E_0) \equiv g(\mathcal{E})$.

Каскадное кинетическое уравнение можно получить, если приравнять изменение функции распределения на длине dx «интегралу столкновений», который выражает собой разность между числом частиц, приобретающих заданную энергию E в результате потерь на ионизацию на пути dx , и числом частиц, покидающих данный интервал энергий. Кинетическое уравнение тогда примет вид

$$\frac{\partial W(\Delta, x)}{\partial x} = \int_0^\infty g(\mathcal{E}) [W(\Delta - \mathcal{E}) - W(\Delta)] d\mathcal{E}. \quad (3.15)$$

где дифференциальная вероятность потерять на единице длины пути энергию \mathcal{E} равна

$$g(\mathcal{E}) = \frac{\eta}{\beta^2 \mathcal{E}^2}, \quad \eta = \frac{2\pi N_A e^4 \rho \Sigma Z}{mc^2 \Sigma A}, \quad (3.16)$$

где v – скорость частицы, N_A – число Авогадро, ρ – плотность вещества, ΣZ – сумма атомных номеров в молекуле вещества, ΣA – сумма атомных весов. Т.е. $g(\mathcal{E}) \sim \mathcal{E}^{-2}$, так что полное сечение, проинтегрированное по \mathcal{E} расходится. Важным приближением, содержащимся в сравнительно простом уравнении (3.15), является малость энергетических потерь по сравнению с первоначальной энергией частицы $\Delta \ll E_0$. Это позволяет распространить пределы интегрирования в (3.15) до бесконечности. Уравнение (3.15) соответствует второму и третьему членам в правой части (3.13) при выполнении условия $\Delta \ll E_0$. Функция распределения в (3.15) нормирована

$$\int_0^\infty W(\Delta, x) d\Delta = 1. \quad (3.17)$$

Решение уравнения (3.15) с начальным условием $W(\Delta, x=0) = \delta(\Delta)$ имеет вид [6]

$$W(\Delta, x) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\left\{p\Delta - x \int_0^\infty g(\mathcal{E})(1 - e^{-p\mathcal{E}}) d\mathcal{E}\right\} \frac{dp}{2\pi i}. \quad (3.18)$$

Ландау показал, что решение (3.18) может быть представлено в виде некоторой функции $\varphi(\delta)$ стандартного вида, так что

$$W(\Delta, x) d\Delta = \varphi(s) ds, \quad (3.19)$$

где $s = (\Delta - \Delta_0)/\xi$, $\xi = \eta x / \beta^2$,

$$\Delta_0 = \frac{\eta}{\beta^2} \left(\ln \frac{3 \cdot 10^3 \eta}{Z^2 (1 - \beta^2)} + 1 - \beta^2 \right), \quad (3.20)$$

здесь η определяется в (3.16) и измеряется в электронвольтах.

Интересная особенность функции распределения частиц по потерям энергии в тонких мишенях (таких что $\Delta \ll E_0$) заключается в том, что эта функция задаётся некоторой универсальной кривой, не зависящей от типа вещества мишени и от её толщины (см. рис.4).

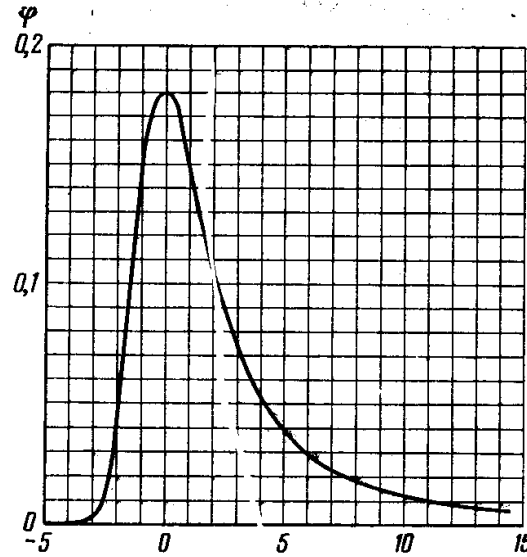


Рис. 4. Универсальная кривая Ландау для функции распределения по потерям энергии $\varphi(s)$ (3.19) [6].

4. Теоретико-вероятностный подход

Рассмотренные в предыдущем разделе три задачи могут быть решены в рамках другого метода, который мы проиллюстрируем на примерах тормозного излучения гамма квантов электронами и электромагнитного каскада.

Пусть к моменту времени t функция распределения по потерям энергии есть $W_\omega(E_0, t)$, где, как и выше, ω – суммарная энергия всех излучённых к моменту t фотонов. Представим это распределение в виде суммы парциальных вкладов

$$W_\omega(E_0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} W_\omega^{(k)}(E_0, t), \tag{4.1}$$

где $W_\omega^{(k)}(E_0, t)$ есть вероятность того, что за время $(0, t)$ излучится ровно k фотонов, причём суммарная их энергия равна ω :

$$\omega = \sum_{m=1}^k \omega_m. \tag{4.2}$$

Парциальные вероятности $W_\omega^{(k)}(E_0, t)$ вычисляются следующим образом. Величина $W_\omega^{(0)}$ есть вероятность того, что за время $t - t_0$ не произойдёт ни одного акта излучения (см. на рис.5, А):

$$W_\omega^{(0)}(E_0, t) = \delta(\omega) e^{-\nu(E_0)(t-t_0)}, \tag{4.3}$$

что соответствует выражению (2.2). Начало отсчёта времени соответствует здесь моменту $t = t_0$. Здесь и ниже предполагается, что в общем случае полное сечение излучения зависит от энергии электрона.

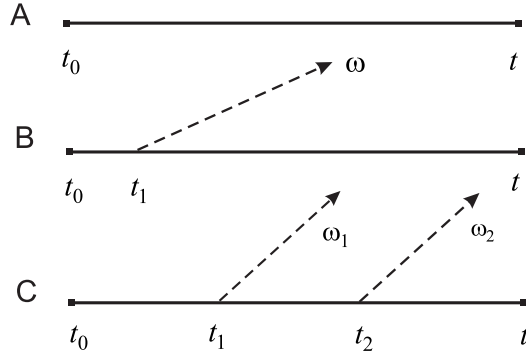


Рис. 5. Парциальные вероятности излучения: А – излучения нет; В – излучается 1 фотон с энергией ω ; С – излучается 2 фотона с энергиями ω_1 и ω_2 .

Вероятность процесса с излучением 1 фотона в момент времени t_1 равна произведению трёх вероятностей (см. рис.5, В): вероятности того, что в течение времени $t_1 - t_0$ излучения не произойдёт, вероятности излучить фотон в момент времени t_1 электроном с энергией E_0 (эта вероятность равна $\nu_\omega(E_0)d\omega dt_1$) и, наконец, вероятности того, что за оставшееся время $t - t_1$ излучения не произойдёт. Результат имеет вид

$$dW_\omega^{(1)} = e^{-\nu(E_0)(t_1-t_0)} \nu_\omega(E_0) d\omega dt_1 e^{-\nu(E_0-\omega)(t-t_1)}. \quad (4.4)$$

Аналогично, вероятность процесса с излучением 2 фотонов равна (см. рис 5, С):

$$dW_\omega^{(2)} = e^{-\nu(E_0)(t_1-t_0)} \nu_{\omega_1}(E_0) d\omega_1 dt_1 e^{-\nu(E_0-\omega_1)(t_2-t_1)} \times \\ \times \nu_{\omega_2}(E_0 - \omega_1) d\omega_2 dt_2 e^{-\nu(E_0-\omega_1-\omega_2)(t-t_2)}, \quad (4.5)$$

где ω в левой части этого соотношения есть $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Не представляет труда записать выражения для произвольных k . Можно показать, что при таком подходе функция распределения (4.1) автоматически нормирована на единицу. Если полные вероятности излучения не зависят от энергии (как это имеет место для тормозного излучения Бёте-Гайтлера, рассмотренного выше), то все экспоненты в (4.3)–(4.5) содержат один и тот же множитель ν . Тогда интегрирование по времени и по частотам даёт для парциальных вероятностей распределение Пуассона (2.6) с $\xi = \nu t$.

В принципе решение (4.1) и изложенный в этом разделе подход можно применить к ионизационным потерям энергии, так как можно показать, что решение кинетического уравнения Ландау (3.15) можно представить в виде (4.1) с парциальными вероятностями (4.3)–(4.5). На практике, однако, решение (4.1) полезно только в тех случаях, когда число актов взаимодействия (т.е. k в (4.1)) не превышает 10–20, что как раз имеет место для тормозного излучения жёстких гамма квантов на атомах вещества.

Рассмотрим теперь электромагнитный каскад (см. рис.1) в рамках теоретико-вероятностного подхода. В этом случае полную вероятность процесса можно выразить в виде вклада парциальных вероятностей. Несколько примеров возможных парциальных процессов, вносящих вклад в электромагнитный каскад, показаны на рис. 6.

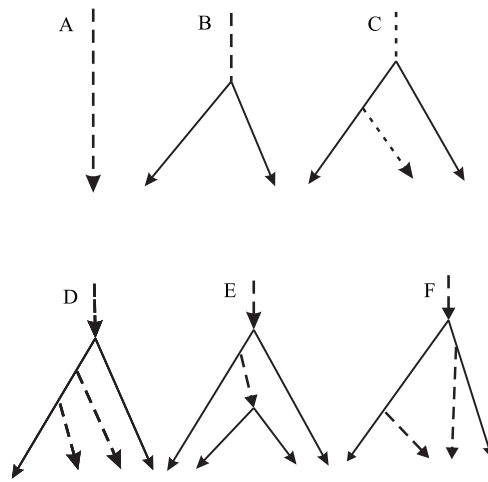


Рис.6. Несколько первых парциальных вкладов в электромагнитный каскад, порождаемый первичным гамма квантом. А – взаимодействий нет; В – одно взаимодействие; С – два взаимодействия; D, E и F – три взаимодействия.

Рис.6А соответствует отсутствию взаимодействий. Рисунки 6В и 6С изображают процессы с одним и двумя взаимодействиями, а остальные три рисунка содержат по 3 взаимодействия. Следуя методу, приводящему к выражениям (4.3) – (4.5), можно вычислить вероятность любой конфигурации электромагнитного ливня.

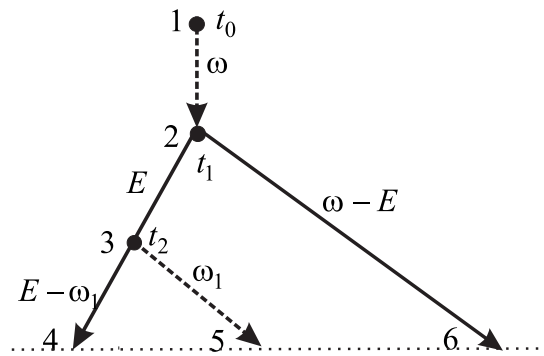


Рис.7. К расчёту парциальной вероятности процесса рождения пары фотоном с энергией ω с последующим излучением гамма кванта с энергией ω_1 .

В качестве примера запишем выражение для парциальной вероятности процесса с двумя взаимодействиями, изображённый на рис. 6С. В момент времени t_1 первоначальный фотон с энергией ω рождает пару, причём в момент времени t_2 электрон (или позитрон) излучает фотон с энергией ω_1 . В результате к моменту времени t получается электрон с энергией $E - \omega_1$, позитрон с энергией $\omega - E$ и фотон с энергией ω_1 (см. рис. 7). Дифференциальная вероятность такого процесса равна

$$dW = e^{-\mu(\omega)(t_1-t_0)} \mu_E(\omega) dE dt_1 e^{-\nu(\omega-E)(t-t_1)} e^{-\nu(E)(t_2-t_1)} \times \nu_{\omega_1}(E) d\omega_1 dt_2 e^{-\nu(E-\omega_1)(t-t_2)} e^{-\mu(\omega_1)(t-t_2)}. \quad (4.6)$$

Строго говоря для описания электромагнитного ливня следует учесть бесконечное число возможных конфигураций ливня типа тех, что показаны на рис. 6. Каждая конфигурация характеризуется вероятностью. На практике следует учесть только конфигурации с неисчезающей вероятностью. Какие

именно конфигурации входят в их число зависит от толщины и типа мишени. Тем не менее, и этих – неисчезающих конфигураций может быть очень много, причём каждая из них описывается, хоть и простым, но громоздким выражением типа (4.6), состоящим из совокупности экспонент и множителей типа $V_{\omega}d\omega dt$ и $\mu_E dEdt$. Тем не менее, если элементарные сечения V и μ не зависят от времени, как это чаще всего имеет место, то интегрирование по времени производится в явном виде. Дополнительное упрощение возникает от того, что в практически важных случаях полные сечения излучения V и рождения пар μ можно считать не зависящими от энергии, соответственно, частиц и гамма квантов. Всё это делает полезным теоретико-вероятностный подход для не слишком толстых мишеней, когда число частиц и фотонов не превышает 20-30. При этом, такой подход имеет ряд преимуществ по сравнению с подходом, основанным на каскадных уравнениях типа (3.13), (3.14). Преимуществом является то, что теоретико-вероятностный подход даёт максимально подробную информацию о каскадном процессе. Например, если в эксперименте мы видим, что имеется m частиц и k фотонов, то мы можем вычислить относительные вероятности всех конфигураций, приводящих к такому результату. Расчёты такого типа используются, например, тогда, когда надо определить число фотонов, излучённых одним электроном и летящих поэтому в непосредственной близости друг от друга. Поместив на пути такого пучка фотонов не очень толстую мишень (толщиной $\approx 0.3L_{RAD}$) и измерив число получившихся пар можно с помощью вероятностного анализа, основанного на формулах типа (4.6), вычислить первоначальное число фотонов (точнее, можно указать с какой вероятностью первоначальный пучок содержал в себе ровно k фотонов). Актуальность теоретико-вероятностного метода возросла с появлением быстродействующих персональных компьютеров и, особенно, с появлением аналитических языков программирования.

Как было отмечено выше, для процессов с независимым от энергии полным сечением, выражения типа (4.3)-(4.5) приводят к распределению Пуассона по числу актов взаимодействия (в данном случае – излучения). С другой стороны, результирующая функция распределения (4.1) удовлетворяет каскадному уравнению (3.15) при $\Delta \ll E_0$. Более того, решение (4.1) удовлетворяет, как будет показано ниже, более широкому классу каскадных уравнений, не требующих выполнения условия $\Delta \ll E_0$. Таким образом, теоретико-вероятностный подход вскрывает не очевидную сразу пуассоновскую природу физических явлений, описываемых каскадными уравнениями (3.15) и (3.13), (3.14).

5. Каскадное уравнение для многофотонного процесса

Каскадный процесс последовательного излучения электроном множества фотонов определяется заданием функции $W_{\omega}(E_0, t)d\omega$, которая даёт плотность вероятности того, что потери энергии электрона с начальной энергией E_0 окажутся в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$ после прохождения пути $z = vt$ (в рассматриваемом случае скорость электрона можно считать совпадающей со скоростью света $v \approx c$). Функция распределения $W_{\omega}(E_0, t)$ нормирована (3.4) и удовлетворяет начальному условию $W_{\omega}(E_0, 0) = \delta(\omega)$. В экспериментах непосредственно измеряется интенсивность излучения (см., например, [8-11]):

$$I_{\omega}(E_0, t) = \omega W_{\omega}(E_0, t). \quad (5.1)$$

Полные потери энергии на излучение можно вычислить по формуле (3.7).

Эволюция функции распределения электронов, излучающих гамма кванты, по потерям энергии со временем, $W_{\omega}(E_0, t)$, определяется уравнением каскадного типа [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\omega}(E_0, t)}{\partial t} = & \int_0^{\omega} W_{\omega-u}(E_0, t) \nu_u(E_0 - \omega + u, t) du \\ & - \int_0^{E_0 - \omega} W_{\omega}(E_0, t) \nu_u(E_0 - \omega, t) du, \end{aligned} \quad (5.2)$$

при этом рассматривается общий случай зависящего от времени дифференциального сечения $\nu_\omega(E, t)$. Уравнение (5.2) является обобщением уравнения Ландау (3.15), так как в (5.2) не содержится ограничений, связанных с малостью потерь энергии, а также учитывается зависимость элементарного сечения излучения ν от энергии электронов и времени.

Решение уравнения (5.2) можно выразить через вклады от отдельных актов излучения по аналогии с (4.1). Предположим, что полное сечение излучения имеет конечное значение:

$$\nu(E, t) = \int_0^E \nu_\omega(E, t) d\omega. \quad (5.3)$$

Пусть $W_\omega^{(k)}(E_0, t) d\omega$ есть вероятность того, что суммарная энергия k излучённых фотонов лежит в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$. Т.е. ω здесь есть сумма, $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_k$. Распределение по потерям энергии будет тогда определяться суммой парциальных вкладов (4.1).

Величины $W_\omega^{(k)}(E_0, t)$ в (4.1) найдём из следующих соображений. Вероятность того, что в пределах временного интервала $(0, t + dt)$ электрон излучит ровно k фотонов есть сумма двух слагаемых (см. рис.8). Первое слагаемое отвечает процессу, когда за время $(0, t)$ происходит ровно k актов излучения, тогда как за бесконечно малое время dt не происходит ни одного акта излучения (рис.8А). Второе слагаемое соответствует случаю, когда излучается $k - 1$ фотон за время $(0, t)$ и один фотон за время dt (рис.8В):

$$W_\omega^{(k)}(t + dt) = W_\omega^{(k)}(t) [1 - \nu(E_0 - \omega, t) dt] + \int_0^\omega W_{\omega-u}^{(k-1)}(t) \nu_u(E_0 - \omega + u, t) du dt. \quad (5.4)$$

где $\nu(E, t)$ есть полное сечение излучения за единицу времени определяемое выражением (5.3).

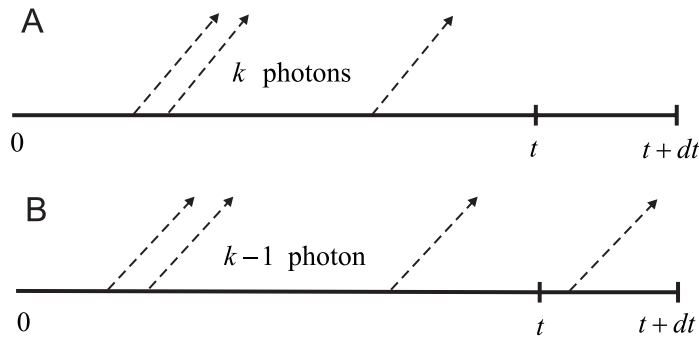


Рис. 8. К расчёту парциальных вероятностей потерь энергии на излучение (5.4). Первое слагаемое в (5.4) соответствует процессу А, а второе (с интегралом) — процессу В.

Решая уравнение (5.4) получаем рекуррентное соотношение для парциальных вероятностей в (4.1) [7]:

$$W_\omega^{(k)}(E_0, t) = \exp \left[- \int_0^t \nu(E_0 - \omega, \tau) d\tau \right] \times \int_0^t dt \exp \left[\int_0^t \nu(E_0 - \omega, \tau') d\tau' \right] \times \int_0^\omega W_{\omega-u}^{(k-1)}(E_0, \tau) \nu_u(E_0 - \omega + u, \tau) du, \quad (5.5)$$

где

$$W_{\omega}^{(0)}(E_0, t) = \delta(\omega) \exp \left[- \int_0^t v(E_0 - \omega, \tau) d\tau \right]. \quad (5.6)$$

Выражения (4.1), (5.5), (5.6) определяют решение кинетического каскадного уравнения общего вида (5.2).

Поскольку полное сечение излучения в приведённых выражениях зависит от времени и энергии $v = v(E, t)$, то статистика индивидуальных актов излучения в (4.1), (5.5) не выражается уже простым соотношением типа (2.6). В частности, в случае, когда полное сечение не зависит от E , т.е. $v = v(t)$, вероятность $P_k(t)$ получить ровно k фотонов за время $(0, t)$ определяется выражением

$$P_k(t) = \exp \left[- \int_0^t v(\tau) d\tau \right] \int_0^t d\tau \exp \left[\int_0^{\tau} v(\tau') d\tau' \right] v(\tau) P_{k-1}(\tau), \quad (5.7)$$

где

$$P_0(t) = \exp \left[- \int_0^t v(\tau) d\tau \right]. \quad (5.8)$$

Формулы (5.7)–(5.8) определяют обобщённый пуассоновский процесс. Если сечение излучения есть константа $v = v_0$, то выражение (5.7) переходит в распределение Пуассона (2.6) с $\xi = v_0 t$. Примером зависящего от времени дифференциального сечения является движение электрона в поле атомных цепочек и плоскостей кристалла [1].

Результат (4.1), (5.5) существенно упрощается в случае не зависящего от времени дифференциального сечения излучения $v_{\omega}(E)$. Будем считать также, что полное сечение v_0 не зависит от энергии электрона E . Кинетическое уравнение (5.2) примет тогда вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\omega}(E_0, t)}{\partial t} &= \int_0^{\omega} W_{\omega-u}(E_0, t) v_u(E_0 - \omega + u) du \\ &- \int_0^{E_0 - \omega} W_{\omega}(E_0, t) v_u(E_0 - \omega) du. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Пусть $g_{\omega}^{(1)}(E)$ – дифференциальная плотность вероятности того, что энергия уже излучённого фотона равна ω :

$$g_{\omega}^{(1)}(E) = v_{\omega}(E) / v_0. \quad (5.10)$$

Введём вероятности $g_{\omega}^{(k)}(E_0) d\omega$, что суммарная энергия k излучённых фотонов электроном с начальной энергией E_0 находится в интервале между ω и $\omega + d\omega$. Эти величины нормированы на единицу

$$\int_0^E g_{\omega}^{(k)}(E) d\omega = 1, \quad (5.11)$$

и удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$g_{\omega}^{(k)}(E_0) = \int_0^{\omega} g_{\omega-u}^{(k-m)}(E_0 - u) g_u^{(m)}(E_0) du, \quad (5.12)$$

$$m < k$$

Вероятность $P_k(t)$ излучить ровно k фотонов за временной интервал $[0, t]$ задаётся теперь распределением Пуассона (2.6) с $\xi_0 = v_0 t$. Функции $W_{\omega}^{(k)}(E_0, t)$, определённые в (5.5), сводятся теперь просто к произведениям вида $P_k(t) g_{\omega}^{(k)}(E_0)$. Для распределения по энергетическим потерям имеем:

$$W_{\omega}(E_0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) g_{\omega}^{(k)}(E_0) \quad (5.13)$$

Выражение (5.13), представляющее решение уравнения (5.9) с независимым от времени дифференциальным сечением и независимым от энергии полным сечением, удовлетворяет условию (3.6).

Если полное сечение излучения зависит от энергии электрона, но не зависит от времени, то формулы (4.1), (5.5) дают решение более общего, чем (5.13) вида, которое мы здесь приводить не будем.

6. Излучение в ориентированных кристаллах

Траектория релятивистского электрона, проходящего через кристалл под некоторым достаточно малым углом $\theta \sim \theta_L$ относительно основных кристаллографических направлений, определяется скоррелированным действием на него атомов, образующих данное направление [1, 12], здесь $\theta_L = (4Ze^2/dE)^{1/2}$ - критический угол Линдхарда, Z - атомный номер вещества, d - расстояние между соседними атомами вдоль данного направления. Такое скоррелированное действие атомов цепочки характеризуется непрерывным потенциалом $U(r)$ [12], действующим на электрон и зависящим только от расстояния до цепочки. Действующая на электрон сила $F = |\nabla U(r)|$ имеет порядок $F \sim Ze^2/(da_F) \sim 10^2 - 10^3$ эВ/Е, и приводит к интенсивному излучению (эффект Кумахова) [13, 14] (здесь a_F - параметр экранирования Томаса – Ферми). При энергиях электронов выше 50 – 100 ГэВ можно считать, что действующее на электрон поле не меняется на длине формирования излучения и характеристики излучения можно описывать в приближении постоянного поля (ППП) [15]. Соответствующие сечения сводятся при этом к известным формулам синхротронного излучения с учётом квантовых эффектов отдачи при излучении и спина [15]. С точки зрения каскадных уравнений типа (5.9) важно, что сечения излучения в ППП определяются только локальными характеристиками поля (именно силой, действующей в данной точке) и, следовательно, могут непосредственно использоваться в качестве дифференциальных сечений $\nu_{\omega}(E)$, фигурирующих в (5.2), (5.9). Более последовательная теория, учитывающая неоднородность поля в пределах длины формирования излучения и в то же самое время, носящая локальный характер, развита в [16]. Мы, тем не менее, ограничимся ППП, так как этого достаточно для анализа характерных свойств каскадных процессов множественного излучения фотонов, сопровождающих прохождение электронов с энергиями выше 100 ГэВ через ориентированные кристаллы.

Дифференциальное сечение излучения фотона с энергией ω электроном с энергией E за единицу времени определяется в приближении постоянного поля квантовой синхротронной формулой [15]:

$$\nu_{\omega}(E) = \frac{\alpha}{\pi\sqrt{3}\hbar\gamma^2} \left[2K_{2/3}(\xi) - \int_{\xi}^{\infty} K_{1/3}(\eta) d\eta + \frac{u^2}{1-u} K_{2/3}(\xi) \right] = \quad (6.1)$$

$$= \frac{\alpha}{\pi\hbar\gamma^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{9+36x^2+16x^4}{9+12x^2} + \frac{u^2}{1-u} \left(1 + \frac{2x^2}{3} \right) \right] \exp R \frac{dx}{Y(x)}, \quad (6.2)$$

где аргумент экспоненты

$$R(x) = -\xi \left(1 + \frac{4x^2}{3} \right) Y(x). \quad (6.3)$$

здесь $\alpha = 1/137$, $u = \omega/E$, $\gamma = E/mc^2$ - лоренцфактор, $\xi = \frac{2}{3} \frac{u}{1-u} \frac{1}{\chi}$, $\chi = \hbar F \gamma / m^2 c^3$ - лоренцинвариантный параметр поля (1.2), F - сила, действующая на электрон, m - масса покоя электрона. Функция $Y(x) = (1+x^2/3)^{1/2}$ представляет собой линию наискорейшего спуска фазы

для функций Макдональда $K_{1/3}(\xi)$ и $K_{2/3}(\xi)$ (см. [17]). Наше представление (6.2) гораздо удобнее для конкретных приложений стандартной формулы (6.1), так как оно не содержит специальных функций и представляет собой быстросходящийся интеграл, где аргумент ξ входит только в экспоненциальный фактор. Формула (6.2) получена методом мнимого времени [7]. Формулы (4.1) – (4.3) переходят в классические формулы для синхротронного излучения при малых значениях параметра поля $\chi < 0.1$.

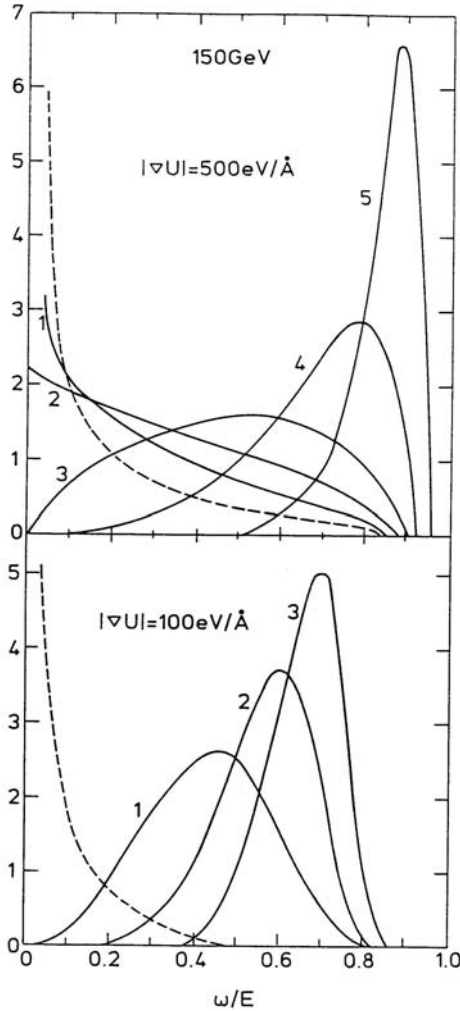


Рис.9. Нормированные на единицу однофотонные вероятности излучения $g_{\omega}^{(1)}$ (5.10) рассчитанные в ППП (6.1), (6.2) для различных значений параметра поля $\chi = 0.05$ (1), 0.5 (2), 1.45 (3), 3 (4), 9 (5), 45 (6), 208 (7).

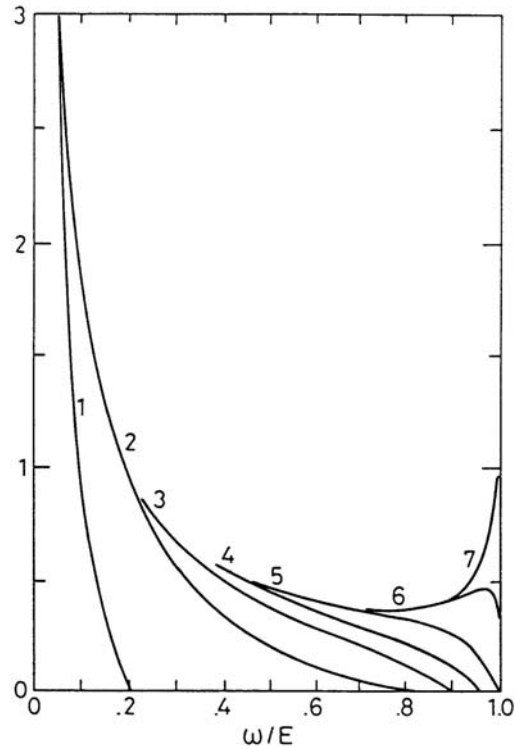


Рис.10. Парциальные вероятности $g_{\omega}^{(k)}$ (5.12) для электронов с энергией 150 ГэВ в ППП для $F = 500$ эВ/Э (а-верхний рис.), 100 (б-нижний рис.) эВ/Э. Начальные распределения показаны штриховыми кривыми. а – $k = 2$ (1), 3 (2), 5 (3), 10 (4), 20 (5); б – $k = 10$ (1), 20 (2), 30 (3).

Нормированные на единицу однофотонные вероятности излучения (спектры) (5.10), рассчитанные в ППП (6.1), (6.2) для различных значений параметра поля χ , показаны на рис. 9. При больших значениях $\chi > 40 - 50$ в спектре фотонов появляется максимум при $\omega/E \sim \chi/(1 + \chi) \sim 1$. Появление максимума связано с увеличением вклада спинового слагаемого в спектр при увеличении χ . Вклад спина в излучение определяется слагаемыми с $u^2/(1-u)$ в выражениях (6.1)–(6.2). При

$E \sim 150 - 300$ ГэВ в различных кристаллах $\chi \approx 1 - 10$. Представляет интерес средняя энергия излучённого фотона $\langle \omega \rangle$, т.е. величина ω , усреднённая по однофотонным распределениям $g_{\omega}^{(1)}$ (5.10). При $\chi \approx 1 - 2$ эта величина равна $\langle \omega \rangle \approx 0.1 - 0.12$ и стремится к пределу $\langle \omega \rangle \rightarrow 0.25$ при $\chi \rightarrow \infty$.

Парциальные вероятности $g_{\omega}^{(k)}$ (5.12) для электронов с энергией 150 ГэВ при двух различных значениях силы показаны на рис. 10. Начальные распределения $g_{\omega}^{(1)}$, соответствующие ППП (6.1)–(6.3), показаны штриховыми кривыми. Численный метод расчёта величин $g_{\omega}^{(k)}$ для произвольного начального распределения приводится в работе [7]. По оси абсцисс на рис.10 отложена суммарная энергия k излучённых фотонов. Рисунок 10 иллюстрирует сильную зависимость формы k – фотонного распределения вероятностей $g_{\omega}^{(k)}$ от начального распределения при одном и том же значении k .

7. Анализ экспериментальных результатов

Применим полученные результаты к излучению электронов с энергиями в сотни ГэВ при их движении под малыми углами $\theta \sim \theta_L$ к атомной цепочке кристалла. Регулярный характер движения в непрерывном потенциале $U(r)$ (r – расстояние до атомной цепочки) будет возмущаться некогерентным многократным рассеянием на отдельных атомах кристалла, что приводит к стохастическому увеличению поперечной энергии электрона \mathcal{E} .

В наших расчётах мы пренебрежём многократным рассеянием, как и конкурирующим эффектом уменьшения поперечной энергии из-за излучения фотонов (демпинг поперечной энергии). Тогда движение электрона в аксиально-симметричном потенциале $U(r)$ будет характеризоваться двумя интегралами движения – поперечной энергией \mathcal{E} и угловым моментом электрона относительно атомной цепочки μ , а картина аксиального каналирования будет выглядеть следующим образом. Попадая в кристалл под углом θ_{in} к атомной цепочке на расстоянии r_{in} от неё, электрон приобретает поперечную энергию

$$\mathcal{E} = \frac{E\theta_{in}}{2} + U(r_{in}), \quad (7.1)$$

и угловой момент

$$\mu = \frac{E}{c} \theta_{in} r_{in} \cos \varphi_{in}, \quad (7.2)$$

где φ_{in} азимутальный угол влёта относительно цепочки. Далее электрон движется по траектории с постоянными \mathcal{E} и μ и излучает фотоны, спектр которых можно рассчитать по формулам (5.10)–(5.13). Результирующий спектр получится усреднением по точкам влёта r_{in} и углам влёта θ_{in} , что эквивалентно усреднению по функции распределения электронов по поперечным энергиям и угловым моментам в кристалле. Таким образом учитываются начальные условия эксперимента (угловая расходимость пучка электронов на входе и т.д.).

Для расчёта по формулам (5.10)–(5.13) требуется задать начальную однофотонную функцию распределения $g_{\omega}^{(1)}$. В ППП эта величина будет зависеть в каждый момент времени от текущего расстояния до атомной цепочки r . Поэтому в качестве однофотонной функции в формуле (5.13) следует брать распределение $g_{\omega}^{(1)}$, вычисленное в ППП (6.1)–(6.3) и усреднённое по равновесной функции распределения электронов с заданными \mathcal{E} и μ по поперечной координате r . Для электронов, попавших в состояние с финитным поперечным движением (т.е. с $\mathcal{E} < 0$) равновесное распределение по поперечной координате имеет вид

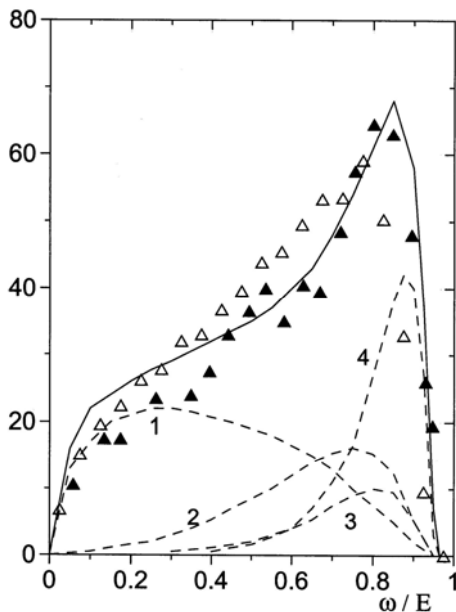
$$dw(\varepsilon, \mu, r) = \frac{dr}{T(\varepsilon, \mu)} \left(\frac{2m\gamma}{\varepsilon - U(r) - \mu^2 / 2m\gamma r^2} \right)^{1/2}, \quad (7.3)$$

где $T(\varepsilon, \mu)$ – период поперечных радиальных колебаний электрона в канале, $r_{\min} < r < r_{\max}$, величины r_{\min} и r_{\max} определяются из условия равенства нулю знаменателя подкоренного выражения в (7.3).

Квазиканализированные электроны с инфинитным поперечным движением ($\varepsilon > 0$) распределены равномерно в поперечной плоскости. Поскольку при этом доступная электронам поперечная область не зависит от ε (и равна поперечной площади, приходящейся на одну цепочку $S_0 = 1/Nd$, N – число атомов кристалла в единице объёма), то в ППП сечение излучения квазиканализированных электронов не будет зависеть от их поперечной энергии. Для канализированных электронов с $\varepsilon < 0$ сечения излучения будут сильно зависеть от поперечной энергии, из-за того что доступная электронам поперечная область $S(\varepsilon)$ сильно зависит от ε и электроны с большими по модулю поперечными энергиями излучают сильнее, так как они движутся на меньших расстояниях от атомной цепочки.

Непрерывный потенциал атомной цепочки $U(r)$ рассчитывался нами на основе атомного потенциала Дойля и Тёрнера с усреднением по тепловым колебаниям атомов кристалла. При этом считалось, что в области $r_1 < r < r_0$ потенциал равен нулю $U(r) = 0$, r_1 – половина кратчайшего расстояния между атомными цепочками вдоль заданного направления, $r_0 = (\pi Nd)^{-1/2}$ – радиус канала, т.е. максимальная доля электронов, которая может быть захвачена в канал, равна $N_{ch} = (r_1 / r_0)^2$ (при $\theta_{in} = 0$), что, например, для кристалла германия $\langle 110 \rangle$ составляет около 30% пучка.

Результаты расчёта спектра интенсивности излучения (5.1) показаны на рисунках 11, 12 и 13, где приводятся результаты для электронов с энергией 150 ГэВ, падающих под углами в интервалах $[0-7]$ (рис.11 и 13) и $[15-21]$ (рис.12) мкрад относительно направления $\langle 110 \rangle$ кристаллах германия с толщиной 200 мкм (рис.7 и 8) и 400 мкм (рис.13) (в данном примере $\theta_L = 55$ мкрад). Экспериментальные результаты взяты из работы [8]. Спектры показаны в единицах интенсивности для аморфной среды: Ez / L_{rad} , где z – толщина кристалла, L_{rad} – радиационная длина (для германия $L_{rad} = 2.36$ см). Таким образом, по оси ординат на рис. 11, 12, 13 показано превышение интенсивности излучения в ориентированном кристалле над аморфной мишенью с той же толщиной.



Сплошная кривая на рис. 11 соответствует расчёту по каскадной теории согласно (5.1), (5.13). Теоретические значения на рис. 11, 12 и 13 вычислялись в отдельных точках, которые соединены прямыми линиями. Видно, что для условий, представленных на рисунках 11 и 12 развиваемая теория с высокой степенью точности воспроизводит экспериментальные данные.

Рис. 11. Спектр интенсивности излучения электронов с энергией 150 ГэВ в кристалле германия толщиной 200 при углах влёта $[0-7]$ мкрад относительно оси $\langle 110 \rangle$, \blacktriangle – эксперимент [8], \triangle – численное моделирование, сплошные линии – расчёт по каскадной теории, штриховые линии – вклады электронов с различными поперечными энергиями (см. текст).

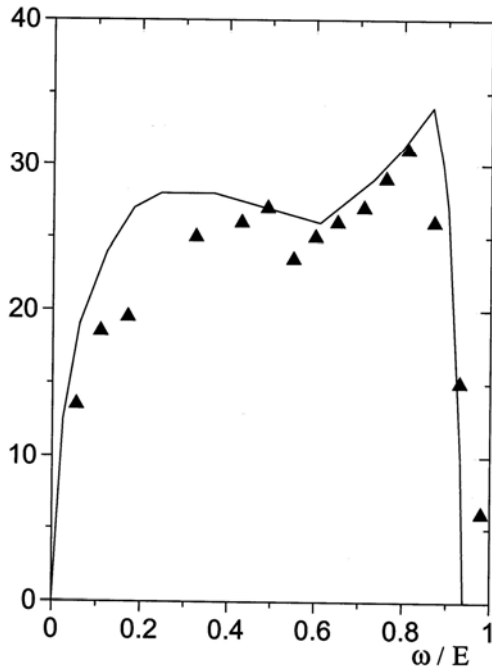


Рис. 12. То же, что и на рис. 11, но для углов влёта [15-21] мкрад. Чёрные символы — эксперимент [8], белые символы — численное моделирование, сплошная линия — расчёт по каскадной теории.

Доля электронов, захваченных в режим каналирования в условиях, показанных на рис. 11 равна $N_{ch} = 0.25$ (углы влёта [0–7] мкрад). Штриховые линии показывают расчётные вклады в спектр излучения от электронов с различными поперечными энергиями: 1 — $\varepsilon > 0$; 2 — $\varepsilon \in [-10, 0]$ эВ, (0.113); 3 — $\varepsilon \in [-20, -10]$ эВ, (0.044); 4 — $\varepsilon \in [-U_m, -20]$ эВ, (0.094). В круглых скобках показана доля электронов с соответствующими поперечными энергиями. Глубина потенциальной ямы в данном случае $U_m = 202$ эВ (температура кристалла 293 К, средняя амплитуда тепловых колебаний бралась равной $u_{\perp} = 0.12 E$). Из рис. 7 следует, что основной вклад в экспериментально наблюдаемый максимум при $\omega \approx 0.8 E$ вносит относительно небольшое число электронов, находящихся в глубоко связанных состояниях поперечного движения (в нашем примере число таких электронов не превышает 10%). Оказывается при этом, что основной вклад в максимум вносят парциальные функции $g_{\omega}^{(k)}$ с $k \sim 10$. Результаты численного моделирования представлены на рис.11 светлыми символами. При этом учитывалось многократное некогерентное рассеяние налетающих электронов на отдельных атомах кристалла, а также демпинг поперечной энергии из-за излучения: $\delta\varepsilon = -(\omega/E)[\varepsilon - U(r)]$. Метод численного моделирования описан в работе [18]. В отличие от [18], однако, в данном случае отдельно моделировалась точка, в которой происходит акт излучения (см. также [10]).

Рис. 12. То же, что и на рис. 11, но для углов влёта [15-21] мкрад. Чёрные символы — эксперимент [8], белые символы — численное моделирование, сплошная линия — расчёт по каскадной теории.

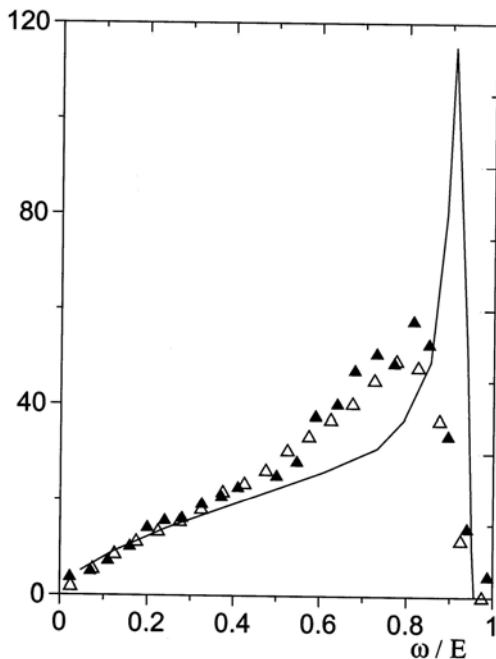


Рис. 13. То же, что и на рис.11, но для кристалла с толщиной 400 мкм. Чёрные символы — эксперимент [8], сплошная линия — расчёт по каскадной теории.

Рисунки 11, 12 и 13 иллюстрируют сильную ориентационную зависимость спектральных характеристик излучения (доля электронов в канале в условиях рис.12 составляет 0.09), которая хорошо объясняется в рамках каскадной теории. Заметим, что развиваемая теория не содержит подгоночных параметров и даёт правильные количественные результаты.

Соответствие каскадной теории и эксперимента, однако, ухудшается в более толстых кристаллах (см. рис.13). Отсутствие учёта многократного рассеяния в каскадной теории приводит к тому, что она предсказывает для толстых кристаллов ненаблюдаемый острый пик. Тем не менее, и в этом случае теория даёт согласующиеся с экспериментом значения интенсивности в мягкой части спектра и верно предсказывает полные потери на излучение. Полные потери энергии на излучение пропорциональны площади под кривыми на рис.11-13. Для условий,

представленных рисунках 11 и 13 полные потери энергии составляют, соответственно, 27% и 44% от первоначальной энергии электронов, что близко к экспериментальным результатам.

8. Заключение

Стохастический характер физических процессов, связанных с прохождением частиц через вещество, требует применения особых методов расчёта для адекватной интерпретации наблюдаемых в экспериментах эффектов. Несмотря на кажущееся сильное различие между каскадными процессами излучения гамма квантов, электромагнитными ливнями и ионизационными потерями энергии, все эти явления содержат в себе общую основу, которая заключается в Марковском, пуассоновском характере таких процессов. Во всех случаях имеется два существенно различных аналитических подхода — теоретико-вероятностный метод и метод каскадных кинетических уравнений. Последний метод удобен в случае, когда результирующий эффект обусловлен большим числом элементарных взаимодействий. Представляется возможным проводить расчёты с реалистичными выражениями для элементарных сечений и учитывать особенности конкретных экспериментов.

Процессы, приводящие к разбросу потерь энергии, можно разделить на два типа: процессы, при которых потери энергии в одном акте взаимодействия относительно малы, и окончательное распределение определяется большим количеством взаимодействий, превышающим $\sim 10^2 - 10^3$ (ионизационные потери); и процессы, когда потери энергии в одном акте взаимодействия соизмеримы с энергией частицы, в то время как результирующее распределение определяется вкладом относительно небольшого числа актов взаимодействия $< 10 - 20$ (тормозное излучение, излучение электронов с энергиями свыше сотни ГэВ в ориентированных кристаллах). В последнем случае адекватное описание разброса энергетических потерь, соответствующего конкретным экспериментальным условиям, можно получить как сумму парциальных вкладов вероятностей излучения различного числа фотонов (4.1), (5.5). Выражения для функции распределения по потерям энергии имеют особенно простой вид, когда полное сечение взаимодействия не зависит от времени и от энергии, так что имеет место пуассоновский процесс.

Литература

1. *Uggerhoj U.I.* The interaction of relativistic particles with strong crystalline fields // *Reviews of Mod. Phys.* 2005. V. 77. No. 4. P. 1131-1171.
2. *Ledingham K.W.D., Spencer I., McCanny T. et al.* Photonuclear Physics when a Multiterawatt Laser Pulse Interacts with Solid Targets. *Phys. Rev. Lett.* v. 84, 899-902 (2000).
3. *Bula C., McDonald K.T., Prebys E.J., et.al.* Observation of Nonlinear Effects in Compton Scattering // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V.76. No.17. P.3116-9.
4. *Bethe H. and Heitler W.* On the stopping of fast particles and on the creation of positive electrons // *Proc. Phys. Soc. London.* 1934. V. 146. 83-112.
5. *Ландау Л.Д., Румер Ю.Б.* Каскадная теория электромагнитных ливней. *Л.Д.Ландау. Сборник трудов.* Т.1. Наука. Москва. С.302-316. Перевод с *Proc. Roy. Soc.*, A166, 213 (1938).
6. *Landau L.D.* On ionization energy losses of swift particles // *J. Phys. USSR.* 1944. V.8. P. 201. См. перевод: *Ландау Л.Д.* О потерях энергии быстрыми частицами на ионизацию. *Собрание трудов.* Т.1. Наука, Москва 1969. Стр. 482-490.
7. *Хоконов М.Х.* Каскадные процессы потерь энергии на излучение жёстких фотонов // *ЖЭТФ.* 2004. Т.126. В.4 (10), С.799-818.
8. *Medenwaldt R.R., Moller S.P., Tang-Peterson S. et. al.* Investigations of the coherent hard photon yields from (50-300) GeV/c electrons/ positrons in the strong crystalline fields of diamond, silicon and germanium crystals// *Phys. Lett. B.* V.242, 517-523 (1990); See also: R. Medenwaldt, S.P.Moller, A.H.Sorensen, et.al. // *CERN/SPSC 90-31 SPSC/P234 Add. 3* (1990).
9. *Kirsebom K., Medenwaldt R., Mikkelsen U.et. al.* Experimental investigation of photon multiplicity and radiation cooling for 150 GeV // *Nucl. Instr. Meth. B.* V.119, 79-95 (1996).
10. *Baurichter A., Kirsebom K., Kononets Yu.V.et. al.* Radiation Emission and Its Influence on the Motion of Multi - GeV Electrons and Positrons in Strong Crystalline Fields // *Phys. Rev. Lett.* V.79, 3415-3418 (1997).

11. Kirsebom K., Mikkelsen U., Uggerhoj E. et. al. Radiation Emission and Its Influence on the Motion of Multi - GeV Electrons and Positrons Incident on a Single Diamond Crystal // Nucl. Instr. Meth. B. V.174, 274-296 (2001).
12. Lindhard J. Influence of crystal lattice on motion of energetic charged particles // Dan. Vid. Selsk. Mat.- Fys. Medd. 1965. V.34. N.14. P.1. См. перевод: Линдхард Й. Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц // УФН. 1965. Т.99. Вып. 2. С.249-296.
13. Kumakhov M.A. On the theory of electromagnetic radiation of charged particles in a crystal // Phys. Lett. A. 1976. V.57. No.1. P.17-18.
14. Beloshitsky V.V. and Komarov F.F.. Electromagnetic radiation of relativistic channeling particles. // Phys. Rep. 1982. V. 93. No. 3. P. 117 – 197.
15. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. Электромагнитные процессы при высокой энергии в ориентированных монокристаллах. Новосибирск: Наука, 1989. 399 с.
16. Khokonov M. Kh., Nitta H. A Standard Radiation Spectrum of Relativistic Electrons: Beyond Synchrotron Approximation // Phys. Rev. Lett. 2002. No. 9. V. 89. P. 094801-4.
17. Khokonov M.Kh. Saddle Point Method in the Radiation Problem // Physica Scripta, V.55. P. 513-519 (1997).
18. Хоконов М.Х. Угловые распределения релятивистских заряженных частиц в ориентированных кристаллах // ЖЭТФ, В.5, С.1723-41, Т.103, 1993.

CASCADE-TYPE PROCESSES IN THE TRANSPORT PHYSICS OF PARTICLES THROUGH MATTER

M.H. Khokonov

A cascade processes of energy loss of the original particles (electrons, positrons) due to the emission of hard gamma radiation are considered. This is due to intense experimental and theoretical studies of electromagnetic processes in strong external fields exceeding the critical Schwinger field in recent time.